Ф. ЖУРДЭН

ПРИРОДА МАТЕМАТИКИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ.
И. Ю. ТИМЧЕНКО

MATHESIS

ОДЕССА 1923

PH. JOURDAIN

THE NATURE OF MATHEMATICS

Ф. ЖУРДЭН

ПРИРОДА МАТЕМАТИКИ

перевел с английского
А. А. МОЧУЛЬСКИЙ
под редакцией проф.
И. Ю. ТИМЧЕНКО

ОДЕССА 1923.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава		Стр
	Предисловие редактора	VII
	Вступление	1
I.	Рост математической науки в древности	11
II.	Возникновение и развитие современной математики—алгебра	38
III.	Возникновение и развитие современной математики—аналитическая геометрия и метод неделимых	70
IV.	Начало применения математики к естествознанию—динамика	100
V.	Возникновение современной математики—исчисление бесконечно-малых	124
VI.	Современные взгляды на пределы и числа	146
VII.	Природа математики	159
	Библиография	171
	Указатель	173

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Предлагаемая в русском переводе книга написана с целью познакомить читателей, обладающих самыми ограниченными математическими знаниями, с современными взглядами на логическую природу математики. Задача эта трудная и насколько она правильно решена автором—судить читателю из того круга лиц, для которого она предназначена; читателю - математику трудно было бы ответить на этот вопрос и, критикуя книгу, он должен помнить, что она написана не для него. Не-математик, с другой стороны, должен иметь в виду, что рассматриваемые автором предметы принадлежат к числу самых абстрактных и трудных и от него потребуется при чтении напряженное внимание и, может быть, при первом чтении ему не удастся все понять. Книга, однако, вполне заслуживает чтения и всякого читателя даже и математика заставит серьезно подумать о вещах, на которые он, вероятно, прежде не обращал надлежащего внимания. Взгляды на природу математики, о которых говорит автор, к сожалению, не только мало распространены среди образованных людей вообще, но и в среде математиков сделались достоянием лишь тех, кто ознакомился с новейшими работами о логических основаниях математических наук.

Перевод сделан по возможности точно; переводчик и редактор старались следовать за автором даже и там, где ход мыслей его и стиль представляли некоторые шероховатости. Лишь в двух—трех местах мы решились на более серьезные изменения—там где некоторые фразы казались нам недостаточно вразумительными.

Я оставил без поправок или пояснений большую часть исторических замечаний автора и только в трех местах счел нужным дать свои пояснения.

И. Тимченко.

ПРИРОДА МАТЕМАТИКИ

Вступление

Один выдающийся математик заметил однажды, что он никогда не бывал удовлетворен своим пониманием какой-либо математической теории до тех пор, пока не чувствовал себя в состоянии объяснить ее первому встречному. Это, может быть, и преувеличено; однако, нужно помнить, что удовлетворительное выяснение вопроса налагает обязанности на обе стороны. Каждый из нас вправе спросить математика: „Какая польза от математики?" Я думаю и попытаюсь это доказать, что всякий имеет право предположить, что удовлетворительный ответ, если таковой сколько-нибудь вообще возможен, может быть выражен совершенно просто. Даже люди, посвятившие себя наиболее отвлеченной науке, как математика или философия, приспособлены главным образом для целей обыденной жизни; когда они думают, то думают по существу так же, как и прочие люди. Часто они обладают более высокой выучкой и технической легкостью мышления, происходящей отчасти от упражнения, а отчасти благодаря употреблению приемов для правильной и быстрой мысли, заключающихся в системе знаков и правил обращения с ними, доставляемых математикой и современной логикой. Но тут нет действительных препятствий к тому, чтобы при известном терпении обыкновенный человек понял, говоря вообще, то, над чем работают математики, почему они этим занимаются и что представляет собою математика, насколько мы сами теперь знаем это.

Терпение—вот чего мы вправе требовать от спрашивающего. Это предполагает, что поставленный вопрос не является только риторическим, т. е. не есть выражение раздражения или скептицизма, высказанного ради воображаемого эффекта в форме вопроса. Если А не нравится высшая математика по той причине, что она, как он правильно усматривает, не может помочь в его бакалейной торговле, и он спрашивает с чувством отвращения „Что толку в математике?“, то он вовсе не ожидает ответа; он тотчас забывает об этом и начинает жаловаться на то, что запоздал обед. Мы, со своей стороны, сразу признаемся в том, что высшая математика не более полезна для бакалейной торговли, чем бакалейная торговля для кораблевождения; но это не может служить основанием для осуждения математики, как предмета совершенно бесполезного. Я вспоминаю, что читал речь одного выдающегося хирурга, в которой он пропагандировал, что конечно похвально, распространение элементарного хирургического образования. „Высшая математика,—говорит он с большим самодовольством,—не поможет нам забинтовать сломанную ногу!“ Очевидно, что не поможет; но столь же очевидно, что хирургия не поможет свести счет;... или не поможет логически думать, или, наконец, не поможет совершить не менее трудный подвиг оценки остроты или шутки.

На вопрос о пользе математики мы можем ответить указанием на два очевидных последствия одного из ее применений: математика уменьшает число несчастий на море и увеличивает коммерческое преуспеяние наций. Только немногие люди — любители, не обладающие особенно высоким умом, стали бы сомневаться в том, что эти два обстоятельства являются истинными благодеяниями для человечества. Однако, все мы, без исключения, вероятно поступаем так, как будто бы мы были уверены в истинности этого благодеяния. Я не хочу сказать, что математики ходят постоянно со спасательными поясами или же стоят за конторкой, обыкновенно они этим не занимаются. То, что я имею в виду, я сейчас попытаюсь изложить.

Естествознание занято в очень значительной мере уменьшением излишней траты мускульного и умственного труда в тех случаях, когда мы хотим использовать с той или иной целью известные опытные факты. Факты иногда бывают крайне полезны. Так, например, для моряка, потерявшего землю из вида, очень полезно знать положение звезд и солнца днем и ночью. В противном случае, он не сможет определить своего местоположения. Для этой цели некоторые лица, служащие в определенном учреждении, издают периодически *Морской Календарь, Nautical Almanac,* заключающий в себе положения звезд и других объектов, видимых в телескоп, для каждого дня и ночи, на много лет вперед. Такой *Календарь,* очевидно, облегчает ведение заморской торговли и делает более безопасными продолжительные путешествия в открытом море. Но *Морского Календаря* не было бы, не будь науки астрономии; сведений по астрономии, приложимых к практике, не было бы, если бы мы не умели делать наблюдений над солнцем, луною и звездами и не научились представлять результаты тысяч таких наблюдений в удобной и сжатой форме. Коротко говоря,—если бы мы не могли достигнуть экономии нашей умственной и телесной деятельности, запоминая и нося при себе две или три коротких формулы, вместо толстых книг, полных подробностей; и, наконец, этой экономии нашей деятельности мы не смогли бы достигнуть, не будь математики.

Сказанное об астрономии можно одинаково отнести ко всем другим естественным и математическим наукам; истинная сущность их есть уменьшение траты мускульной и умственной энергии. В науке есть еще много неисследованных вопросов, ожидающих обработки мыслителя, и этот труд мы сможем осуществить лишь в том случае, если надлежащим образом организуем приемы нашего мышления, т. е. если сумеем избежать напрасной траты нашей энергии.

Эта маленькая книжка не преследует цели дать, подобно учебнику, собрание математических методов и примеров. Прежде всего здесь сделано то, чего обыкновенно в учебниках не делают, а именно: показано, как и почему эти методы возникли. Все эти методы суть просто средства удобного управления длинной и сложной цепью рассуждений, придуманные сознательно или бессознательно ради экономии умственного труда. Как будет описано в четвертой главе, эти рассуждения, примененные к предсказаниям явлений природы, опираясь на математику, часто дают поразительные результаты. При всем том, методы математики по своей сущности являются чисто логическими, хотя и подсказываются часто явлениями природы. Здесь слово „логический“ означает нечто большее, чем традиционное учение, состоящее из ряда отрывков той науки о рассуждении, которая была создана гением Аристотеля и которая после него превратилась в сухую доктрину, не развивающуюся дальше, ввиду отсутствия гения у его последователей. Современная логика—наука, выросшая вместе с математикой. После того, как она сама приняла форму по образцу математики, стало ясно, что не только рассуждения, но и математические идеи являются по своей природе чисто логическими.

В этой книге я буду уделять мало внимания деталям элементарной арифметики, геометрии и алгебры, так как это делается во многих руководствах, но займусь рассмотрением таких идей, как, например, понятие об отрицательном числе, которым пользуются эти учебники, не подвергая их достаточно подробному рассмотрению. Затем я дам довольно полное изложение развития аналитических методов и рассмотрю известные принципы.

Я надеюсь, что сумею показать, что процесс математического творчества есть нечто живое и растущее. Некоторые математики прожили долгую жизнь полные спокойной и непоколебимой веры, — ибо вера в математике, как я покажу, всегда была нужна,—другие жили мало, полные горячего энтузиазма, и т. д., и в большей своей части вера математиков была связана с большими заблуждениями.

Теперь мы переходим ко второму предмету этой книги. В исторической части мы увидим, что действительные рассуждения, приводившиеся математиками при построении своих методов, часто не согласовались с правилами логики. Как же в таком случае можно говорить, что математические рассуждения являются по своей природе логическими? Ответ на это заключается в том, что одно и то же слово „математика“ обычно употребляется в двояком смысле. Как выяснится в последней главе, я буду отличать „математику“—т. е. методы, применяющиеся для открытия известных истин, от „Математики“—совокупности открытых истин. Когда мы при помощи внешних свидетельств или предположений пройдем через этап отыскания того, как выросла математика из задач, подсказанных явлениями природы, как падение камня, и заметим при этом, как нечто очень абстрактное и неосязаемое, но и очень реальное, выделилось из этих задач, мы сможем обратить наше внимание на решение задачи о природе Математики, не заботясь уже больше о том, как исторически постепенно появилось у нас ясное сознание существования Математики,—предмета, существующего отдельно от приложения его к естествознанию.

Для исследователя история имеет громадную ценность в отношении поучительности, но, с точки зрения чисто логической, она представляет собою нечто чуждое открытиям. Предположите, что вы математик; то, что вы едите, окажет значительное влияние на ваше открытие; но вы сразу видите, как было бы нелепо сказать, будто важное открытие того, что 2, сложенное с 3, составляет 5, зависит от хорошего обеда из бараньих котлет и хлеба с вареньем.—Приемы работы и жизненные привычки математиков, связующие нити внушения, проходящие через их деятельность, влияние на их деятельность совместной работы других людей—все это любопытно для исследователя, так как доставляет ему примеры исследования и внушает ему новые идеи; но это—обстоятельства психологического порядка, а не логического.

Совершенно справедливо и естественно считать, что лучший способ ознакомления с новыми идеями состоит в том, чтобы изучить тот путь, по которому развивалось познание этих идей. Этим прежде всего мы и займемся. При этом я и выставлю свои собственные взгляды, которые вкратце сводятся к следующему. Каждый значительный успех в развитии математики, который мы будем здесь рассматривать, возник из потребностей естествознания или же явился под влиянием необходимости связать вместе, в методически расположенное целое, аналогичные математические процессы, употребляемые для описания различных явлений природы. Мы применяем логику к нашей системе описания либо в силу интеллектуальных потребностей (часто таких же сильных, как и голод в отношении организма), либо по практическим соображениям для того, чтобы иметь уверенность в том, что во всей системе нет скрытых источников ошибок, которые, в конце концов, могли бы дать неверный результат при вычислении будущих или прошедших событий в природе. Как первое, так и второе требование, приводят к тем утонченным современным методам, на которые с таким неодобрением смотрят математики старого покроя.

В наше время ясно выявилась истинная природа математических истин, которая прежде лишь смутно подозревалась. Относительно этого я попытаюсь дать некоторые указания и покажу, что так как математика есть наука по своей природе логическая, а не психологическая, то все мелкие вопросы, иногда забавные, а часто скучные, исторического, личного и национального характера чужды Математике по существу. Чтобы добыть всю совокупность известных нам математических истин, потребовались целые столетия; процесс добывания конечно не закончен и никогда не будет закончен. Однако, теперь мы по добытым уже истинам можем ясно видеть разницу между этими истинами и теми орудиями, которые применялись или применяются при добывании их. Нужно заметить, однако, что такое смешение понятий никогда не делалось теми, кто открывал новые истины, а исключительно некоторыми из философствующих зрителей, которые размышляли о том, что они видели. Я надеюсь и ожидаю, что наши размышления не поведут к подобному смешению понятий.

ГЛАВА I

Рост математической науки в древности

На основании изображений на древних египетских и ассирийских памятниках можно заключить, что такие изобретения, как колесо, рычаг и клин, принадлежат к ранней поре истории человеческого рода. Эти изобретения делались при помощи инстинктивного и бессознательного знания процессов природы и исключительно для удовлетворения физических потребностей. Первобытные люди строили хижины, чтобы защитить себя от непогоды, а для этого они были принуждены научиться подымать и перемещать тяжести и т. д. Позднее эти отдельные изобретения классифицировались по некоторым сходным признакам, когда явилась надобность в размышлении над самыми изобретениями, вероятно, для того, чтобы ознакомить с ними молодых членов племени или же вновь вступивших в артель сотрудников. Так, мы видим, что отношение колеса к его оси и отношение плеча рычага к его опоре включают в себе те же элементы; может случиться, что при одинаковых тяжестях и одинаковых расстояниях их от оси или от точки опоры понадобятся одинаковые усилия для перемещения этих тяжестей. Таким образом, в силу этой аналогии, мы можем отнести оба эти орудия к одному и тому же классу. Отсюда берет начало то, что мы называем „научной“ классификацией. Мы хорошо представляем себе, что такое развитие знания может быть привлекательно само по себе; помимо того, что оно помогает нам собрать факты в легко обозримую, сжатую и разумно связанную последовательность, оно возбуждает чисто интеллектуальный интерес. Было бы нелепо отрицать очевидную важность для нас наших телесных потребностей. Но мы должны еще ясно сознавать справедливость следующих двух положений: 1) Духовные нужды очень сильны и являются таким же фактом, как голод или жажда; часто они бывают даже сильнее физических нужд,— Ньютон, например, когда был занят своими открытиями, часто забывал принимать пищу; 2) Практические результаты большой ценности часто имеют своим источником удовлетворение духовных потребностей. Так было, например, с Максвеллом и Герцом, которые стремились к удовлетворению известных интеллектуальных нужд, и это в конце концов привело к беспроволочной телеграфии; удовлетворение духовных нужд

Фарадэя сделало возможным изобретение динамомашины и электрического телеграфа. Но результаты многих стремлений, вызываемых интеллектуальными запросами, еще не привели к результатам, направленным к удовлетворению наших телесных нужд. Нельзя, однако, определенно сказать, останутся ли они навсегда бесплодными в этом отношении. Это дает нам возможность рассматривать вопрос о том, какова польза от математики, с новой точки зрения. Слишком близоруко считать бесполезными даже те ветви математики, плоды которых не могут быть прямо использованы для каких-либо надобностей.

Способность к построению науки отличает человека от остальных животных. Иногда, хотя и редко, нисшие животные делают отдельные открытия, но никогда у них не замечалось наклонности оценивать эти открытия с точки зрения разумной классификации их либо в интересах духовной потребности, либо же для косвенного использования их на практике. Возможно, что наибольшее различие между человеком и низшими животными заключается в том, что люди способны идти кружным путем для достижения своих целей, тогда как ум низших животных настолько занят удовлетворением необходимых для существования потребностей, что они стараются просто схватить нужный им предмет или же удалить препятствия, мешающие им двигаться по прямому пути. Так, например, обезьяны часто тщетно стараются поймать те предметы, которых они домогаются, тогда как даже дикари употребляют пращу или силки или пользуются сознательно наблюденными свойствами брошенных камней.

Необходимость сообщить свое знание другим является первой побудительной причиной, принуждающей к ясному размышлению. Каждый может всегда проверить это на своем опыте. То, что производится механически старым членом общества, поражает нового члена общества, как вещь странная, и это дает толчёк для нового размышления и исследования.

Когда мы хотим ознакомить кого-нибудь с тем или другим явлением или процессом природы, мы можем выбрать один из двух методов: мы можем позволить самому ему наблюдать явление, чем обучение и заканчивается; или же можно описать как-нибудь явление, чтобы избавить его от труда снова проделать самому каждый опыт. Чтобы описать событие, например, падение камня на землю, наиболее выразительным и сжатым образом, нужно открыть то, что является постоянным и что является переменным в процессах природы; мы должны открыть тот же закон в образовании слезы и в движениях планет. В этом истинная сущность почти всякой науки, и к этому мы вернемся впоследствии. Таким образом, мы имеем некоторое представление о том, что называют „экономической функцией науки“. Это звучит так, как если бы наука управлялась теми же законами, что и деловая деятельность. Так и есть в действительности. Но тогда, как деловые операции не имеют своей прямой, по крайней мере, целью удовлетворение духовных нужд, наука, включая естествознание, логику и математику, сознательно применяет деловые методы именно для такой цели. Методы значительно шире по размерам, гораздо лучше обдуманы, применяются разумнее, чем обычные деловые методы, но все же принцип остается тем же самым.

Это обстоятельство некоторым может показаться очень странным и, однако, так оно и есть; в этих деловых методах науки с течением времени проявляется все более и более значительная и захватывающая красота.

Экономическая функция проявляется совершенно ясно как в древней, так и в современной науке. Вначале вся экономия непосредственно имела в виду просто удовлетворение физических потребностей. Для ремесленника и еще более для исследователя возможно более коротко высказанное и простое познание данной области физических явлений—познание, приобретаемое с наименьшей затратой умственной энергии—естественно становится собственной целью; но хотя познание являлось сначала средством для достижения цели, в конце концов, однако, как только связанные с ним рассудочные мотивы развиваются и требуют своего удовлетворения, немедленно исчезает всякая мысль о его первоначальном назначении. Это одно из великих назначений науки—путем мысленного воспроизведения и предугадывания фактов заменять этим производство опытов, или же избавлять от труда совершать их. Память удобнее испытания опытом и часто способна дать ответ на тот же самый вопрос. Наука распространяется с помощью обучения для того, чтобы один человек смог извлечь пользу из опыта другого и был бы избавлен от труда накоплять его самому; и, таким образом, чтобы избавить потомство от лишнего труда, опыт всего поколения хранится в библиотеках. Сверх того, еще другая функция этой экономии состоит в подготовке почвы для новых исследований [1].

Экономический характер древне-греческой геометрии не так очевиден, как характер современных алгебраических наук. Мы будем в состоянии оценить этот факт после того, как при-

---

[1] Срав. стр. 5, 24, 32

обретем некоторое понятие об историческом развитии древней и современной математической науки.

Общепризнанная причина возникновения и развития геометрии заключается в том, что древние египтяне вынуждены были изобрести ее для того, чтобы иметь возможность восстанавливать межевые знаки, разрушаемые периодическими наводнениями Нила. Эти наводнения уничтожали границы полей в долине реки и, изменяя течение реки, таким образом повышали или понижали налоговую ценность прилегающих земель, делая необходимой достаточно точную систему размежевания. Это повело к систематическому изучению предмета жрецами. Прокл (412—485 по Р. Х.), написавший очерк ранней истории геометрии, передает этот рассказ, который мы находим и у Геродота, и замечает, что нет ничего странного в том, что изобретение науки имело свое начало в практических потребностях и что далее следует ожидать перехода от восприятия при помощи внешних чувств к размышлению и от размышления к знанию. Действительно, само название „геометрия“, происшедшее от двух греческих слов, обозначающих *измерение земли*, повидимому, указывает на то, что геометрия зародилась не в Греции и что она возникла из потребности в размежевании полей. Ибо греческие геометры, как мы заметим, повидимому, всегда обращались с геометрией, как с отвлеченной наукой, рассматривая линии, круги, сферы и т. д., а не грубые изображения этих отвлеченных понятий, которые мы наблюдаем в действительности, и отыскивая такого рода предложения, которые были бы абсолютно истинными, а не служили бы только приближениями. Название геометрии, следовательно, не соответствует такой точке зрения. Однако, историю математики нельзя с уверенностью отнести к какой-либо школе или периоду, предшествовавшему Ионийским грекам. Повидимому, геометрические знания египтян были по своей природе всецело практическими. Например, египтяне очень тщательно ориентировали свои храмы; для этого им приходилось проводить точно линию севера—юга, а равным образом и линию востока—запада. Наблюдая точки горизонта, в которых звезда восходила и заходила, и проводя на среднем расстоянии между ними плоскость, они могли определить линию севера—юга. Для нахождения линии востока — запада, которая проходит под прямым углом к первой, особые специалисты пользовались веревкой $ABCD$, разделенной узлами, или отметками в B и C так, что длины AB, BC, CD находились в отношении 3:4:5. Длина BC располагалась по линии севера

— юга, а в узлах *B* и *C* втыкались колья *P* и *Q*. Часть *BA*, будучи все время натянутой, вращалась затем вокруг колышка *P*, и точно так же часть *CD* вращалась вокруг колышка *Q* до тех пор, пока концы *A* и *D* не совпадали; точка совпадения, полученная таким путем, обозначалась колышком *R*. Результатом было получение треугольника *PAR* с прямым углом при вершине *P*, и тогда линия *PR* давала линию запада — востока. Подобный прием постоянно употребляется в наше время землемерами и садовниками при разбивке тенисных площадок для измерения прямого угла. Повидимому, этот прием был известен китайцам около трех тысяч лет тому назад, но китайцы не предприняли никаких серьезных попыток классифицировать или расширить немногие знакомые им правила арифметики или геометрии, или выяснить причины наблюдаемых ими явлений.

Геометрическая теорема, частный случай которой применяется в только что описанном приеме, хорошо известна читателям первой книги Евклидовых *Начал* [1]). Египтяне вероятно должны были знать, что эта теорема справедлива для прямоугольного треугольника в том случае, когда катеты его равны между собой, так как это очевидно при настилке пола черепицей такой

[1]) В Английской школе геометрия преподается по Евклиду.

формы. Но эти факты не могут указывать на то, что в то время геометрию изучали, как науку. Нашими действительными сведениями о природе египетской геометрии мы обязаны, главным образом, папирусу Ринда.

Древний египетский папирус Ринда, написанный египетским жрецом, по имени Ахмес, значительно раньше, чем за тысячу лет до Рождества Христова и находящийся теперь в Британском музее, содержит довольно полный курс прикладной математики, в котором главную роль играют измерения фигур и тел. Здесь нет теорем, в собственном смысле слова; все излагается в форме задач, выраженных не в общем виде, а при частных числовых данных. Например: измерить площадь прямоугольника, стороны которого содержат две и десять единиц длины; найти площадь круга, диаметр которого равен шести единицам. Мы находим здесь также указания для измерения объемов тел, в частности полной и усеченной пирамиды. Арифметические задачи, решаемые в папирусе, который, между прочим, озаглавлен: „Наставления к познанию всех тёмных вещей", содержат в себе некоторые очень интересные вещи. Говоря современным нам языком, первая часть посвящена разложению дроби, числитель которой 2, на сумму нескольких дробей, каждая из которых имеет числителем 1. Так, например, устанавливается, что $\frac{2}{29}$ есть сумма $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{58}$, $\frac{1}{174}$ и $\frac{1}{132}$. Ахмес, вероятно, не знал правила для образования таких составных дробей, и данные им ответы представляют совокупный опыт предыдущих писателей. Однако, в одном единственном случае он указывает свой метод, так как после утверждения того, что $\frac{2}{3}$ есть сумма $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{6}$, он прибавляет, что поэтому две трети одной пятой равны сумме половины одной пятой и одной шестой от одной пятой, т. е. $\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$.

То обстоятельство, что дробям уделялось так много внимания, можно объяснить тем, что в раннюю пору математики изложение учения о дробях представляло значительные затруднения. Египтяне и греки упростили вопрос, сводя дробь к сумме нескольких особых дробей, в каждой из которых числитель есть единица, так что они рассматривали только различные знаменатели; единственным исключением из этого правила являлась дробь $\frac{2}{3}$. Это оставалось в практике греков до шестого столетия нашей эры. С другой стороны, римляне вообще придерживались знаменателя, равного двенадцати, выражая дробь (приближенно), как совокупность двенадцатых долей. Судя по обращению Ахмеса с умножением, он опирается на идею повторяемого сложения. Так, чтобы умножить некоторое число, которое мы обозначим буквой a, на 13, он сначала умножает его на 2 и получает $2a$, затем результат удваивает и получает $4a$, затем это снова удваивает и получает $8a$ и, наконец, складывает вместе a, $4a$ и $8a$.

Мы употребили символ „a", поставив его вместо всякого числа: не вместо какого-то частного числа, как 3, но вместо *всякого*. Это есть то, что делает Ахмес и чему мы учимся в науке, которая носит название „алгебры". Когда Ахмес желает найти такое число, которое, сложенное со своей седьмой частью, составит 19, он символически обозначает это число знаком, который мы переводим словом „куча". Он имеет также знаки, соответствующие нашим „$+$, $-$" и „$=$" [1]). В наше время мы можем выразить

[1]) В этой книге я буду очень заботливо отличать знаки от того, что они собой обозначают. Так, например: 2 должно быть отличаемо от „2"; под „2" я разумею *самый знак*, тогда как знак, написанный без кавычек, указывает на обозначаемое понятие. Неоднократно не только начинающие но и выдающиеся математики смешивали и смешивают понятия самого знака и вещи, им обозначаемой. Многие даже утверждали, что *числа* суть просто *знаки*, которые

задачу Ахмеса так: найти такое число x, чтобы $x+\frac{x}{7}=19$. Ахмес дал ответ в виде $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.

Мы увидим, что алгебра была едва затрагиваема теми самыми греками, которые сделали геометрию столь важной наукой. Это произошло отчасти, вероятно, потому, что почти всеобщее употребление абака [1]) сделало легким для них сложение и вычитание без всякого знания теоретической арифметики. И мы должны помнить о том, что главное основание того, что арифметические задачи Ахмеса кажутся нам столь легкими, заключается в том, что мы с детства пользуемся системой обозначения, введенной в Европу арабами, которые первоначально получили ее от индусов. В этой системе целое число обозначается последовательностью цифр, причем каждая

употребляются для представления их. Часто, ради краткости, я буду употреблять какое-нибудь слово, взятым в кавычки (скажем „*a*"), как сокращение фразы, „то, что мы называем „*a*", но из контекста будет ясно видно, что именно имеется в виду.

[1]) Принцип абака (счетной доски) состоит в том, что число представляется посредством фишек в ряде пазов или четок, нанизанных на параллельных проволоках; кладется в первый пав столько фишек, сколько есть единиц, во второй паз столько, сколько есть десятков и т. д. Правила, которым нужно следовать при сложении, вычитании, умножении и делении, даны в различных старых руководствах по арифметике.

цифра представляет собою произведение ее на некоторую степень десяти, и само число равно сумме этих произведений. Таким образом, путем приписывания поместного значения девяти символам и употребления символа нуль можно выразить всякое число в десятичной системе обозначений. Очень важно признать то обстоятельство, что была необходима долгая и ревностная работа наиболее одаренных умов для того, чтобы дать нам простую и выразительную систему обозначений, которая почти во всех отделах математики помогает даже наименее одаренным из нас воспроизводить те теоремы, которые для своего открытия требовали величайшего гения. Каждое улучшение в обозначениях кажется для несведущего очень незначительной вещью; и, однако, при вычислении перо бывает остроумнее пишущего. Наши обозначения являются примером того великого духа экономии, который щадит расход труда на вещи, уже систематизированные, так что вся наша умственная сила может быть сосредоточена или на том, что известно, но еще не систематизировано, или на том, что еще неизвестно.

Посмотрим теперь, как преобразовалась египетская геометрия в руках греков. Фалес Милетский (около 640—546 г.г. до Р. Х), который в раннюю пору своей жизни занимался отчасти торговлей, а отчасти общественными делами, посетил Египет и первый принес эти знания в Грецию. Он сам открыл много новых вещей и сообщил начала этой науки многим своим последователям. Мы не можем составить себе сколько-нибудь точное представление о том, как Фалес излагал свое геометрическое учение.

По свидетельству Прокла, мы можем, однако, заключить, что оно состояло из некоторого числа не связанных друг с другом предложений, не расположенных в логической последовательности, но что доказательство их было дедуктивным, так что эти теоремы не являлись только заключениями по индукции, на основании большого числа частных примеров, как это, вероятно, было у египетских геометров. Дедуктивный характер, который Фалес дал науке, является его главнейшей заслугой. Пифагор (родился около 580 г. до Р. X.) придал геометрии форму отвлеченной науки, рассматривая принципы ее совершенно отвлеченным образом, и исследовал ее теоремы с нематериальной и умозрительной точки зрения. Среди последователей этих людей наиболее известными являются Архит из Тарента (428—347 г.г. до Р. X.), Платон (429—348 г.г. до Р. X.), Гиппократ Хиосский (родился около 470 г. до Р. X.), Менехм (около 375—315 г.г. до Р. X.), Евклид (около 330—275 г.г. до Р. X.), Архимед (287—212 г.г. до Р. X.), Аполлоний (260—200 г.г. до Р. X.).

Египетским жрецам была известна только геометрия поверхностей, вместе с краткими сведениями о телах, — геометрия, изучающая площади и объемы некоторых простых плоских и пространственных фигур, которые они получали с помощью действительного опыта. Фалес поставил себе идеалом установление путем точного рассуждения *соотношений* между различными частями фигуры так, что некоторые из них могут быть найдены с помощью других вполне строгим образом. Это было совершенно новым явлением в древнем мире и, в действительности, своим возникновением оно обязано абстрактному духу греческой мысли. В связи с новым толчком, сообщенным геометрии, возникла от Фалеса, кроме того, научная астрономия, также абстрактная наука—несомненно творение греческой мысли. Астрономия греков отличается от астрономии восточных народов в следующем отношении: астрономия последних, будучи всецело конкретной и эмпирической, занималась исключительно определением длительности некоторых периодов или указанием, при помощи механических процессов, движения солнца и планет, тогда как астрономия греков стремилась открыть геометрические законы движения небесных тел.

Рассмотрим простой случай. Площадь прямоугольного поля, длиною в 80 ярдов[1]) и шириною в 50 ярдов равна 4000 кв. ярдов. Площади других не прямоугольных полей могут быть приблизительно измерены путем мысленного рассечения их на части—процесс, часто требующий большой изобретательности и являющийся обычной задачей землемеров. Предположим, что нам нужно измерить круглое поле. Вообразим себе большое число радиусов, проведенных из центра круга так, что каждый радиус образует равные углы с обоими соседними с ним. Соединяя последовательно точки встречи радиусов с окружностью круга, мы получим большое число треугольников с одинаковыми площадями. Сумма площадей всех этих треугольников даст некоторое приближение к площади круга.

В частности, очень поучительно многократно мысленно пробегать этот и подобные примеры, отмечая, как полезны те отвлеченные идеи, которые мы называем „прямой линией", „кругом", „радиусом", „углом" и т. д. Все мы знаем их, узнаем их и можем легко чувствовать, что они выражают истинные и точные понятия. Рассматривая, например, понятие квадрата, мы, так сказать, чувствуем себя, как дома, и можем сразу дать подробные указания относительно тех признаков

[1]) 1 ярд = 3 футам.

этого понятия, которые *вполне* истинны для него и которые *весьма близко* истинны для поля, которое, как мы знаем, по форме *очень близко* к квадрату. Это введение отвлеченных геометрических объектов при процессе мышления экономизирует труд мысли и воображения, приводя нас к сосредоточению нашей мысли только на том, что является существенным для нашего предмета.

Фалес, повидимому, открыл, — для читателя будет полезно рассмотреть эти открытия, начертив при помощи циркуля и линейки соответствующие фигуры,—доказательство того, что может быть рассматриваемо, как очевидный факт, именно: что круг делится своим диаметром пополам, что углы при основании треугольника с двумя равными сторонами,—равнобедренного треугольника,—равны, что все треугольники, построенные на полуокружности так, что две из их вершин находятся на концах диаметра, а третья лежит где-либо на окружности, имеют прямой угол; он дал способ измерения расстояния судна от берега, заставив, вероятно, двух наблюдателей, находящихся на известном расстоянии один от другого, измерять два угла, образованные направлением от одного наблюдателя к другому и другим направлением, от наблюдателя к кораблю. Последнее открытие является приложением того факта, что треугольник определен, если даны его основание и прилежащие к этому основанию углы.

Когда Архит и Менехм употребляли механические приборы для решения некоторых геометрических задач, тогда „Платон, говорит Плутарх, порицал их с большим негодованием и настойчивостью, как разрушающих и извращающих все, что есть хорошего в геометрии; ибо этот метод от невещественных и интеллектуальных понятий уклоняется к чувственным вещам и, сверх того, употребляет такие тела, которые требуют много простого ремесла: таким образом, *механика* была отделена и изгнана из геометрии, и, презираемая долгое время философией, она сделалась одним из военных искусств“. И действительно, греки презирали ручной труд, и, благодаря этому, получалось резкое различие между рабами, которые исполняли физическую работу и действительно наблюдали природу, и имеющими досуг высшими классами, которые занимались умозрением и часто знали природу только по наслышке. Этим обстоятельством хорошо объясняется наивный, туманный и мечтательный характер древнего естествознания. Только иногда появлялось желание самому производить опыты, но, когда это происходило, в результате получался большой прогресс, как это было с Архитом и Архимедом. Последний, подобно Платону, держался мнения, что для философа не-желательно искать какого либо практического приложения для научных результатов; однако, каков бы ни был его взгляд на то, что должно было быть, в действительности он ввел большое число новых изобретений.

Мы не будем далее рассматривать ни развития математики у других древних народов, ни главных задач, исследованных греками; такие подробности можно найти в некоторых книгах, упомянутых в отделе библиографии, в конце настоящего сочинения. Предмет этой главы—выяснить природу науки геометрии, показать, как известные практические потребности породили исследования, в которых появляется отвлеченная наука, стоящая того, чтобы ее культивировать ради ее самой, из которой иногда вытекали следствия практического порядка. Греки начали разрабатывать две ветви математики, благодаря которым создается связь между духом греческой и современной математики.

Первая ветвь есть метод геометрического анализа, на который обратил внимание, повидимому, Платон. Аналитический метод доказательства начинается предположением, что теорема или задача решена, и отсюда получается некоторый вывод. Если последний ложен, то теорема несправедлива, или решение задачи невозможно; если же вывод истинен, если все ступени рассуждения обратимы, то мы получаем (идя обратным путем) синтетическое доказательство; но если ступеней рассуждения нельзя обратить, то нельзя сделать никакого заключения. Мы замечаем, что руководящая мысль анализа есть как раз та, которая является основной и в алгебре и которую мы заметили у Ахмеса, а именно: вычисление или рассуждение над неизвестным объектом, который обозначен соответствующим знаком так, как если бы он был известен, и, в конце концов, вывод некоторых соотношений, определяющих, каков должен быть этот объект.

Это заставляет нас говорить о второй ветви, об алгебре у позднейших греков. Диофант Александрийский, живший, вероятно, в первую половину четвертого века после Рождества Христова, повидимому был действительным изобретателем алгебры; он употреблял в арифметике буквы для обозначения неизвестных количеств и решал, аналитическим путем, арифметические задачи. Сложение, которое мы обозначаем знаком „+“, обозначалось у Диофанта простым расположением рядом символов слагаемых, а для знаков „—“ и „=“ он употреблял особые символы. Все эти символы были только сокращением слов, и возможно, что наиболее важное преимущество символизма, как могучего средства для проведения сложной цепи выводов, почти механическим путем, не очень то ценилось Диофантом. Здесь мы снова сталкиваемся с экономической ценностью символизма: он предупреждает расход умственной и телесной энергии для тех процессов, которые могут быть выполнены механически. Мы должны помнить, что эта экономия, с одной стороны, подчеркивает характер не подчиненных еще нашему знанию научных задач и, с другой стороны, имеет в себе самой особую прелесть, можно сказать, особое изящество.

Мы должны, наконец, упомянуть о „несоизмеримых", „местах" и о возникновении „тригонометрии".

По свидетельству Евдема и Прокла „несоизмеримые количества" открыл Пифагор. Так, эти писатели говорят, что он нашел, что диагональ и сторона квадрата „несоизмеримы" между собой. Предположим, например, что сторона квадрата содержит одну единицу длины; диагональ по длине больше ее, но меньше двух единиц. Избыток длины диагонали над единицей не укладывается целое число раз в единице; остаток, в свою очередь, не укладывается в наименьшей из сравниваемых линий целое число раз, и так до бесконечности. Выражая существо дела арифметически, можно сказать, что остаток, полученный при каждом делении некоторого остатка на следующий за ним, не является делителем последнего. Иначе говоря, правило, указываемое в руководствах по арифметике и алгебре для нахождения наибольшей общей меры, не приводит к концу. Этот процесс, примененный к целым числам, всегда конечен; но когда он применяется к известным длинам, этого не бывает. Пифагор доказал, таким образом, что, если мы имеем прямую любой длины, то существуют другие прямые, отношение которых к длине первой не может быть выражено отношением двух целых чисел, как бы мы ни выбирали эти числа. Понятно, что отношение всяких двух дробей равно отношению двух целых чисел. В упомянутом выше случае диагонали, если она по длине выражалась бы некоторым числом x единиц, мы имели бы $x^2=2$, а можно доказать, что нет такой дроби которая, будучи „умножена“,—смысл этого понятия мы разъясним в следующей главе, — сама на себя, даст в точности 2, хотя есть дроби, которые удовлетворяют, этому требованию с любым приближением.

На основании этого греки резко отличали понятие „числа“ от понятия величины, „количества“ или меры длины. Это различие постепенно стушевывалось по мере того, как люди все больше и больше понимали преимущества отождествления чисел и мер длины.

Изобретение аналитической геометрии, как будет описано в главе III, наиболее способствовало уничтожению этого различия. Только в сравнительно новое время математики выяснили надлежащим образом важность этого логически законного различия, делаемого греками. Очень любопытен тот факт, что отступление от строгого логического мышления привело бы к результатам, грешащим против того, что тогда называлось логикой; однако, теперь известно, что их можно просто истолковать в терминах современной логики. Этим вопросом мы займемся снова в главе VI.

Вопрос о *местах* связан с геометрическим анализом, и его трудно оторвать от мысленной картины движущейся точки. Представим себе, что движущаяся точка подчинена некоторым ограничениям так, что в любой момент она не может двигаться более, чем по двум направлениям, и, таким образом, она способна двигаться только по некоторой кривой. Например, точка может двигаться так, чтобы расстояние ее от определенной точки оставалось постоянным; вершина угла может двигаться так, чтобы стороны его постоянно проходили, скользя, через две закрепленные точки, и угол оставался бы все время прямым.

В обоих случаях движущаяся точка остается на окружности некоторого круга. Эта кривая есть „место“. Очевидно, как могут помогать нам при решении задач соображения о месте, которое точка может описать.

Как мы видели, Фалес открыл теорему о том, что треугольник определен, если даны его основание и углы при нем. Когда мы хотим обозреть участок земли или неба для составления карты, мы измеряем углы путем поворота *прицела*, подобного тем, которые имеются на пушках, на угол, измеряемый металлической дугой круга, для определения относительных направлений звезд или точек на земле. При земных измерениях участок земли представляется приблизительно плоской поверхностью, тогда как небо рассматривается так, как еслибы звезды, как это нам кажется, были рассыпаны по внутренней поверхности сферы, в центре которой мы находимся.

Далее мы образуем сеть треугольников, плоских или сферических, в которых мы измеряем углы и иногда стороны; ибо, если известны углы треугольника, то известны отношения его сторон. Эти отношения нельзя найти, изучая углы, скажем, прямоугольника. Гиппократ (род. около 160 г. до Р. Х.) повидимому изобрел практическую науку полного измерения треугольников по некоторым данным, или так называемую „тригонометрию". Начала, положенные им в основу, были разработаны Птолемеем Александрийским (ум. в 168 г. по Р. Х.), а также индусами и арабами.

Обыкновенно можно измерить достаточно точно только углы, и, таким образом, возникает задача: при данных величинах углов, что можно заключить об отношениях сторон? Представим себе круг с центром O, и пусть дуга круга AP измеряет угол AOP. Заметим, что отношение AP к радиусу остается одним и тем же для угла AOP, каково бы ни было значение радиуса. Проведем PM перпендикулярно к AO. Тогда фигура $OPMAP$ напоминает натянутую дугу лука, и отсюда произошли названия „синус дуги AP" для прямой PM и „косинус" для прямой OM [1]). Были построены таблицы синусов и

---

[1]) Древне-греческие математики пользовались при своих тригонометрических вычислениях не синусом дуги, а хордой двойной дуги. Синус представлялся древним геометрам, как полухорда двойной дуги. Индусские математики первые стали употреблять в своих вычислениях полухорду вместо полной хорды. Полная хорда называлась у них *джӣ̂а* или *джӣва*—слова, означавшие тетиву натянутого лука. Полухорду называли они *ардхаджӣ̂а* или *джӣа̂рдха*, иногда сокращенно просто—*джӣ̂а* или *джӣва*.

В арабской транскрипции—в арабских переводах или переделках индусской тригонометрии—это слово писалось *джӣба* и употреблялось, как иностранное слово,—в качестве особого технического термина. В арабском алфавите, как и в других семитических языках,—есть только согласные буквы (или особые носители гласных), а гласные обозначаются особыми знаками, которые пишутся далеко не во всех рукописях. Средневековые латинские переводчики, знавшие арабский язык и не знавшие санскритского, не знавшие к тому же, что слово *джӣба* технический термин, вокализировали его и понимали, как арабское слово косинусов дуг (или углов, т. к. длина дуги, при известном радиусе, дает величину угла) и, таким образом, зная длину дуги, можно найти длину сторон PM и OM, выраженную по отношению к радиусу. Очевидно, что здесь содержится все существенно необходимое для нахождения отношений сторон плоских треугольников. Сферическая тригонометрия содержит в себе более сложные соотношения, которые непосредственно относятся к астрономии и ее измерениям.

Математика не имела никакого успеха в руках римлян, по всей вероятности, потому, что гений этого народа был слишком практическим. Но, однако, математика проникла в среднюю Европу через Рим.

Математические руководства арабов и греческие книги, в арабских переводах, были введены в западную Европу маврами, в период от 1150 до 1450 года. К концу тринадцатого века, арабская арифметика широко распространилась в Европе и употреблялась наряду со старой арифметикой, основанием которой служила работа Боэтия (около 475—526 г.). Затем наступило Возрождение. Математики едва только успели

джайб—„пазуха", которое и перевели латинским словом sinus. Вероятно, первоначальное введение этого слова принадлежит *Герарду Кремонскому* (в XII в.).

Прим. редактора.

воспринять знания, полученные от арабов, включая их переводы греческих авторов, к тому времени, когда выходцы, бежавшие из Константинополя, после падения Восточной Империи (1453 г.), принесли с собой в Италию оригинальные творения и традиции греческой науки. Таким образом, около середины пятнадцатого столетия главные результаты греческой и арабской математики сделались доступными для европейских ученых.

Изобретение книгопечатания, происшедшее около того времени, сделало сравнительно легким распространение открытий.

ГЛАВА II

Возникновение и развитие современной математики—алгебра

Можно считать, что начало современной математики относится приблизительно к семнадцатому столетию. Хорошо известно, что в первые полторы тысячи лет христианской эры в области науки было сделано, по крайней мере в западной Европе, мало ценного. Дух западных европейцев оказался отличным от духа древних греков, отличным также и от духа более восточных народов. Таким образом, в начальном периоде развития западной математики, мы можем ясно проследить историческое начало употребления, хотя и не в совершенно точной форме, таких понятий, как *переменная и функция*, являющихся характерными для современной математики. Предварительно можно сказать, что эти понятия, подвергнутые в наше время глубокому логическому анализу, сглаживают различия между нашим современным взглядом на Математику и взглядом на нее древних греков и устанавливают сходство между этими различными взглядами.

Выражаясь кратко, греки, повидимому, занимали относительно своей математики позицию, очень похожую на ту, которую заставляет нас занять логика по отношению к значительно более общей, современной математике. Это обобщение характера науки было достигнуто благодаря стремлению привести математику в более тесное соприкосновение с естественными науками—в особенности с наукой о движении. Трудность заключалась в том, что для достижения этой цели математики употребляли выражения, сами по себе незаконные. Поэтому философы, лишенные действительного сочувствия, воодушевляющего всякую критику, которая надеется быть полезной, никогда не могли найти какого-нибудь основания для того, чтобы думать, что то, о чем математики говорили, было справедливо; мир должен был ждать до тех пор, пока математики не начали логически анализировать свои собственные понятия. Всегда, начиная от Возрождения, вплоть до середины девятнадцатого столетия, никакой класс людей не нуждался настолько в этом сочувствии, как математики, так как никакая из наук не была менее логической, чем математика.

Древние греки в своих систематических работах никогда не пользовались понятием *движения*. Понятие *места*, повидимому, заключает в себе мысль о том, что некоторые кривые можно рассматривать, как образованные движением точек.

Греки открыли некоторые вещи, помогая своему воображению представлением о воображаемых движущихся точках, но они никогда не пользовались идеей движения в своих окончательных доказательствах. Причиной этого было то, что математики школы Элеатов, главным представителем которой был Зенон (495—435 до Р. Х.), изобрели несколько чрезвычайно тонких парадоксов, чтобы подчеркнуть трудности, заключавшиеся в понятии движения. Мы вернемся несколько подробнее к этим парадоксам, которые не были, как следует, оценены во все время, начиная от греков, вплоть до новейшего времени. Благодаря этому недостатку тонкости при рассуждении, понятие о переменности было без стеснения введено в математику.

Понятия *постоянной, переменной и функции,* о которых мы будем иметь случай часто говорить впоследствии, были образованы при помощи идеи движения. Эти понятия, будучи логически очищены, превратили как современную математику, так и современную логику, в которую они были перенесены логиками-математиками Лейбницем, Ламбертом, Булем, Де-Морганом и многочисленными последователями Буля и Де-Моргана, приблизительно с 1850 года, в науку, значительно более общую, но имеющую некоторое близкое сходство с греческим идеалом математической науки.

Впоследствии мы разберем вопрос о том, как можно понимать выражение „движущаяся точка".

Рассмотрим теперь ближе историю современной математики. Можно считать, что современная математика, подобно современной философии и одной части—умозрительной, но не экспериментальной части — современной физической науки, ведет свое начало от Рене Декарта (1596—1650). Конечно, как и нужно было ожидать, Декарт имел многих и достойных предшественников. Может быть, величайшим из них был французский математик Франсуа Виет (1540—1603), известный под своим латинизированным именем „Виета". Но будет проще и короче сосредоточить наше внимание на Декарте.

Декарт всегда гордился независимостью своих идей, тем, что он порвал со старыми идеями Аристотеля, и большими ясностью и простотой, с которыми он изложил свои идеи. Но мы не должны слишком низко ценить роль, которую играют „идеи, носящиеся в воздухе"; и даже теперь мы знаем, что разрыв Декарта со старым порядком вещей не был столь большим, как он думал.

Описывая впечатление, которое произвели на него его юношеские занятия, когда он начал размышлять над ними, Декарт говорит:

„Мне особенно нравилась математика верностью и очевидностью рассуждений, но я еще не усматривал ее истинных применений, а полагал, что она применяется только к механическим искусствам, и удивлялся, как на столь прочном и крепком фундаменте не воздвигнуто чего-либо более возвышенного"

И снова:

„Я изучал немного, — будучи моложе, — между частями философии логику, а между частями математики анализ геометров и алгебру, три искусства или науки, которые, казалось мне, должны соответствовать моему намерению. Но, ознакомившись с ними, я заметил, что в логике ее силлогизмы и большинство других ее предписаний служат более к тому, чтобы изъяснять другому то, что нам известно, или даже, чтобы говорить без собственного рассуждения о том, чего не знаешь, а не к тому, чтобы что-либо изучать. Правда, логика содержит не мало правил очень верных и очень хороших, но к ним примешано столько вредных и излишних, что разделить их столь же трудно, как вызвать Диану или Минерву из необделанного еще куска мрамора. Что касается анализа древних и алгебры новых, то кроме того, что они касаются вещей очень отвлеченных и не имеющих, повидимому, никакого применения, первый так ограничен рассмотрением фигур, что не может упражнять ум, не утомляя сильно воображения, а вторая так загромождена разными правилами и знаками, что образует собою темное и запутанное искусство, затрудняющее ум, а не науку, ум развивающую. По этой причине я должен был искать иного метода, который, вмещая в себе достоинства упомянутых трех, был бы свободен от их недостатков...

„Те длинные цепи выводов,—каждый отдельно простых и легких,—какими геометры имеют обыкновение пользоваться, чтобы доходить до труднейших доказательств, дали мне повод сообразить, что и все вещи, кои могут подпасть под человеческое разумение, стоят между собою в подобной же последовательности и что можно,—если только остерегаться не принять бы какую-либо из них за истинную, тогда как она не такова, и постоянно соблюдать порядок, в каком надо выводить их одни из других,—достичь самых отдаленных и открыть наиболее сокровенные. Отыскать те вещи, с коих следовало начать, мне не представило большого труда, ибо я знал уже, что следовало начинать с простейших и доступнейших познанию. А приняв в соображение, что между всеми искавшими доныне истину в науках только математикам удалось найти некоторые доказательства, т.-е., некоторые точные и очевидные соображения, я не сомневался, что и мне надлежало начать с того, что разбирали они, хотя и не надеялся через то достичь иной пользы, кроме приучения ума питаться истиной и не довольствоваться фальшивыми доводами. Но я не возымел намерения изучать для того все отдельные науки, составляющие то, что принято называть математикой. Видя, что все они,—хотя предметы их различны,—согласуются между собою в том, что рассматривают не что иное, как разные отношения и пропорции, в них встречающиеся, я думал, что наилучше будет, если я стану рассматривать только эти отношения вообще, предполагая их, правда, не иначе, как в предметах, кои облегчили бы мне их познание, но и не стесняя их сими предметами, дабы иметь возможность тем лучше приложить их потом к другим, подходящим под них предметам. Затем, приняв во внимание, что для лучшего познания их мне потребуется иногда рассматривать пропорции эти каждую отдельно, а иногда только удержать их в памяти или обнять многие разом, я полагал, что для лучшего рассмотрения в частностях должен предполагать их в виде линий, так как не находил ничего более простого и такого, что мог бы более отчетливо представить моему воображению и моим чувствам. А чтоб удержать их и обнять многие разом, требовалось, чтобы я изъяснил их несколькими знаками возможно кратко. Через это я заимствовал лучшее и из геометрического анализа, и из алгебры и поправлял недостатки одного с помощью другого" [1]).

Рассмотрим теперь главные особенности алгебры и геометрии.

В первой главе мы видели, когда говорили о работах Ахмеса и Диофанта, что математики рано поняли преимущество обозначения неизвестного числа буквою или другим каким-нибудь знаком, который вообще может обозначать, безразлично, какое-нибудь число, записывая так же, как и в геометрическом анализе,—соотношения,

1) „Философія Декарта" переводъ „Разсужденія о методѣ" проф. Н. А. Любимова. С.П.Б. 1866; стр. 7, 45—48.

в которых оно находится, по условиям задачи, относительно других чисел, и затем рассматривая эти соотношения. Если задача определенная, т. е. если для нее существуют одно или более определенных решений, и если можно доказать, что каждое из них содержит в себе уже данные числа, то это рассмотрение приводит, при помощи известных правил вычисления, к определению, действительному или приближенному, этого решения или решений. Даже если имеется решение, зависящее от переменной, то, при известных обстоятельствах, мы можем найти и выразить его совершенно общим способом, по определенным правилам, но тут этот вопрос нас не занимает. Итак, предположите, что вы знаете мой возраст, а я вашего не знаю и хочу узнать. Вы могли бы сказать мне: „Мне было восемь лет, когда вы родились". Тогда я должен был бы рассуждать так. Пусть x есть (неизвестное мне) число лет вашего возраста в данное время и, скажем, 33—число моих лет в этот же момент; тогда существо данного вами сведения может быть выражено уравнением: „$x-8=33$". Значение знаков „—", „=" и „+" предполагается известным, так как несомненно, что эти знаки знакомы теперь большинству людей в мере, совершенно достаточной для наших целей. Заметим теперь, что одно из правил алгебры состоит в том, что всякий член можно переносить с одной стороны от знака „=“ на другую с тем только, чтобы переменить „+“ или „—“, принадлежащий ему, соответственно на „—“ или „+“. В настоящем случае мы получаем „$x=33+8=41$“. Этот до нелепого простой случай выбран преднамеренно. В математике существенно важно помнить, что даже, повидимому, незначительная экономия мысли увеличивает легкость выражения длинных и сложных вычислений. Такое значение имеет, например, условие, введенное Декартом, относительно употребления последних букв алфавита для обозначения неизвестных чисел и первых букв—для обозначения чисел известных. Это условие принято, за малыми исключениями, нынешними алгебраистами, и, благодаря ему, не происходит путаницы при объяснении и при отыскании в уравнении неизвестных и известных величин. Далее, люди, не привыкшие к длинным вычислениям, не могут достаточно оценить великую пользу знаков „+“, „—“, „=“. Даже сбережение места при записывании „xy“ вместо „$x \times y$“ („x умноженный на y“) является важным по той причине, что при помощи его мы можем получить более короткую и более легко обозримую формулу. Затем еще Декарт ввел во всеобщее употребление „степени“ или „показатели“, как этого мы держимся и теперь: так, „x^3“ ставится вместо

„xxx“ и „x^5“ вместо несколько менее выразительного символа, представляющего из себя последовательное умножение пяти x-ов. Одно из больших преимуществ этой системы обозначений состоит в том, что она делает совершенно легким выяснение понятия логарифмов, великое и многотрудное открытие которых было сделано Джоном Нэпером (1550—1617). Мы исходим из уравнения „$x^m x^n = x^{m+n}$“. Теперь, если $x^p = y$, мы называем p „логарифмом y при основании x“, обозначая „$p = \log_x y$“; если мы обозначим x^m через „u“ и x^n через „v“, так что $m = \log_x u$ и $n = \log_x v$, то наше исходное уравнение примет вид: $\log_x(uv) = \log_x u + \log_x v$. Таким образом, если логарифмы чисел при данном основании (скажем, при $x = 10$) расположены в таблицу, то вычисления с большими числами становятся менее затруднительными, ибо, когда логарифмы найдены, *умножение заменяется сложением*. Подобно этому, вычитание логарифмов дает в результате логарифм частного двух чисел.

Теперь рассмотрим вкратце историю алгебры от Диофанта до Декарта.

Слово „алгебра“ есть европейское искажение первого слова арабской фразы, обозначающей *восстановление и приведение*. Первое слово указывает на правило, по которому одну и ту же величину можно прибавить или вычесть из обеих частей уравнения, а второе указывает на процесс упрощения. Алгебраическая наука проникла к арабам через Мохаммеда-бен-Мусу (Магомет, сын Моисея), известного более под именем Альхуаризми, благодаря его работе, написанной около 830 г. по Р. Х., и несомненно заимствована им от индусов. Алгебра Альхуаризми занимает в высшей степени важное место в истории математики, ибо можно сказать, что последующие арабские и ранние средневековые работы по алгебре основывались на ней и что через нее же ознакомился Запад с арабской или индийской системой десятичной нумерации [1]). Арабы, по-видимому, быстро оценивали работы других,—

---

[1]) *Альхуаризмй* (в IX в.) изложил принцип поместной нумерации и так называемые индусские приемы вычисления в небольшом сочинении, найденном в 1857 г. *B. Boncompagni* в латинском переводе и озаглавленном: „Algorithmi de numero Indorum". Что касается алгебры *Мохаммеда-ибн-Муса*, то в ней не только нет следов „индийской" нумерации, но все изложение чисто *риторическое* без всяких символов, и даже числа выражены в ней словами—прописью. Сочинение это с удивительною верностью воспроизводит, в главных чертах, основные понятия и методы Диофанта и, как доказал уже *Rodet* в 1878 г. (L'algèbre d'Al-Khârismi et les méthodes indienne et grecque. *Journal Asiatique*, Janv. 1878, p. 42), совсем не обнаруживает влияния индусской алгебры, с которой Альхуаризми, может быть, и был совершенно незнаком.

Прим. редактора.

особенно греческих учителей и индусских математиков, — но, подобно древним китайцам и египтянам, они не развивали предмета систематически, в какой-нибудь значительной мере.

Алгебра была введена в Италию в 1202 году Леонардом из Пизы (около 1175—1230 г.г.) в сочинении, основанном на трактате Альхуаризми, а в Англию—Робертом Рекордом (около 1510—1558 г.г.), в книге, озаглавленной *Оселок остроумия*, появившейся в 1557 г. Усовершенствования в методе алгебраических обозначений были сделаны Рекордом, Альбертом Жирардом (1595—1632), Томасом Гарриотом (1560—1621), Декартом и многими другими.

В арифметике мы употребляем *символы числа*. Символ есть всякий знак для количества, который не есть само количество. Когда человек считал своих овец с помощью камешков, эти камешки были как бы символами овец. В настоящее время, когда большинство из нас умеет читать и писать, мы приобрели удобную привычку употреблять знаки на бумаге,—1, 2, 3, 4 и т. д., вместо таких предметов, как камешки. Наше 1+1 сокращается в 2, 2+1 в 3, 3+1 в 4 и т. д. Когда „1", „2", „3" и т. д. употребляются, впрочем несколько неподходяще, для сокращения, например, понятий „1 миля", „2 мили", „3 мили" и т. д., тогда они называются знаками *конкретных* (предметных) чисел. Но когда мы отвергаем всякую идею о том, чтобы под „1“, „2“ и т. д., означающими один, два и т. д., разуметь какую-либо вещь в частности, как это мы делаем, например, когда говорим, „шесть и четыре составляют десять“, тогда числа называются *абстрактными* (отвлеченными) числами. С последними учащийся встречается в трактатах по арифметике с самого начала и не всегда умеет правильно различать оба эти понятия. Из арифметических операций только сложение и вычитание могут производиться над конкретными числами и притом только над состоящими из единиц одного и того же рода. Мили можно прибавлять к милям, или вычитать из миль. Умножение требует рассмотрения нового рода чисел 1, 2, 3 и т. д., означающих *повторение* (*столько-то раз*, как говорят о них). Взять 6 миль 5 раз. Здесь налицо два рода единиц: 1 миля и 1 раз. При умножении один из сомножителей должен выражать число повторений или раз, и говорить об умножении 6 футов на 3 фута было бы нелепо. Какое значение можно придать выражению: 6 футов берутся „3 фута“ раз? Решая такой вопрос: „Если 1 ярд стоит 5 шиллингов, то „сколько стоят 12 ярд“, мы не умножаем *12 ярд* на *5 шиллингов*; процесс, с помощью которого мы приходим к решению, состоит в следующем: Так как каждый ярд стоит 5 шиллингов, то покупатель должен откладывать 5 шиллингов каждый раз, как продавец отмеривает ему один ярд, и столько раз, сколько он это делает; т. е. по 5 шиллингов надо брать 12 раз. Деление мы должны связывать или с идеей повторения, или с идеей *раздробления*, т. е. с идеей разбиения количества на некоторое число равных частей. „Разделить 18 миль на 3 *мили*“—значит найти, сколько *раз* нужно повторить 3 мили, чтобы получить 18 миль: но „разделить 18 миль на 3“ —значит разбить 18 миль на 3 равные части и найти, сколько миль содержит каждая часть.

Символы арифметики находятся между собой в *определенной связи*; например, 4 есть всегда 2+2, независимо от того, какие вещи подразумеваются под этими символами: мили, футы, акры и т. п. В алгебре мы употребляем символы вместо чисел, не находящиеся в определенной связи. Подобно тому, как в арифметике мы выводим заключения относительно 1, 2, 3 и т. п., одинаково справедливые для 1 фута, 2 футов и т. д., или для 1 минуты, 2 минут и т. д., так и в алгебре мы рассуждаем относительно чисел вообще и выводим заключения, одинаково справедливые для всех чисел. Правда, что в той разновидности алгебры, которая появилась в последнее столетие, мы также употребляем, преследуя логические цели, буквы для обозначения вещей другого рода, чем числа — например, для обозначения класса индивидуумов с некоторым определенным свойством, как „рогатые животные“, или известных геометрических, либо физических вещей с направлением в пространстве, как, например, „силы“. В этих случаях мы употребляем также знаки „+“ и „—“, чтобы обозначить способы соединения таких вещей, сходные, но не тождественные со сложением и вычитанием. Если „a“ обозначает „класс рогатых животных“, а b — „класс вьючного скота“, то знак ab употребляется для обозначения „класса вьючного рогатого скота“. Мы увидим, что здесь, как и при умножении чисел, $ab=ba$, и, отчасти по этой причине, предыдущая операция была названа „логическим умножением“ и стала обозначаться, как указано выше. Здесь мы встречаемся с обычаем математиков, и вообще всех людей науки, употреблять слова в более широком смысле ради какой-нибудь аналогии. Это обыкновение в высшей степени затрудняет многих людей по той причине, что математики часто бессознательно пользуются таким приемом или даже говорят иногда так, как будто думают, что обобщают не слова, а *понятия*. Но когда мы говорим о „семейном дереве“, мы не имеем в виду расширения понятия о деревьях у дороги.

Нам нет необходимости рассматривать эти разновидности новейшей алгебры, но мы будем постоянно встречаться с тем, что называется „обобщением числа“ и с переносом методов на аналогичные случаи. Действительно, едвали будет преувеличением сказать, что в этом лежит истинный дух открытия. Примером этого может служить расширение слова „числа“ так, чтобы оно обнимало в себе также и название *дроби*. Поводом для такого расширения послужило применение арифметики для выражения таких величин, как расстояния. Так поступал Архимед и многие другие; он делается обычным методом в работах математиков шестнадцатого века и играет большую роль в работе Декарта.

С тех пор, как математики стали применять арифметику к геометрии, они ясно поняли удобство представления точек на прямой с помощью чисел и чисел с помощью точек на прямой. Что понимать под этим, можно описать таким образом. Если мы выберем единицу длины, то мы можем отметить на прямой точки, соответствующие 0 единиц, — это значит, что мы выбрали некоторую исходную точку, называемую „началом“,—1 единице, 2 единицам, 3 единицам и т. д. таким образом, чтобы „точка m“, как мы будем ее кратко называть, отстояла на расстоянии m единиц от начала. Тогда мы можем разделить прямую и отметить точки, соответствующие дробям $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{5}{3}$, или же точки между 1 и 2, отстоящие от 1 на таком же расстоянии, как $\frac{2}{3}$ от 0 и т. д. Заметим теперь, что здесь нет ничего, что заставляло бы отличать дроби от чисел. Те и другие объекты рассматриваются вполне одинаковым образом; результаты сложения, вычитания, умножения и деления[1]) интерпретируются очень сходным образом, как новые точки, независимо от того, стоят ли „a“ и „b“ в выражениях „$a+b$“, „$a-b$“, „ab“ и т. д. вместо чисел или дробей, причем мы всегда, например, имеем:

$$a+b=b+a, \quad ab=ba, \quad a(b+c)=ab+ac.$$

По причине этого весьма сильного сходства, математики назвали „числами“ и дроби. Они часто говорят и пишут об „обобщении понятия

---

[1]) Операция, называемая по аналогии „умножением дробей“, определяется указанным в следующем примере образом. Если $\frac{3}{4}$ ярд стоят 10 пенсов, сколько должны стоить $\frac{7}{8}$ ярда? Ответ $\frac{10\times4\times7}{3\times8}$ пенса и мы определяем $\frac{4\times7}{3\times8}$ как $\frac{1}{\frac{3}{4}}$, „умноженная на“ $\frac{7}{8}$ по аналогии с тем, что должно было бы быть, если бы вместо $\frac{3}{4}$ была 1, а вместо $\frac{7}{8}$ было, скажем, 3.

числа", первый пример которого дан здесь так, как будто бы обобщалось само понятие, а не только *название* „число", в силу большой, тесной и важной аналогии. Как только числа стали изображаться точками прямой, повидимому, исчезло затруднение в дальнейшем допущении известных „иррациональных чисел", соответствующих конечным точкам несоизмеримых линий, открытых греками. Этот вопрос мы снова рассмотрим по той причине, что здесь необходим разбор заключающегося в нем принципа, а математики вплоть до новейшего времени не входили в достаточно глубокое рассмотрение принципиальных вопросов. В результате этого математики, приблизительно до последних шестидесяти лет, совсем плохо рассуждали, как это заметил Свифт, говоря в *Путешествиях Гуливера* о математиках Лапуты, и непростительно туманно представляли себе основные принципы науки. Часто они опирались на некоторого рода веру. Один выдающийся математик восемнадцатого столетия сказал интеллигентному, и в силу этого, сомневавшемуся начинающему ученому: „Продолжайте, и вера придет к вам". Это очень любопытный факт, что математики так часто приходили к истине, руководясь некоторого рода инстинктом.

Теперь вернемся к нашей численной алгебре.

Возьмем, например, число 8 и дробь $\frac{1}{8}$, которую мы теперь будем также называть „числом“, прибавим по 1 к обоим; большее из полученных чисел содержит меньшее точно 8 раз. Оказывается, что этим свойством обладает *всякое* число, а не только 8. В самом деле, если обозначить исходное число через „a“, то получим по правилам алгебры $\frac{a+1}{\frac{1}{a}+1}=a$. Это — пример общего свойства чисел, доказанного посредством алгебры.

Алгебра содержит много правил, при помощи которых сложное алгебраическое выражение может быть приведено к его простейшей форме. Благодаря понятной и связной системе обозначений, мы можем легко приобрести почти механическую ловкость в обращении с алгебраическими символами. Это имеет в виду Декарт, когда говорит, что алгебра не есть наука, способная совершенствовать ум. С другой стороны, это искусство обязано своим возникновением принципу экономии мысли, и, как предвидел Декарт, его механический облик приобрел для нас большую ценность, когда мы сообразим, что им можно пользоваться для решения геометрических задач, без необходимости утомлять наше воображение длинными рассуждениями над геометрическими фигурами.

Я уже упомянул о том, что ценное обозначение „x^m“ было введено Декартом. Оно встречается, вместе со всеми другими его усовершенствованиями в алгебре, в третьей части его *Геометрии*, опубликованной в 1637 году. В ближайшей главе я буду говорить о великом открытии, содержащемся в первых двух частях его книги; здесь я подведу итоги улучшениям в обозначениях и методе, введенным Декартом и его предшественниками, которые делают алгебраическую часть *Геометрии* очень похожей на современную книгу по алгебре.

Мы и до сих пор еще имеем обыкновение в арифметике обозначать сложение при помощи расположения рядом символов слагаемых; так, „$2^1/_2$“ означает „$2+{}^1/_2$“. В алгебре мы теперь всегда обозначаем сложение знаком „$+$“, а умножение расположением рядом символов сомножителей, или, более редко, ставя точку или знак „$\times$“ между этими символами. Вычитание обозначается знаком „$-$“.

Здесь мы должны уклониться в сторону, чтобы окончательно установить тот факт, что, если „a“ и „b“ обозначают числа, то „$a-b$“ может только тогда представлять из себя число, когда „a“ равно или больше „b“; это часто, благодаря смешению понятий, отрицалось в учебниках. Если a равно b, то указанное число есть нуль; нет, в самом деле, основательных причин, чтобы отрицать, что числа нелепых изречений и умных дел Карла II-го равны, если справедлива хорошо известная эпитафия. Тут снова мы наблюдаем странный путь, по которому шло развитие математики. Математики целые столетия пользовались „отрицательными" и „положительными" числами и отождествляли „положительные" числа с числами без знака, как 1, 2 и 3, не сомневаясь в законности этого, подобно тому, как они пользовались дробными и иррациональными „числами". И когда люди с логическим направлением ума возражали против этих неправильных утверждений, математики просто игнорировали их или говорили: „Продолжайте, и вера прийдет к вам". И математики были правы, но не могли дать правильных оснований того, что они делали, — по крайней мере, доводы, которые приводились ими, были всегда неправильны. Мы опять-таки сталкиваемся с тем фактом, что критика деятельности математиков должна быть насквозь проникнута сочувствием и пониманием, если желает принести пользу. Она должна пытаться обнаруживать правильность математических взглядов и приводить их в соответствие с логикой. Сами математики никогда не находили компетентного философа-истолкователя, и таким образом почти вся интереснейшая часть математики оставалась в темноте до того времени, когда, во второй половине девятнадцатого столетия, математики сами начали развивать философию—или скорее логику.

Итак, мы должны отступить от исторического порядка изложения для выяснения понятия об „отрицательных числах". Прежде всего, мы должны заметить, что когда алгебраическое выражение заключено в скобки, это означает, что весь результат этого выражения находится в такой же зависимости к окружающим его символам, как еслибы это выражение было представлено только одной буквой. Так, например, выражение „$a-(b-c)$" означает, что мы должны из a вычесть $b-c$ или же то, что останется после вычитания c из b. Это не есть, следовательно, то же самое, что $a-b-c$. И действительно, мы легко находим, что $a-(b-c)$ то же, что и $a-b+c$. Заметим также, что выражение „$(a+b)(c+d)$" обозначает $(a+b)$, умноженное на $(c+d)$.

Теперь предположим, что a и b числа и что a больше, чем b. Пусть $a-b$ есть c. Для того, чтобы получить c из a, мы производим операцию вычитания b. *Эта операция, являющаяся вы-*

полнением требования: „Вычесть b“, и есть отрицательное число“. Математики называют ее „числом“ и обозначают через „$-b$“ просто по аналогии: те же самые правила вычисления, какие существуют для наших чисел без знака, сохраняются для „отрицательных чисел“ и для „положительных чисел“, подобных „$+b$“, значение которых теперь достаточно ясно, когда понятия „сложения“, „вычитания“ и т. д. соответственно определены для этих операций. Путь, по которому должно идти это переопределение, становится очевидным, когда мы представляем целые, дробные, положительные и отрицательные числа при помощи точек на прямой линии. Справа от 0 лежат целые и дробные числа, слева от 0—отрицательные числа, а вправо от 0 простирается ряд положительных чисел, $+a$, совпадающих с a и симметрично расположенных с $-a$ относительно 0. Мы заключаем также, что эти операции, которые мы назвали „сложением“ и т. д. этих новых „чисел“ *должны привести к тем же результатам*, что и первоначальные операции того же названия. Таким образом, один и тот же символ употребляется в различных смыслах, и мы пишем:

$$a+b-b=a+0=(+a)+(+b)+(-b)=+a=a.$$

Это—замечательный ряд быстрых перемен.

Мы употребили знак равенства, „$=$“. Он означает первоначально „есть то же самое, что и". Так, например, $3+1=4$. Но мы пишем, согласно сделанному выше условию, „$a=+a$" и таким образом жертвуем точностью, которая иногда кажется немного педантичной, ради удержания в виду нашей аналогии и ради краткости.

Будем помнить об этой, на первый взгляд приводящей в недоумение, но при ближайшем рассмотрении находящей оправдание, особенности математических приемов. Это всегда ставит втупик интеллигентных людей, начинающих изучать науку, и философов. Законы вычисления и подходящий символизм суть *те* вещи, о которых математик помышляет и к которым стремится. Он, повидимому, отождествляет различные вещи, если они удовлетворяют одинаковым законам, важным для него, подобно тому, как судебный чиновник может думать, что нет большой разницы между медником A, имеющим рыжие волосы и католиком, и между лошадиным барышником B, шатеном и протестантом, если оба они были уличены в мелком воровстве. Но их пастыри или их жены все еще способны отличить их друг от друга.

Два какие-нибудь выражения, связанные знаком равенства, составляют „уравнение". Здесь мы должны заметить, что слова: „Решить ур-ие $x^2+ax=b$" выражают требование найти такое значение или такие значения x, чтобы, если a и b суть данные числа, x^2+ax было бы равно b. Так если $a=2$ и $b=-1$, то решение есть $x=-1$.

Как мы видели выше, Декарт установил обычай обозначать начальными буквами алфавита известные количества, а последними буквами неизвестные. Так, в указанном выше примере, a и b суть некоторые числа, предполагаемые данными, тогда как x искомое. Вопрос решен тогда, когда x выражен с помощью a и b и определенных чисел (как 1, 2, 3); таким образом, когда a и b даны какие-либо определенные значения, x становится определенным. В обозначении знаками „a" и „b" есть некоторая неопределенность, тогда как „2" дает определенное число. В обозначении же „x" не всегда есть неопределенность, если значения для a и b выбраны. Так, в приведенном случае, когда $a=2$, $b=-1$, „x" обозначает собою одно определенное отрицательное число -1. Смысл этого такой: в каждом частном случае класса задач, полученном посредством придания a и b определенных значений, независимых друг от друга, есть неизвестное x, которое может обозначать, а может и не обозначать, различные числа, делающиеся известными лишь после разрешения уравнения. Рассмотрим теперь уравнение $ax+by=c$, где a, b и c известные количества, а x и y неизвестные.

Мы можем выразить x посредством a, b, c и y, или же y, посредством a, b, c и x; но x только тогда имеет определенное значение, когда его имеет y, или же y определен, когда x определен. Здесь, при каждом задании значений a, b, и c, x остается неопределенным и „переменным", т. е. он может принять любое значение из всего класса.

Соответственно каждому значению x, y принимает одно значение; y также есть „переменное", зависящее от „независимого переменного" x. Понятие „переменности" будет еще иллюстрировано в ближайшей главе; теперь мы только укажем на то, как здесь появляется понятие того, что математики называют „функциональной зависимостью" y от x.

Переменная y называется „функцией" переменной x, если каждому значению x соответствует одно или более значений y.

Это словоупотребление в известной мере принято и в обыкновенном языке. Нас поймут, если мы скажем, что размер произведенной лошадью работы есть функция съедаемой ею пищи.

Декарт также принял обыкновение—если он сам и не пришел к этому независимо,—рекомендованное Гарриотом перенесение всех членов уравнения в одну сторону от знака равенства. Так, вместо „$x=1$“, „$ax+b=c$“ и $3x^2+g=bx$“, мы пишем соответственно: „$x-1=0$“, „$a \quad (b-c)=0$“ и $3x^2-bx+g=0$“. Значение этого обыкновения состоит в том, что при нем все уравнения одной и той же степени относительно неизвестного—случай большего, чем один, числа неизвестных мы будем рассматривать в ближайшей главе,—т. е. уравнения, в которых высшая степень неизвестного x одна и та же (x, или x^2, или $x^3, \cdots$), легко узнаются. Далее, удобно иметь возможность говорить о выражении, приравненном 0, так же, как об уравнении. Уравнения, в которых есть x^2 и нет более высоких степеней x, называются „квадратными“—результат приравнивания 0 функции второй степени; уравнения, в которых нет степени высшей, чем x^3, называются „кубическими“, и т. д. для уравнений „четвертой, пятой,...“ степеней. Квадратные уравнения: $3x^2+g=0$, $ax^2+bx+c=0$, $x^2-1=0$, например, различны, но эти различия не существенны по сравнению с их общими свойствами, вытекающими из одинаковости их степеней: все они могут быть решены посредством соответствующих видоизменений одного и того же общего метода.

Здесь опять уместно отступить от исторического порядка изложения и вкратце рассмотреть значение так называемых „мнимых“ выражений.

Если нам дано уравнение $x^2-1=0$, то его решения очевидно суть $x=+1$ или $x=-1$, т. к. квадратные корни из $+1$ суть $+1$ и -1. Но если нам дано уравнение $x^2+1=0$, то, по аналогии, мы могли бы написать его решения в виде $x=+\sqrt{-1}$ и $x=-\sqrt{-1}$. Но среди попадавшихся уже нам нет ни положительного, ни отрицательного „числа", которое, будучи умноженным само на себя, давало бы отрицательное „число". Благодаря этому Декарт и его последователи отвергали „мнимые числа". Таким образом, $x^2-1=0$ имело два решения, а $x^2+1=0$—ни одного; далее, $x^3+x^2+x+1=0$ имело одно решение $(x=-1)$, тогда как $x^3-x^2-x+1=0$ имело их два ($x=1$, $x=-1$), а уравнение $x^3-2x^2-x+2=0$ — три ($x=1$, $x=-1$, $x=2$). Теперь предположим, на один момент, что мы можем допустить „мнимые" корни и что $(\sqrt{-1}).(\sqrt{-1})=-1$, а также, что мы можем говорить о *двух* корнях, когда корни тождественны в случае, подобном уравнению $x^2+2x+1=0$ или $(x^2+1)^2=0$, в которых есть два одинаковых корня $x=-1$. Тогда, из пяти приведенных выше уравнений, первые два квадратных имеют каждое по два корня ($+1, -1$ и $+\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, соответственно), а каждое из трех кубичных—по три корня ($-1, +\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$; $+1, -1, +1$; и $+1, -1, +2$, соответственно). Для общего случая доказана теорема о том, что каждое уравнение имеет столько корней, сколько единиц содержится в его степени (а не только „не более, чем“, как говорил Декарт). По этой причине и по многим другим подобным, для того, чтобы иметь возможность устанавливать теоремы в более общем виде, „мнимые числа“ вошли почти во всеобщее употребление. Это оказалось плодотворным и притом весьма удивительным образом: истинность некоторых теорем может быть открыта с помощью вычислений над мнимыми количествами. Этот случай сходен с тем, который заставил математиков ввести в вычисления „отрицательные числа“.

В случае мнимых чисел, пусть a, b, c и d будут любыми числами. Тогда

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=$$

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=$$

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=$$

$$[(ac-bd)+\sqrt{-1}(ad+bc)][(ac-bd)-\sqrt{-1}(ad+bc)]=$$

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Таким образом, мы получаем интересную теорему, справедливость которой легко проверить при помощи вычисления с мнимыми числами, причем последние исчезают в окончательном выводе. Ввиду этого математики думали, что мнимые числа *должны* иметь некоторое логическое основание, хотя они, повидимому, не могут быть интерпретируемы и даже сами по себе противоречивы. Таким образом, ими стали пользоваться, опираясь на некоторого рода веру, которая была почти твердой и которая оправдалась лишь много позже. Математики выразили свою возрастающую уверенность в употреблении $\sqrt{-1}$ тем, что писали „i“ вместо $\sqrt{-1}$ и назвали этот символ „комплексной единицей“, отрицая, таким образом, неявно утверждение того, что здесь есть нечто на самом деле мнимое, невозможное или нелепое.

Истина состоит в том, что „i“ можно интерпретировать. Этот знак, подобно отрицательным числам, изображает операцию, но несколько иного рода. Его также можно интерпретировать геометрически, хотя не на прямой линии, а на плоскости. Желающих познакомиться с этим мы отсылаем к отделу библиографии. Но тут мы должны указать на то, что при таком „обобщении понятия числа“ слова „сложение“, „вычитание“ и т. д. имеют хотя и сходный, но не в точности тот же смысл, который мы придавали им раньше, и что „комплексные числа“ образуют область, подобную плоскости, в которой содержится прямая, изображающая целые, дробные и иррациональные числа. Но мы принуждены оставить дальнейшее развитие этих вопросов.

Нужно совершенно выяснить себе то, что сущность алгебры заключается в ее общности. В самом общем случае каждый символ и каждое утверждение алгебраического предложения может быть интерпретировано в терминах известных операций над отвлеченными вещами, каковы, например, числа, классы, или предложения. Эти операции выражают лишь соотношения между этими вещами.

Если на каком-нибудь этапе алгебраического процесса результаты его можно истолковать,—и такое истолкование часто подсказывается символизмом,—например, не как операции над операциями с целыми числами, а как другие операции непосредственно над целыми числами, то эти результаты выражают истинные теоремы.

Так $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ выражает, например, соотношение между теми операциями над целыми числами, которым (т. е. операциям) мы придаем название „дробных чисел", а также аналогичное соотношение между целыми числами. Язык алгебры есть удивительное орудие для короткого, ясного и понятного выражения чрезвычайно сложных соотношений между отвлеченными вещами. Побудительной причиной для изучения таких соотношений первоначально была, и все еще бывает во многих случаях, тесная аналогия, существующая между соотношениями известных отвлеченных вещей и соотношениями между известными вещами, которые мы видим, слышим и осязаем в мире действительности вокруг нас. В открытии таких аналогий нашему разуму помогла прекрасная картина алгебраических процессов, созданная в пространстве двух и трех измерений с помощью „аналитической геометрии" Декарта, которую мы опишем в следующей главе.

ГЛАВА III

Возникновение и развитие современной математики — аналитическая геометрия и метод неделимых

Вернемся теперь к рассмотрению первых двух отделов книги Декарта *Геометрия*, изданной в 1637 году.

Рассматривая книгу Декарта, нам приходится выбирать, здесь и там, известные места, в которых теперь мы видим существенные пункты его новой методы изучения геометрических вопросов. Эти пункты не были явно формулированы им. Однако, я попытаюсь изложить их в сжатом виде.

Вообразим кривую, начерченную на плоскости. Эту кривую можно рассматривать, как *изображение* некоторого алгебраического уравнения, содержащего в себе x и y, следующим образом. Выберем какую-нибудь точку на кривой и назовем через

„x“ и „y“ числа, выражающие перпендикулярные расстояния этой точки, измеренные при помощи некоторой единицы длины, от двух прямых линий (называемых „осями“), проведенных под прямым углом друг к другу на упомянутой плоскости. Если теперь мы будем двигаться по кривой от точки к точке, то x и y оба будут изменяться; *но здесь есть некоторое неизменяющееся соотношение, связывающее x и y, и это соотношение может быть выражено в виде алгебраического уравнения, называемого „уравнением кривой“ и содержащего, так сказать, в зародыше все свойства рассматриваемой кривой.* Такое постоянное соотношение между x и y подобно, например, соотношению $y^2=4ax$. Нужно тщательно отличать постоянное соотношение между переменными от соотношения между постоянными. Мы всегда встречаемся в математике с соотношениями первого рода; мы называем такое соотношение „функцией“ x и y—слово, употребленное впервые Лейбницем приблизительно через пятьдесят лет после появления *Геометрии* Декарта, — и обозначаем функцию x и y в общем виде, как „$f(x, y)$“. При таком обозначении нет никакого указания на особую природу соотношения между x и y. Относительно частной функции, как, например, $y^2 - 4ax$, мы говорим, что тут „*вид* функции постоянный“, и это есть другой способ выражения того, что соотношение между x и y установлено. Это можно объяснить также следующим образом. Если x фиксирован (т. е. получил частное значение), то благодаря этому фиксируется одно или более значений y, и если y фиксирован, то этим фиксируется одно или более значений x. Например, уравнение $ax+by+c=0$ дает одно значение y для каждого x и одно x для каждого y; уравнение $y^2-4ax=0$ дает два значения y для каждого x и одно x для каждого y[1]).

Рассмотрим уравнение $ax+by+c=0$ или, скажем, более определенный пример: $x+2y-2=0$. Проведем оси и отметим точки: выбрав определенную единицу длины, найдем точку $x=1$ на оси x-ов; на перпендикуляре к этой оси отметим отрезок, длину которого получим, если подставим в данное ур-ие $x=1$. Мы находим $y=\frac{1}{2}$. Возьмем $x=\frac{1}{3}$, тогда $y=\frac{5}{6}$ и т. д. Мы найдем, что

[1]) Можно также обозначать функцию от x через „$f(x)$", „$F(x)$" или „$G(x)$" и т. п. Здесь „f"—знак, стоящий вместо слов „функция от", а не вместо числа, подобно тому, как мы встретим впоследствии знаки „*Sin*", „Δ" и „d", стоящие вместо функций, а не вместо чисел. Это можно рассматривать, как расширение языка первоначальной алгебры. Уравнение $y=f(x)$ особенно пригодно для графического представления функций посредством приема, который выяснен ниже.

все полученные точки на параллелях к оси y лежат на одной прямой. Эта прямая линия определяется уравнением $x+2y-2=0$; каждая точка вне этой прямой такова, что соответствующие ей x и y не связаны между собой соотношением $x+2y-2=0$, а каждая точка, принадлежащая прямой, такова, что ее x и y связаны соотношением $x+2y-2=0$. Подобным образом мы можем удостовериться в том, что каждая точка окружности круга с радиусом в c единиц длины и описанной из точки пересечения осей, как из центра, обладает тем свойством, что для нее $x^2+y^2=c^2$, а x и y каждой точки, не лежащей на этой окружности, не удовлетворяют постоянному соотношению $x^2+y^2=c^2$.

В установленных выше общих положениях нужно отметить два пункта. Во-первых, я сказал, что кривая „может быть выражена" и т. д. Под этим я разумею, что возможно,—но не всегда, выразить свойства кривой таким образом. Мы можем вообразить себе кривые, которые не могут быть представлены конечным алгебраическим уравнением. Второе замечание касается основных прямых, от которых производился отсчет,—так называемых „осей". Одну из этих осей мы назвали „осью x-ов"; расстояние, измеряемое числом x, часто называется „абсциссой", отрезок же, длиною в y единиц, перпендикулярный к оси x-ов и восставленный в конце абсциссы, наиболее удаленном от начала, и, следовательно, параллельный другой оси („оси y-ов"), называется „ординатой". Название „ордината" употреблялось древне-римскими землемерами. Отрезки, измеряемые числами x и y, называются „координатами" определяющей их и, в свою очередь, определяемой ими точки. Иногда сами числа x и y называются „координатами", и мы так и будем здесь выражаться.

Иногда оси выбираются не под прямым углом друг к другу, но почти всегда гораздо проще выбирать их так, и в этой книге мы всегда будем предполагать оси прямоугольными. Вся плоскость делится осями на четыре части. Координаты отсчитываются от точки пересечения осей, так называемого начала. Геометрическое истолкование „отрицательных количеств алгебры",— которые кажутся столь затруднительными для интеллигентного человека, приступающего к алгебре, — поможет нам избежать неясности, происходящей от того, что здесь, в каждой четверти, на которые делится плоскость, была бы точка с одинаковыми координатами.

Рассмотрим ось x-ов. Будем откладывать на ней длины от начала так, чтобы началу (O) соответствовало число 0. Пусть OA, считая слева направо вдоль оси, есть единица длины; тогда точке A соответствует число 1. Пусть, затем, длины AB, BC и т. д., считая их все слева направо, равны по длине OA; точкам B, C и т. д. соответствуют числа 2, 3 и т. д. Пусть, далее, точке, делящей пополам OA, отвечает дробь $\frac{1}{2}$, и так далее для других дробей. Таким путем, правая половина (считая от начала) оси x почти заполнена точками. Но есть еще точки, такие, как точка P, где OP есть окружность круга с диаметром единица. Для большей картинности мы можем представить, что точка P получена катанием круга вдоль оси x-ов от точки O. По совершении им одного оборота точка P окажется немного слева от точки $3\frac{1}{7}$ и немного справа от точки $3\frac{7}{50}$ и т. д.; точка P не принадлежит к числу таких точек, которым могут быть приписаны имена дробей посредством процесса, указанного выше. Это можно доказать вполне строго. Еслибы это не было справедливо, то можно было бы очень легко осуществить „квадратуру круга".

Есть много точек такого рода. Нет дроби, которая, умноженная сама на себя, дала бы 2; но есть длина,—диагональ квадрата со стороной единица, — которая такова, что, *еслибы мы предположили, что некоторое число соответствует* *каждой точке на прямой OX*, то это должно было бы быть такое число a, чтобы $a^2=2$. Мы вернемся еще к этому важному вопросу о соответствии точек и линий числам, а теперь вкратце напомним, что „отрицательные числа" представляются в аналитической геометрии Декарта на оси x-ов точками, лежащими слева от начала, и на оси y-ов точками, лежащими ниже начала. Это было объяснено во второй главе.

Алгебраическая геометрия дала нам средство для классификации кривых. Все прямые линии определяют уравнения первой степени между x и y, и все такие уравнения определяют прямые линии; все уравнения второй степени относительно x и y, т. е. уравнения вида:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

определяют кривые, изученные древними греками и получаемые пересечением плоскостью кругового конуса или двух одинаковых конусов с одной и той же осью, которые имеют только одну общую точку, образованную их вершинами. Несколько таинственными представляются основания, благодаря которым греческие геометры выбрали для изучения эти частные кривые. С нынешней точки зрения мы можем только сказать, что это была, повидимому, чрезвычайно счастливая случайность. Ибо эти конические сечения,— частным случаем которых является, конечно, круг,—суть все те и только те кривые, которые представляются указанным выше уравнением второй степени. Три большие группы кривых,—„парабола“, „эллипс“ и „гипербола“—все получаются из этого уравнения, когда коэффициенты a, b, c, d, e, f удовлетворяют некоторым специальным условиям. Так, например, уравнение круга, который есть частный случай эллипса, всегда имеет форму, получаемую из верхнего уравнения при $b=0$ и $c=a$.

Можно упомянуть о том, что спустя долгое время после того как эти кривые были введены, как конические сечения, Папп указал на то, что все они могут быть определены на плоскости, как места некоторой точки P, двигающейся так, что сохраняется постоянным отношение расстояния P от некоторой постоянной точки (S) к перпендикулярному расстоянию (PN) точки P от некоторой постоянной прямой линии. Эта кривая есть соответственно эллипс, парабола или гипербола, смотря по тому, будет ли это отношение меньше, равно или больше единицы.

Здесь не следует ожидать подробных указаний относительно кривых, которые получаются при изучении уравнений второй или высших степеней между x и y. Я только хочу снова подчеркнуть некоторые пункты, на которые учебники обычно не обращают внимания или неясно устанавливают их. Буквы „a, b, ... x, y“

обозначают здесь „числа“ в расширенном смысле. Мы видели, в каком смысле мы можем, вместе с математиками, говорить о дробных, положительных и отрицательных „числах“ и отождествлять, скажем, положительное число $+2$ и дробь $\frac{2}{1}$ с лишенным знака целым числом 2. Стало быть, рассмотренные буквы стоят вместо чисел того класса, который в этом смысле содержит дробные, иррациональные, положительные и отрицательные числа, но не содержит мнимых чисел. Мы называем числа этого класса „вещественными“ числами. Вопрос об иррациональных числах будет разобран более подробно в шестой главе, но было уже достаточно сказано для того, чтобы показать, как они были введены. В математике всегда, как я думаю, случалось так, что понятия начинали употребляться задолго до их формального введения, и после этого ими продолжали долго пользоваться, не имея еще на то логического оправдания и не представляя себе еще ясно их природы. История математики есть история веры, оправдание которой надолго затягивалось и, может быть, не завершено еще и теперь.

Эти числа суть измерения длины в определенных единицах, подобных дюйму, абсцисс и ординат некоторых точек. Мы говорим о таких точках, просто называя их координаты, и выражаемся, например, так, что „расстояние точки (x, y) от точки (a, b) есть положительный квадратный корень из $(x-a)^2+(y-b)^2$".

Заметим, что, например, x^2 есть длина некоторой *линии*. Естественно, как это делали алгебраисты до Декарта, ставить x^2 *первоначально*, вместо числа квадратных единиц, содержащихся в том квадрате, сторона которого имеет x единиц длины, но в этом нет никакой необходимости. Мы будем часто пользоваться последним родом измерения в четвертой и пятой главах.

Уравнение прямой линии можно заставить удовлетворять двум данным условиям. Мы можем написать уравнение в форме

$$x+\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}=0$$

и получим, таким образом, два отношения, $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$, которые можно определить согласно условиям. Уравнение $ax+by+c=0$ содержит, по-видимому, *три* „произвольных постоянных", как их называют, но мы видим, что эта бо́льшая общность только кажущаяся. Теперь мы можем так определить эти постоянные, чтобы для рассматриваемой прямой линии выполнялись два условия. Итак, предположим, что одно из этих условий заключается в том, что прямая линия должна проходить через начало—точку (0,0). Это просто означает, что, при $x=0$ и $y=0$. Тогда, положив в уравнении $x=0$ и $y=0$, мы получим $\frac{c}{a}=0$, и, таким образом, одна из постоянных определена. Другая определяется новым условием, скажем, тем, что прямая проходит через точку $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$. Подставляя тогда эти числа в уравнение, мы получим, зная уже, что $\frac{c}{a}=0$, $\frac{1}{3}+\frac{2b}{a}=0$, откуда $\frac{b}{a}=\frac{1}{6}$. Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точки (0,0) и $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$, есть $x-\frac{1}{6}y=0$, или $y-6x=0$. Вместо того, чтобы линия проходила через определенную точку, можно поставить условием, например, чтобы перпендикуляр, опущенный из начала на прямую, имел определенную длину, или чтобы прямая образовывала определенный угол с осью x-ов и т. д.

Подобным образом круг, уравнение которого пишется в форме

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2,$$

имеет радиус c и центр (a, b). Он может быть определен, как проходящий через какие-нибудь *три* точки или, скажем, как имеющий определенную длину радиуса и положение центра. Закрепление центра равносильно заданию двух условий. Так, например, предположим, что радиус должен быть равен единице; тогда рассматриваемое уравнение есть $(x-a)^2+(y-b)^2=1$. Если при этом центр круга находится в начале, то a и b оба должны быть нулями; этого же расположения круга мы можем достичь также и тем, что потребуем, например, чтобы круг проходил через точки $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Теперь, если мы ищем точки пересечения прямой линии $2x+2y=1$ с кругом $x^2+y^2=1$, то мы стараемся найти те точки, которые являются общими для обеих кривых, т. е. все те пары значений x и y, которые удовлетворяют *обоим* указанным выше уравнениям. Таким образом, нам нет нужды справляться с геометрическим чертежом, но мы должны только применить правила алгебры для отыскания значений x и y, удовлетворяющих двум „совокупным" уравнениям между x и y. В нашем случае, если (X, Y) есть точка пересечения, мы имеем $Y=\frac{1-2X}{2}$ и, следовательно, подставляя это в другое уравнение, $X^2+\left(\frac{1-2X}{2}\right)^2=1$. Это дает квадратное уравнение

$$8X^2-4X-3=0$$

относительно x, и по правилам алгебры мы находим, что x должен быть либо $\frac{1}{4}(1+\sqrt{7})$, либо $\frac{1}{4}(1-\sqrt{7})$. Поэтому здесь имеются *два* значения абсциссы, которые получаются, когда мы спрашиваем, каковы координаты точек пересечения; значения y, соответствующие каждому из x-ов, получатся путем подстановки найденных значений x в уравнение $2x+2y=1$.

Таким образом, мы снова получаем вывод, непосредственно усматриваемый из чертежа, что прямая линия пересекает круг по большей мере в двух точках. Мы можем определить точки пересечения двух любых кривых, уравнения которых могут быть выражены алгебраически, но само собою разумеется, что этот процесс в более общих случаях значительно сложнее. Здесь мы рассмотрим еще один важный случай пересечения прямой линии.

Представим себе прямую линию, пересекающую некоторый круг в двух точках. Вообразим одну точку закрепленной, а другую точку движущейся по направлению к первой. Секущая все больше и больше приближается к положению касательной к кругу в первой точке и, заставляя движущуюся точку приблизиться достаточно близко к другой (закрепленной) точке, мы заставим секущую принять положение, сколь угодно близкое к положению касательной. Греки определяли касательную к кривой в некоторой ее точке, как прямую, проходящую через эту точку так, что между ней и кривой не может быть проведена никакая другая *прямая линия*[1]). Заметим что другие *кривые* провести

1) Такого определения у греческих геометров нет. Евклид определяет касательную так: „Говорят, что прямая касается круга, если она имеет с ним общую точку и при продолжении не встречает его более".

Аполлоний в XVIII предложении I книги о конических сечениях устанавливает теорему о том, что секущая, параллельная касательной к коническому сечению, имеет с последним либо две общие точки, либо ни одной, не давая, однако, определения касательной и не называя ее этим именем,—а рассматривая ее, как прямую, имеющую с коническим сечением одну общую точку, а прочими своими частями лежащую вне конического сечения. В XXVIII предложении он повторяет то же свойство секущей по отношению ко второй ветви гиперболы, но тут уже явно называет касательную. Отсюда можно заключить, что касательная должна определяться согласно предложению XVIII. В XXXII предложении он *доказывает* то свойство касательной, которое приведено в тексте в качестве определения.

У Архимеда, в книге о спиральных линиях определения касательной также не дано; понятие о касательной вытекает из предложения XIII и по существу совпадает с тем, которое приведено у Аполлония.

Такое определение касательной годилось только для линий, не имеющих перегиба. Если перегиба нет, то каможно: так, например, различные круги могут иметь одну и ту же касательную в общей точке на их огибающей, но никакой круг и никакая кривая из встречающихся в элементарной математике не имеет больше, чем одну касательную в любой точке. Декарт и многие из его последователей приняли другие формы определения касательной, которые, в сущности, заключают в себе идею о *пределе*, идею, которая является основной в исчислении бесконечно-малых. Касательная есть *предел* секущей, когда точки пересечения приближаются бесконечно близко одна к другой; она есть продолженная сторона многоугольника с бесконечно-малыми сторонами, каковым многоугольником представляется кривая; это есть направление движения точки в некоторый момент, движущейся по рассматриваемой кривой. Уравнение, полученное из уравнения кривой, когда вместо y подставить его выражение через x из уравнения пересекающей прямой линии, имеет, если эта прямая есть касательная, два равные корня. В приведенном выше случае

сательная к этой линии 1) имеет одну общую точку с ней и 2) прочими своими точками кривая расположена по одну сторону от касательной. При этом, конечно, кривая должна быть соответствующим образом ограничена (у Архимеда берется один оборот спирали).

Примечание редактора.

это уравнение—квадратное. В случае круга можно легко вывести отсюда хорошо известное свойство касательной, в силу которого она перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Мы должны вспомнить, что подобно тому, как *плоские* кривые определяют и сами, в свою очередь, определяются уравнениями с *двумя* переменными x и y, так и поверхности,—например сферы,—в пространстве трех измерений определяют и, в свою очередь, определяются уравнениями с *тремя* переменными x, y и z. Здесь x, y и z суть координаты точки пространства, т. е. числовые меры расстояний этой точки от трех определенных взаимно-перпендикулярных плоскостей. Так, например, уравнение сферы радиуса d с центром (a, b, c) есть $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2$.

Мы можем смотреть на аналитическую геометрию с другой точки зрения, которая окажется для нас важной впоследствии и которая даже теперь внушит нам некоторые интересные мысли. Существо Декартова метода обнаруживается также и тогда, когда мы с его помощью представляем *места*. Рассмотрим круг; он есть место точки (P), движущейся в плоскости так, что расстояние этой точки от некоторой неподвижной точки (O) остается постоянным. Здесь мы можем представить себе точку P, как изменяющую свое положение и составить себе очень ясную картину того, что мы называем в математике *переменной*. Однако, мы должны помнить, что то, что мы называем ради картинности „переменной“ мы не должны обязательно представлять себе, как нечто изменяющееся. Представим себе кончик пера, когда оно движется по листу писчей бумаги; относительно бумаги оно занимает различные положения в разные моменты, и всякий понимает нас, когда мы говорим, что кончик пера движется. Но теперь представим себе некоторую точку в пространстве. Геометрическая точка не является частью пространства, занимаемой кончиком пера, или не есть даже материальный „атом“, а есть только отметка положения. Мы не можем поэтому говорить о движущейся точке; истинная сущность точки состоит в том, что она *есть* положение. Движение точки *пространства*, в отличие от материальной точки, есть фикция, и есть предположение о том, что данная точка может совпадать то с одной, то с другой точкой. Движение в обычном смысле слова возможно только для вещества, а не для пространства. Так, когда мы говорим о „переменном положении“, мы говорим нелепость, если мы желаем, чтобы наши слова понимались буквально. Но в действительности, вдумавшись в это, мы увидим, что мы и не хотим, чтобы нас понимали именно так; то, что мы делаем в действительности, состоит в следующем: мы пользуемся картинной фразой с целью вызвать некоторое легко вообразимое представление, помогающее нам грубо обозреть математическое предложение, которое может быть точно описано только при помощи многих слов. Древние греки допускали многословие, и против этого возражали только непосвященные. Современная математика до времени, которое наступило около шестидесяти лет тому назад, успешно воевала против пространности изложения; с этим были связаны с одной стороны неясность ее основных понятий и процессов, а с другой—ее великие завоевания. Последние были достигнуты ценой принесения в жертву многого для аналогии; так, например, были отождествлены между собой такие понятия, как целое число 2, отношение $^2/_1$ и вещественное число, обозначаемое знаком „2", как это мы видели, по причине некоторой тесной аналогии между ними. Это, кажется, главное основание, благодаря которому так часто осуждался логиками и даже философами образ действий математиков. Действительно, когда математики стали пытаться определить природу математики, им пришлось исследовать с величайшей тщательностью ее предметы и методы, с которыми им приходилось иметь дело, выискивать те пункты, в которых аналогии приводили к заблуждениям, и проводить различия между теми вещами, между которыми обычно раньше им это делать не удавалось. Тогда люди, которые нисколько не интересовались тем, что такое представляет из себя математика по существу, а только тем, каковы ее достижения, стали называть этих серьезных исследователей „педантами" и „любителями поумствовать", тогда как их нужно было бы назвать „философами", или, во всяком случае, „логиками". Мы пытались показать, почему отношения или дроби и т. д. называют „числами" и почему о них говорят, как о чем-то таком, чего они в сущности не представляют; теперь, считая, что о числах было сказано достаточно, мы должны попытаться исследовать значение терминов „постоянная" и „переменная".

С помощью алгебраических формул правила для воспроизведения большого, иногда бесконечного числа явлений природы можно выразить очень кратко или даже уложить в объеме *одного единственного* выражения. Сущность формулы заключается в том, что она есть выражение некоторого *постоянного* правила, которому подчинены *переменные* количества. Выражения „постоянный" и „переменный" проникли и в обычный язык. Мы говорим, что число миль, которое известный человек проходит в день, есть „переменное количество“; мы не хотим сказать этим, что в некоторый определенный день это число не могло бы быть установленным и определенным, но что в разные дни он проходил, говоря вообще, различные числа миль. Когда в математике мы говорим о „переменной“, то хотим указать на то, что рассматриваем некоторый класс определенных объектов — например, класс людей, находящихся в живых в этот момент — и хотим что либо высказать относительно *какого-нибудь одного* из них, безразлично какого. Предположим, что мы говорим: „Если идет дождь, А возьмет с собой зонтик“; буква „А“ здесь есть то, что мы называем знаком „переменной“. Мы не думаем при этом, что приведенное предложение относится к *переменному человеку*. Такого объекта не существует; мы говорим, что здоровье человека меняется, и таким образом человек меняется *во времени*, но, строго ли правильна такая фраза или нет, значение, которое мы должны были бы придать выражению „переменный“ в приведенном выше предложении, не есть один и тот же человек в разные периоды своего собственного существования, но один и тот же человек, представляемый разными людьми поочередно. Под „А“ мы разумеем всякого человека, а не *одного только* Смита, Джонса или Робинсона, когда он берет, при известных обстоятельствах, свой зонтик. Правильность этого утверждения зависит от того, что такое „A“. Если „A“ обозначает директора банка, утверждение может быть правильным; для бродяги или дикаря оно, вероятно, неправильно. Вместо „A“ можно поставить „B“, „C“ или „X“,—род отметки на бумаге не имеет ни малейшего значения. Но мы приписываем, в силу соглашения, определенные значения определенным знакам; так, еслибы мы писали восклицательный знак для обозначения переменной, мы бы рисковали быть непонятыми или показаться шутниками. Мы увидим в седьмой главе, какое важное значение имеет понятие о переменной в логике и математике.

„Законы природы“ выражают зависимость между двумя или более переменными. Эта идея зависимости переменных есть основная идея всего научного мышления и достигает своего наиболее законченного рассмотрения в математике и логике под именем „функциональной зависимости“. По поводу этого мы должны сослаться на вторую главу. Понятия функции и переменной не выступали резко до времени Декарта, а названия для понятий были введены много времени спустя после него.

Соглашение относительно знаков координат в различных четвертях плоскости, введенное в аналитическую геометрию, оказало важное влияние на преобразование тригонометрии, бывшей сначала только простым придатком практического знания. Сохраняя обозначения, употребленные в конце первой главы, мы можем с удобством назвать отношение $\frac{AP}{OP}$, одно и то же для всех длин OP, ради краткости, через „u“ и определить $\frac{PM}{OP}$ и $\frac{OM}{OP}$, как “синус u“ и „косинус u“, соответственно. Итак, „Sin$u$“ и „Cos$u$“, как коротко мы их пишем, стоят вместо числовых функций переменной u. Рассматривая O, как начало системы прямоугольных координат, у которых OA есть ось x-ов, замечаем, что u измеряет угол POA, а $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$ суть Cos$u$ и Sin$u$, соответственно. Теперь, если u станет столь большим, что POA постепенно сделается тупым, более двух прямых и т. д., эти определения можно сохранить, если принять во внимание знаки, получаемые x-ом и y-ом в различных четвертях. Таким образом, Sin$u$ и Cos$u$ отделяются от геометрии и появляются, как числовые функции переменной u, значения которых, как можно сообразить, повторяются через правильные промежутки по мере того, как u становится все больше и больше. Итак, предположим, что OP вращается вокруг O, как центра, в направлении, противоположном движению часовой стрелки. В первой четверти $\mathrm{Sin}\,u$ и $\mathrm{Cos}\,u$ суть $\frac{y}{r}$ и $\frac{x}{r}$, во второй $\frac{y}{r}$ и $\frac{-x}{r}$, в третьей $\frac{-y}{r}$ и $\frac{-x}{r}$, в четвертой $\frac{-y}{r}$ и $\frac{x}{r}$, в пятой они снова суть $\frac{y}{r}$ и $\frac{x}{r}$ и т. д. Тригонометрия была отделена от геометрии, главным образом, Иваном Бернулли и Эйлером, о которых мы упомянем дальше.

Обратимся теперь к развитию других ветвей математики.

Древние греки имели, повидимому, некоторый приближенный метод для вычисления площадей криволинейных фигур. В самом деле, методы бесконечно малых, допускающие неопределенно близкие приближения, естественно подсказывались сами собою. Определение площади всякой прямолинейной фигуры может быть приведено к вычислению площади прямоугольника и, таким образом, произведено полностью. Но этот способ вычисления площадей—этот „метод квадратур"— не годился для вычисления площадей или объемов, ограниченных кривыми линиями или поверхностями, соответственно. Тогда были применены следующие соображения. Когда невозможно найти точное решение вопроса, естественно пытаться приблизиться к нему, насколько возможно, пренебрегая величинами, которые мешают соображениям, если предвидят, что эти пренебрегаемые величины могут произвести, ввиду их незначительности, лишь малую ошибку в результате вычислений. Например, если трудно обнаружить свойства кривых, то естественно их рассматривать, как многоугольники с большим числом сторон. Если предположить, что правильный многоугольник вписан в круг, то очевидно, что эти две фигуры, хотя всегда и различные, становятся, тем не менее, все более и более сходными друг с другом по мере увеличения числа сторон многоугольника. Их периметры, их площади, тела, образованные вращением их вокруг данных осей, углы, образованные этими линиями и т. д., если и не равны между собой соответственно то, во всяком случае, становятся как угодно близкими к равенству, по мере увеличения числа сторон. Откуда, предполагая число этих сторон очень большим, будет возможно приписать, без какой-либо ощутительной погрешности, описанному кругу свойства, принадлежащие вписанному многоугольнику. Так, например, если предложено найти площадь данного круга, то предположим, что эта кривая есть правильный многоугольник с большим числом сторон; площадь какого бы то ни было правильного многоугольника равна произведению из его периметра на половину перпендикуляра, опущенного из центра на одну из его сторон; отсюда, так как круг рассматривается, как многоугольник с большим числом сторон, его площадь должна равняться произведению из длины окружности на половину радиуса. Этот результат, как мы теперь знаем, в точности правилен. Однако, греки, склонные к совершенно точным рассуждениям, не позволяли себе рассматривать кривые, как многоугольники с „бесконечным“ числом сторон. Они находились также под влиянием аргументов Зенона и, таким образом, относились с подозрением к употреблению „бесконечно-малых“.

Зенон показал, что мы встречаемся с трудностями, если считаем, что время и пространство способны бесконечно делиться. Из его аргументов, которые он изобрел в доказательство этого, наиболее известна загадка об Ахилле и черепахе. Зенон утверждал, что, если Ахилл бежит в десять раз быстрее черепахи и если черепаха находится впереди его на расстоянии, скажем, в 1000 ярдов, то, всетаки, Ахилл никогда не нагонит черепаху. Ибо, когда Ахилл пробежит 1000 ярдов, черепаха все еще будет на 100 ярдов впереди его; за время, в которое он пробежит 100 ярдов, черепаха всетаки окажется на 10 ярдов впереди и т. д. до бесконечности: таким образом, Ахилл будет подходить к черепахе все ближе и ближе, но никогда не догонит ее. Зенон изобрел некоторые другие хитрые загадки для многих подобных целей, и они могли быть разгаданы в самом деле удовлетворительно только математиками новейшего времени.

Чтобы избежать употребления бесконечно-малых, Евдокс (408—355 до Р. Х.) изобрел метод, изложенный Евклидом в двенадцатой книге *Начал* и примененный Архимедом при доказательстве многих из его великих открытий для подтверждения результатов, найденных при помощи сомнительных рассуждений с бесконечно-малыми. Когда греки хотели открыть свойства некоторой кривой, они рассматривали ее, как определенную границу, к которой непрерывно приближаются вписанные и описанные многоугольники, как угодно близко, по мере увеличения числа их сторон. Таким образом, они истощали в некоторой мере пространство, заключенное между этими многоугольниками и кривой, и нет сомнения в том, что отсюда произошло название этой операции „методом истощения“. Так как эти прямолинейные многоугольники были фигурами хорошо известными, то их непрерывное приближение к кривой давало все более и более точное представление о ней.

Греки, руководимые законом непрерывности, могли в известных случаях действительно находить свойства этой кривой. Но для геометров было недостаточно наблюдать и, так сказать, угадывать эти свойства; было необходимо удостоверить их неопровержимым образом. Это они делали, доказывая, что всякое предположение, отрицающее существование этих свойств, необходимо приведет к некоторому противоречию: так, например, после того, как они находили, при помощи рассуждений с бесконечно-малыми, что, скажем, площадь криволинейной фигуры есть a, они проверяли справедливость этого, доказывая, что, еслибы она не была равной a, то она была бы меньше площади некоторого многоугольника, вписанного в криволинейную фигуру, площадь которой явно больше, чем площадь многоугольника.

В семнадцатом столетии мы наблюдаем полный контраст с греческим духом. Метод открытия казался гораздо более важным, чем правильность доказательства. Около того же времени, когда Декарт изобрел аналитическую геометрию, был создан метод для нахождения площадей поверхностей, положений центров тяжести поверхностей различной формы и т. д. Бонавентура Кавальери (1598—1647) в книге, вышедшей в 1635 г., и в некоторых более поздних работах, дал свой

„метод неделимых", в котором были развиты менее обработанные идеи его предшественников, в особенности Кеплера (1571—1630). Согласно Кавальери, линия состоит из бесконечного числа точек, не имеющих величины, поверхность — из бесконечного числа линий, не имеющих ширины, и объем — из бесконечного числа поверхностей, не имеющих толщины. Применение этой идеи может быть показано на простом примере. Предположим, что требуется найти площадь прямоугольного треугольника. Пусть основание составлено из n точек (или неделимых), и, подобно этому, пусть сторона, перпендикулярная ему, составлена из na точек; тогда ординаты при последовательных точках основания содержат a, $2a$, ... , na точек. Следовательно, число точек на площади есть $a+2a+\cdots+na$: эта сумма равна $\frac{1}{2}(n^2a+na)$. Так как n очень велико, то можно пренебречь членом $\frac{1}{2}na$, в виду того, что он незначителен по величине, сравнительно с $\frac{1}{2}n^2a$. Следовательно, площадь составлена из $\frac{1}{2}(na)n$ точек и, таким образом, измеряется в квадратных единицах, число которых получится, если умножить половину линейной меры высоты на линейную меру основания. Это заключение, как мы знаем из других соображений, вполне справедливо.

С помощью этого метода Кавальери находил площади, объемы и центры тяжести многих криволинейных фигур. Нужно заметить, что как Кавальери, так и его последователи представляли себе совершенно ясно, что предположение о том, что линии составлены из точек, понимаемое буквально, есть нелепость, но что им можно пользоваться, как основанием для прямого и сжатого метода сокращения, заменяющего с успехом косвенные, скучные и строгие методы древних греков. Логические трудности принципов этого и сходных методов очень сильно чувствовались и обсуждались философами—иногда с пониманием дела; их чувствовали и смело обходили математики, руководимые своей крепкой и нерассуждающей верой; они были удовлетворительно разрешены только математиками,—а не философами,—в сравнительно недавнее время.

Метод неделимых, применение которого к важному вопросу механики будет указано в ближайшей главе, основан на том же принципе, что и „интегральное исчисление". Это последнее возникло из работ Кавальери и его последователей, среди которых величайшими являются Роберваль (1602—1675), Блэз Паскаль (1623—1662) и

Джон Валлис (1616—1703), и главным образом заключается в снабжении метода неделимых удобными и выразительными обозначениями. Открытие исчисления бесконечно-малых было дополнено открытием того, что задача о проведении касательных к кривым являлась обращением задачи на вычисление площадей фигур, ограниченных этими кривыми, и введением системы удобных и выразительных обозначений для этого обратного и более простого метода, который, по некоторым историческим причинам, был назван „дифференциальным исчислением".

Как аналитическая геометрия, так и исчисление бесконечно-малых являются чрезвычайно могущественными орудиями для решения геометрических и физических задач. Секрет их могущества заключается в том, что длинные и сложные рассуждения могут быть записаны и применены для решения задач совершенно механически. В высшей степени поверхностно презирать математиков за то, что они занимаются, иногда даже сознательно, задачей экономии мысли. Могущество даже наиболее богоподобных между нами умов крайне ограничено, и никто из нас не мог бы пойти очень далеко в открытии какой бы то ни было части Истины, не будь мы в состоянии установить цепи рассуждений, продуманных и проверенных нами, вполне готовых и легко применимых в будущем ввиду того, что они составляются, насколько возможно, механическим путем. Как в аналитической геометрии, так и в исчислении бесконечно-малых все существенные свойства очень многих объектов, с которыми имеет дело математика, и существенные черты многих из методов, придуманных предварительно для применения их, уложены, так сказать, в хорошо расположенную, а потому легко воспринимаемую и легко применимую форму.

ГЛАВА IV

Начало применения математики к естествознанию—динамика

Цель весьма многих отделов математики и деятельности многих выдающихся людей состоит в том, чтобы *дать простое и как можно более точное описание вещей* в окружающем нас мире, которые проникают в наше сознание через посредство наших чувств.

Рассмотрим среди этих вещей, скажем, какое-нибудь отдельное человеческое лицо и биллиардный шар. Очевидно, что описать зрительное впечатление, полученное от шара, много легче, чем описать впечатление, полученное от рассматривания лица. Мы можем вызвать изображение, и очень точное, биллиардного шара в уме другого человека, никогда не видавшего его, указав только цвет и радиус. И, если мы не занимаемся микроскопическими исследованиями, этого описания обыкновенно достаточно. Описать лицо—более трудное дело: если мы не искусные скульпторы, мы не можем этого сделать и приблизительно; и даже хороший рисунок не может претендовать на буквальную точность, но может только правильно передать выражение, часто лучше, чем, скажем, модель из воска.

Наш идеал естествознания—построить годную для работы модель вселенной из того рода идей, которые все люди носят с собой повсюду, „в своих головах“, как мы выражаемся; и к этим же идеям мы обращаемся, когда пытаемся научить кого-нибудь математике. Это суть идеи *числа*, *порядка*, числовых измерений *времени* и *расстояния*, и т. д. Одно из оснований того, почему мы стремимся к этому идеалу, есть чисто практическое. Если мы имеем годную для работы модель, скажем, солнечной системы, мы можем сказать в несколько минут, каково будет наше положение относительно других планет во всякий отдаленный будущий момент и, таким образом, можем *предсказать некоторые будущие события*. Всякий может видеть, насколько это полезно; моряки, пользующиеся *Морским Календарем*, принадлежат, может быть, к тем людям, которые видят это наиболее ясно. Мы не в состоянии замедлить вращение земли вокруг ее оси для того, чтобы продлить день для окончания некоторой важной части работы; но, отыскивая неизменные законы, скрывающиеся в явлении движения земли, солнца и звезд, математик может построить модель, о которой только что говорилось. И математик вполне господин своей модели: он может повторять события в своей вселенной так часто, как это ему захочется. Несколько подобно Иисусу Навину, он может остановить свое „солнце“ или ускорить его бег для того, чтобы иметь возможность опубликовать *Морской Календарь* на многие годы вперед. В самом деле, „мир“, с которым мы имеем дело в теоретической и математической механике, есть лишь математическая схема, назначение которой подражать, насколько возможно близко, определенным процессам природы, по логическим следствиям вытекающим из свойств, приписанных этой схеме по определению. Так, например, наш „динамический мир“ может быть назван моделью действительности, но его не следует смешивать с самой действительностью.

Что эта модель действительности построена исключительно на логических концепциях, это следует из нашего вывода о том, что математика основывается на логике, и только на одной логике; что такая модель возможна, это действительно удивительно, если подумать над этим. Потребность в мысленном воспроизведении явлений природы сначала ощущалась, как *практическая* потребность, которая возникла по той причине, что мы чувствовали удобство такого воспроизведения для предсказания некоторых родов будущих событий. Например, имея чисто математическую модель солнечной системы, мы в состоянии указать, с приближением, зависящим от совершенства модели, относительные положения солнца, звезд и планет на многие годы вперед; это есть то, что дает нам возможность опубликовать *Морской Календарь* и примиряет нас с нашей неспособностью „охватить в целом этот грустный порядок вещей... и пересоздать его ближе к желаниям нашего сердца".

То, что называется „механикой", имеет дело с очень важной частью строения этой модели. Мы говорили сейчас о биллиардном шаре. Каждый человек в раннем возрасте привыкает к отвлечению от цвета, шероховатости и т. д. шара и составляет для себя представление о *сфере*. Сферу можно описать точно; равным образом можно это сделать и для тех вещей, которые мы называем „квадратом", „кругом" и „эллипсом", при помощи таких представлений, как „точка" „расстояние", „прямая линия" и т. д.

Не так легко описываются некоторые другие вещи, как, например, лицо или душевное движение. Над миром движущихся объектов такого рода, которые мы грубо относим к классу *неодушевленных*—т. е. объектов, поведение которых не осложняется заметно теми явлениями, которым мы дали название „жизнь“ и „воля“,—люди стали размышлять с очень древних времен все с возрастающим успехом и открывать правила движения и покоя данных систем объектов (таких, как рычаг и клин) при данных обстоятельствах (толчках, давлениях и т. д.). Слово открыть здесь означает следующее: найти идеальное, точно описываемое движение, которое должно, насколько возможно ближе, приближаться к естественному движению или классу движений. Так, Галилей (1564—1642) открыл приближенный закон свободного падения тел или падения по наклонной плоскости вблизи поверхности земли; Ньютон (1642—1727) установил еще более точный закон движения какого угодно числа тел под влиянием любых сил.

Теперь попытаемся ясно представить себе, что мы подразумеваем под таким правилом или, как обычно его называют, „научным законом“, или „законом природы“, и почему он играет важную роль в расположении нашего знания в столь удобный порядок, что мы можем сразу, так сказать, наложить руку на всякий частный факт, потребность в рассмотрении которого указывается практическими или теоретическими обстоятельствами.

Для этой цели посмотрим, как Галилей в работе, опубликованной в 1638 г., приступил к решению задачи о падении камня. Рассмотрим тело, свободно падающее на землю: Галилей старался уяснить, не *почему* оно падает, а *как* оно падает, иначе говоря, как расстояние, проходимое телом, математически зависит от времени, протекшего от начала падения, а скорость, приобретенная телом, от пройденного им пути.

Следить взором за свободно падающими телами тем труднее, чем с большей высоты они падают; удар по руке, поставленной на их пути, становится в одинаковой мере резче; звук при их падении тем громче, чем с большей высоты они падают. Скорость соответственно возрастает с течением времени и с увеличением проходимого пространства. Таким образом, современный исследователь спросил бы: какой функцией является число (v), представляющее скорость, от чисел (s и t), представляющих расстояние, проходимое телом, и время падения? Галилей спрашивает на своем примитивном языке: Пропорциональны ли v и s между собой, пропорциональны ли s и t между собой? Таким образом, он сделал известные предположения и затем старался *удостовериться при помощи действительного испытания в правильности или неправильности этих предположений.*

Одно из предположений Галилея заключалась в том, что скорость, приобретаемая телом при падении, пропорциональна времени падения. Иначе говоря, если тело падает один раз в известный промежуток времени, а затем падает снова в течение вдвое большего промежутка времени, то в конце падения оно приобретает во второй раз вдвое большую скорость, чем в первый. Требовалось найти при помощи опыта, соответствует ли такое предположение наблюдаемым фактам или нет; ввиду того, что было трудно доказать каким-либо прямым способом, что приобретенная скорость пропорциональна времени падения, а гораздо легче исследовать, по какому закону возрастает расстояние с течением времени, *Галилей вывел из своего предположения соотношение, связывающее расстояние и время.* Этот важный вывод он сделал приблизительно так:

Пусть абсциссы OE, OC, OG, и т. д. прямой OA, представляют по длине различные промежутки времени, протекшего от определенного момента, изображенного точкой O. Пусть далее ординаты EF, CD, GH, и т. д., соответствующие этим абсциссам, представляют по своей длине величины скоростей, полученных телом в моменты, изображенные соответствующими абсциссами.

Теперь мы замечаем, что по нашему предположению точки O, F, D, H *лежат на прямой линии* OB, и поэтому 1) в момент C, когда истекла половина OC всего времени падения OA, скорость CD равна также половине окончательной скорости AB; 2) если E и G лежат на равных, но противоположно направленных по OA расстояниях от C, то скорость GH превосходит среднюю скорость CD на такую же величину, на которую CD превосходит EF; для всякого момента, предшествующего C, можно найти соответствующий момент, следующий за C и находящийся на равном от него расстоянии. Следовательно, какова бы ни была потеря скорости сравнительно с равномерным движением, скорость которого равна половине окончательной скорости падения в первую половину движения, эта потеря наверстается во вторую половину. Расстояние, пройденное падающим телом, можно рассматривать, как расстояние, пройденное равномерно движущимся телом, скорость которого равна половине окончательной скорости падения.

Символически, если через v мы назовем число единиц скорости, приобретенной за t единиц времени, и предположим, что v пропорционально t, то число единиц пройденного пространства пропорционально $\frac{1}{2}t^2$. В самом деле, для равномерного движения со скоростью $\frac{1}{2}v$, s равняется $\frac{1}{2}vt$, а так как v пропорционально t, то s пропорционально $\frac{1}{2}t^2$.

После этого Галилей проверил это соотношение между s и t путем опыта. Движение свободного падения было для Галилея слишком быстрым, чтобы точно наблюдать его с помощью тех очень несовершенных приборов, — вроде водяных часов,—которыми он располагал. К началу семнадцатого столетия еще не были изобретены механические часы; они сделались осуществимыми лишь благодаря знанию динамических фактов, которому Галилей положил основание. Тогда Галилей сделал движение более медленным, а именно: он мог довольно полно измерять s и t при помощи несколько примитивного аппарата, в котором движущиеся шарики скатывались по желобкам на наклонных плоскостях. Что пути, проходимые шариком, пропорциональны квадратам времен как при свободном падении, так и при движении по наклонной плоскости, это Галилей проверил экспериментально, доказывая, что шарик, падающий с высоты наклонной плоскости, приобретает такую же окончательную скорость, как и шарик, падающий по длине ее. Этот остроумный опыт с маятником состоял в том, что нить маятника по истечении половины колебания захватывалась неподвижным крючком, расположенным так, что другая половина колебания происходила с меньшей, чем в первую половину, длиной нити. Этот опыт показывал, что чечевица маятника подымалась благодаря скорости, приобретенной при спуске, *как раз на такую высоту, с какой она упала*. Этот факт находится в согласии с нашим инстинктивным познанием действительно происходящего события, так как еслибы шарик, падающий вдоль длины наклонной плоскости, мог приобресть скорость, бóльшую скорости падения по высоте плоскости, то можно было бы поднять его на высоту бóльшую, чем та, с которой он падал: достаточно было бы заставить тело перейти, с приобретенной при падении скоростью, на другую, более крутую, чем первая, плоскость, чтобы заставить его подняться на бóльшую высоту чем та, с которой оно упало. Отсюда можно вывести ускорение при свободном падении, зная ускорение при падении по наклонной плоскости, ибо, так как окончательные скорости одинаковы и $s = \frac{1}{2} vt$, то длины сторон (гипотенузы и вертикального катета) наклонной плоскости пропорциональны временам падения шара вдоль этих сторон.

Сообразно с этим, движение при падении, как обнаружил Галилей, происходит в действительности так, что скорость возрастает пропорционально времени.

Подобно Галилею, мы исходили из близких нам идей (возникающих, например, в повседневной жизни)—таких, как идея *скорости*. Рассмотрим упомянутое движение более подробно.

Если движение *равномерное* и в каждую секунду проходятся c футов, то по истечении t секунд будет пройдено ct футов. Для краткости положим $ct=s$. Тогда „скоростью“ движущегося тела мы называем расстояние, проходимое в единицу времени, так что это есть $\frac{s}{t}$ единиц длины в секунду, т. е. число, измеряющее расстояние, деленное на число, измеряющее время, протекшее от начала движения. Галилей пришел к понятию о движении, скорость которого возрастает пропорционально времени. Если мы начертим диаграмму, откладывая от начала O на оси x-ов OA ряд абсцисс, представляющих по своей длине промежутки времени, и восставляя соответствующие ординаты для изображения скоростей, то концы этих ординат будут лежать на некоторой линии *OB*, которая, в случае „равномерно ускоренного движения“, к которому пришел Галилей, есть *прямая*, как мы уже видели. Но если ординаты представляют собою *пространства*, вместо *скоростей*, то прямая *OB* превращается в некоторую кривую. Мы видим различие между „кривою пространств“ и „кривою скоростей“, причем в обоих случаях время принимается за абсциссу. Если скорость постоянна, то кривая пространств есть прямая линия *OB*, проведенная из начала *O*, а кривая скоростей есть прямая линия, параллельная оси x-ов. Если скорость переменна, то кривая пространств никогда не бывает прямою линией; но если движение равномерно-ускоренное, то кривая скоростей есть прямая линия, подобная *OB*. Соотношения между кривою пространств, кривою скоростей и площадями, ограниченными такими кривыми, как *AOB*, принадлежат к такому роду соотношений, которые, как мы увидим, сразу выражаются при помощи „дифференциального и интегрального исчислений“; в самом деле, главным образом, из-за этой важной иллюстрации исчислений мы и останавливались здесь на элементарных задачах динамики. И измерение скорости в том случае, когда она меняется со временем, есть иллюстрация возникновения основных идей дифференциального исчисления.

Можно заметить, что нахождение скорости движущейся частицы для данного момента и нахождение касательной к кривой в данной точке суть задачи одного и того же рода — нахождения „дифференциального частного" (производной) некоторой функции. Теперь войдем в суть дела детально.

Рассмотрим кривую пространств. Если движение равномерно, то число, измеряющее *всякое* приращение расстояния, деленное на число, измеряющее соответствующее приращение времени, дает одно и то же значение для меры скорости. Но если мы поступим так же в том случае, когда скорость изменяется, то мы получим для скорости значительно различающиеся между собою величины. Однако, чем меньше приращение времени, тем более приближается к прямолинейному кусок кривой пространств, соответствующий этому приращению, и, следовательно, тем равномернее возрастание (или убывание) s. Таким образом, если мы обозначим приращение t через „Δt", — где „Δ" стоит не вместо числа, а вместо слова „приращение", — и соответствующее приращение (или уменьшение) s через „Δs", то мы сможем определить величину средней скорости на этом элементе движения, как $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Но, как бы ни было мало Δt, линия, представленная через Δs, не вполне, по крайней мере обыкновенно, прямая, и скорость в момент t, которая на языке дифференциального исчисления Лейбница определяется, как частное „бесконечно-малых“ приращений, и обозначается символически, как $\frac{ds}{dt}$, — когда рассматриваются „бесконечно-малые“, то Δ заменяется на d, — определена только приближенно. Мы встретили это затруднение при рассмотрении метода неделимых и встретили его снова при рассмотрении дифференциального исчисления; мы увидим, как это затруднение преодолевается, только тогда, когда познакомимся с понятием „предела“.

Это новое понятие скорости содержит в себе, как частный случай, понятие скорости равномерного движения. В самом деле, правила дифференциального исчисления п зволяют вывести из уравнения $\frac{ds}{dt}=a$, где a есть некоторая постоянная, уравнение $s=at+b$, где b другая постоянная. Мы должны помнить, что все это было *явно* формулировано спустя приблизительно пятьдесят лет после того, как Галилей опубликовал свои исследования о движении падающих тел. Если мы рассмотрим кривую скоростей, то равномерно-ускоренное движение займет относительно нее совершенно такое же положение, какое занимает равномерная скорость по отношению к кривой пространств. Если через v обозначим численное значение скорости в момент, отстоящий на t единиц времени от начала движения, то в обозначениях дифференциального исчисления ускорение измерится через $\frac{dv}{dt}$; уравнение $\frac{dv}{dt}=h$, где h некоторая постоянная, есть уравнение равномерно-ускоренного движения. В динамике Ньютона нам приходится рассматривать *переменно*-ускоренные движения, и тут-то дифференциальное исчисление или другое, практически ему эквивалентное, вроде Ньютонова „метода флюксий", становится столь необходимым в теоретической механике.

Теперь рассмотрим кривую пространств для равномерно-ускоренного движения. На этой диаграмме — оси на ней t и s — проведем кривую

$$s=\frac{gt^2}{2},$$

где g обозначает некоторую постоянную. Конечно, это то же самое, что провести кривую $y=\frac{gx^2}{2}$ в плоскости, снабженной Декартовыми осью x-ов и осью y-ов. Это кривая — парабола, проходящая через начало. Интересно то, что эту кривую описывало бы тело, брошенное наклонно к поверхности земли, еслибы воздух не оказывал сопротивления, и что путь тела, брошенного в сопротивляющейся атмосфере, очень близок к параболе. Свободное тело, согласно воззрению Галилея, всегда падает по направлению к земле с постоянным вертикальным ускорением, измеряемым приведенным выше числом g. Если мы подбрасываем тело вертикально вверх, с начальной скоростью в c единиц, то его скорость по прошествии t единиц времени содержит $c-gt$ единиц, так как если направление вниз (g) считается положительным, то направление вверх (по c) должно считаться отрицательным. Если бросить тело горизонтально со скоростью в a единиц и пренебречь сопротивлением воздуха, то, как нашел Галилей, оно пройдет в горизонтальном направлении расстояние в at единиц за t единиц времени и *одновременно*, падая, опустится на расстояние в $\frac{gt^2}{2}$ единиц. Оба движения рассматриваются, как происходящие *независимо* одно от другого. Таким образом, наклонное бросание можно рассматривать, как составленное из горизонтального и вертикального бросаний. Во всех этих случаях путь брошенного тела имеет форму параболы; в случае горизонтального бросания уравнение его пути в координатах x и y получается из двух уравнений: $x=at$ и $y=gt^2/2$, так что в результате

$$y=\frac{gx^2}{2a^2}.$$

Теперь предположим, что скорость ни постоянная, ни равномерно-возрастающая, но различная и возрастает в различной мере в разные моменты времени. Тогда кривая скоростей OB не есть больше прямая. *В предыдущем случае число s равнялось числу квадратных единиц, содержащихся в площади треугольника AOB.* Теперь же фигура AOB не есть треугольник, хотя мы найдем, что ее площадь содержит как раз s единиц, несмотря на то, что скорость v возрастает от O к A неравномерно.

Заметим снова, что если мы выберем на OA очень близкие между собой точки C и E, то маленькая дуга DF очень близка к отрезку прямой, и фигура DGF очень приближается к прямолинейному треугольнику. Заметим, что здесь мы пытаемся только получить первое приближение к величине s, именно так, что, вместо непрерывно изменяющихся скоростей, которые мы знаем, — или думаем, что знаем — из нашего повседневного опыта, мы рассматриваем некоторое фиктивное движение. В этом последнем скорость возрастает (или убывает) так, что совпадает со скоростью изучаемого движения в большем количестве точек, отстоящих друг от друга на очень малых и равных расстояниях, а между этими последовательными точками равномерно возрастает (или убывает).

Заметим также, что мы предполагаем (как это обыкновенно имеет место для тех кривых, с которыми мы будем встречаться), что дуга DF, соответствующая отрезку CE на оси абсцисс, приближается как угодно близко к прямой линии, если мы выбираем точки C и E достаточно близко друг к другу.

А теперь вычислим приблизительно s. Начинающийся в точке O, в первый маленький промежуток OH, прямолинейный треугольник OHK, где HK есть ордината точки H, приближенно представляет своей площадью величину пространства, пройденного за этот промежуток. В ближайший малый промежуток HL, где HL по длине равен OH, пройденное пространство представляется прямолинейной фигурой $KHLM$. Эта фигура может быть разложена на прямоугольник $HKNL$ и треугольник KNM. Прямоугольник $HKNL$ представляет собою величину пространства, пройденного с постоянной скоростью HK за время KL; треугольник KNM есть пространство, пройденное при таком движении, в котором скорость возрастает от нуля до MN. Так же рассуждаем относительно следующих за HL промежутков. Таким образом, s получается (приближенно), как число квадратных единиц, содержащихся в многоугольнике, который мало отличается от фигуры AOB.

Мы теперь должны сказать несколько слов относительно значения букв, входящих в геометрические и механические *уравнения*, которыми, следуя Декарту, мы пользуемся вместо пропорций, употреблявшихся Галилеем и многими другими из его современников и последователей. Кажется, лучше, начиная изучать механику, мыслить пропорциями, однако, потом, ради удобства в обращении с символизмом математических данных, лучше мыслить уравнениями.

Типичная пропорция — следующая: Окончательные скорости относятся между собой так же, как соответствующие времена; или в символах,— „$V:V'=T:T'$“. Здесь „V“, например, есть просто сокращение фразы „скорость, приобретенная к концу промежутка времени“ (считая от некоторого постоянного момента), обозначенного через „T“, а $V:V'$ и $T:T'$ суть просто *числа* (вещественные числа); пропорция, таким образом, устанавливает равенство этих чисел. Если теперь v есть только числовая мера V, v' таковая же для V' и т. д., то мы имеем $\frac{v}{v'}=\frac{t}{t'}$, или $vt'=v't$.

В последнем уравнении буквы v и t имеют некоторое мнемоническое значение, напоминая нам о том, что мы исходим от *скоростей и времен*, но мы должны тщательно избегать представления о том, что мы „умножаем“ (или можем сделать это) скорости на времена. То, что *мы делаем*, есть умножение числовых мер их. Люди, пишущие по вопросам геометрии и механики, часто, просто ради краткости, неправильно говорят: „пусть s обозначает расстояние, t — время“ и т. д., между тем как, по молчаливому соглашению, малые латинские буквы обыкновенно употребляют для обозначения *чисел*. Однако, в будущем ради краткости я буду поступать так же, как и указанные авторы, и говорить о v, как о „скорости“. В механике уравнения, как, например, „$s=\frac{gt^2}{2}$“, возможны лишь в том случае, когда их левая и правая части выражены в единицах меры одинакового рода: мы не можем, например, приравнивать пространства и времена.

Положим, что мы остановились на определенных единицах длины, например, в один дюйм, и определенных единицах времени, например, в одну секунду. За единицу скорости мы можем выбрать такую скорость, с которой тело равномерно проходит, скажем, a дюймов в одну секунду. Если мы это сделали, то соотношение между s единицами пространства, пройденного телом с данной скоростью (v единиц) в данное время (t единиц), выразилось бы, как $s=avt$; между тем как, еслибы мы определили единицу скорости, как такую скорость, с которой тело проходит единицу длины в единицу времени, то мы написали бы $s=vt$.

Между единицами, производными по отношению к основным единицам, — таким, как единица длины и времени, — устанавливаются возможно более простые соотношения. Например, подобно тому, как в качестве единиц площади и объема употребляются соответственно квадрат и куб со сторонами, равными единице, так и единица скорости есть та равномерная скорость, с которой единица длины проходится в единицу времени, единица ускорения есть прирост единицы скорости в единицу времени и т. д.

Производные единицы зависят от основных, и функция, выражающая данную производную единицу через ее основные единицы, называется ее „размерностью". Так, скорость получалась от деления длины s на время t. Размерность скорости записывается так:

$$[V]=\frac{[L]}{[T]},$$

а размерность ускорения, — обозначаемого через F, — так:

$$[F]=\frac{[V]}{[T]}=\frac{[L]}{[T^2]}.$$

Эти уравнения — исключительно мнемонические; здесь буквы не обозначают чисел. Мнемонический характер проявляется тогда, когда мы хотим перейти от одной системы единиц к другой. Так, если мы переходим к некоторой единице длины, в b раз больше, чем старая, и к единице времени, в c раз больше, чем старая, то ускорение f по старой системе единиц связано с ускорением f' по новой системе единиц таким уравнением:

$$f' = \left(\frac{c^2}{b}\right) f .$$

Так как, если единицы увеличиваются, f уменьшается, и так как размерность F есть $\frac{[L]}{[T^2]}$, то этим, очевидно, подсказывается множитель $\frac{c^2}{b}$, так как символ „$[T]$“ указывает на то, что нужно возвести в квадрат число, измеряющее время.

Из работы Галилея получился тот вывод, что там, где нет никаких изменений *скорости по прямой линии*, нет никакой силы. Состояние тела, не находящегося под действием силы, есть равномерное прямолинейное движение; покой есть частный случай этого движения, когда скорость есть и остается нулем. Этот „закон инерции“ был совершенно противоположен философскому мнению, ведущему свое начало от Аристотеля, о том, что сила потребна для того, чтобы поддерживать равномерное движение. Закон инерции можно грубо проверить, наблюдая поведение какого-нибудь тела, брошенного с данной скоростью и двигающегося при наличии малого сопротивления, — как, например, камень по гладкой поверхности льда. Ньютон и его современники знали, как важен этот закон для объяснения движения, скажем, планеты относительно солнца. Вообразим простой случай, когда орбита есть круг. Планета стремится двигаться вдоль касательной к этому кругу с постоянной скоростью, но, одновременно с этим, солнце притягивает ее к себе, и в результате этого непрерывного сочетания двух движений получается круговая орбита. Ньютону удалось вычислить формы орбит для различных законов притяжения, и он нашел, что, когда притяжение изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, формы орбит суть конические сечения, как это указало наблюдение для нашей солнечной системы.

Задача о солнечной системе оказалась, таким образом, облеченной в математическое одеяние; различные предметы движутся в пространстве, но их движение можно вполне описать, если мы знаем геометрические соотношения, — расстояния, положения и угловые расстояния, — между этими предметами в некоторый момент, скорости их в этот же момент и ускорения в *любой* момент. Конечно, если мы знаем положения всех предметов во все моменты, то наше описание будет полным; случается, что *ускорения* обыкновенно легче непосредственно определить, чем положения: так, в Галилеевом случае ускорение просто постоянно. Итак, мы имеем функциональные соотношения между этими положениями и быстротой их изменения. Нам остается определить положения из этих соотношений.

Задача „метода флюксий" или „исчисления бесконечно-малых" и состоит в том, чтобы дать методы для нахождения соотношений между переменными по соотношениям между скоростями их изменения и между переменными и их скоростями. Это указывает на важность такого исчисления для подобного рода физических вопросов.

Математическая физика выросла по образцу теоретической астрономии, первого действительно обширного завоевания, может быть, даже слишком слепо подражая ей. Есть признаки того, что математическая физика начинает освобождаться от влияния своих традиций. Однако, тут нам нет необходимости углубляться в этот предмет.

Основываясь на Галилеевой идее сложения движений, Роберваль придумал метод касательных. Касательная есть направление результирующего движения точки, описывающей кривую. Метод Ньютона, с которым мы будем иметь дело в пятой главе, аналогичен этому, и понятие скорости является основным в его „методе флюксий“.

ГЛАВА V

Возникновение современной математики — исчисление бесконечно-малых

Мы видели в третьей главе, что древне-греческие геометры иногда занимались, теоретически, — точным определением площадей, ограниченных криволинейными фигурами, и что они пользовались при этом „методом истощения“, а для доказательства полученных результатов — косвенным методом. Мы познакомились еще с „методом неделимых“, который был прямым, и повидимому выигрывал со стороны краткости и действительной применимости, благодаря некоторому недостатку правильности в выражении и, может быть, даже маленькой неточности мысли. Мы найдем те же достоинства и недостатки, — как те, так и другие, в особенности достоинства в более сильной степени, — в „исчислении бесконечно-малых“.

Методы проведения касательных развились наряду с изысканиями по определению площадей, объемов и центров тяжести. Впервые мы имели дело с этим предметом в третьей главе; здесь мы иллюстрируем на простом примере рассуждения Ферма (1601—1665) и Барроу (1630—1677), духовных преемников Кеплера.

Пусть задано провести касательную к данной точке P окружности круга с центром в O, уравнение которого $x^2+y^2=1$. Будем рассматривать круг, как многоугольник с большим числом сторон; пусть PQ одна из этих сторон; продолжим ее до пересечения с осью x-ов в точке T. Тогда PT будет искомой касательной. Пусть координаты точки P суть X и Y; тогда координаты Q будут $X+e$ и $Y+a$, где e и a суть бесконечно малые приращения, положительные или отрицательные. Если построить ординаты и абсциссы точек P и Q так, что ордината P будет: PR, то, по известному свойству треугольников, мы усматриваем из чертежа, что TR так относится к RP (или к Y), как e относится к a. Теперь X и Y связаны уравнением $X^2+Y^2=1$, и, так как Q лежит также на кривой $x^2+y^2=1$, то мы имеем $(X+e)^2+(Y+a)^2=1$. Из двух уравнений, содержащих X и Y, мы заключаем

$$2eX+e^2+2aY+a^2=0 \quad \text{и} \quad \frac{e}{a}\left(X+\frac{e}{2}\right)+Y+\frac{a}{2}=0.$$

Но $\frac{e}{a}=\frac{TR}{Y}$, следовательно $TR=\dfrac{-Y\left(Y+\frac{a}{2}\right)}{X+\frac{e}{a}}$.

Величинами a и e можно пренебречь по сравнению с X и Y, и, таким образом, мы можем говорить, что значение $TR = \frac{Y^2}{X}$ во всяком случае *очень* близко к истинному. Но это и *в точности правильно*, потому что, так как TP перпендикулярен к OP, мы знаем, что OR так относится к RP, как PR к RT. Здесь X и Y постоянны, но мы можем сказать, что абсцисса той точки, в которой касательная к *любой* точке (скажем y) круга пересекает ось x-ов, получается прибавлением $\frac{y^2}{x}$ к x.

Итак, мы можем найти касательные, рассматривая отношения бесконечно-малых величин между собой. Этот метод очевидно применим и к другим кривым, кроме круга; метод и номенклатура Барроу прямо приводят нас к понятиям и номенклатуре Лейбница. Барроу назвал треугольник PQS, где S есть точка встречи параллели к оси x-ов, проходящей через точку Q, с прямой PR, „дифференциальным треугольником", а Лейбниц обозначал величины Барроу a и e через dy и dx соответственно (сокращение слов „дифференциал y" и „дифференциал x", так что „d" не обозначает число, но весь символ „dx" стоит вместо некоторой „бесконечно-малой"), и назвал совокупность правил обращения со своими значками „дифференциальным исчислением".

Но еще перед тем, как Готфрид Вильгельм фон-Лейбниц (1646—1716), знаменитый немецкий философ, государственный деятель и математик, открыл обозначения и правила дифференциального исчисления, он изобрел обозначения и некоторые из правил „интегрального исчисления“: так, он ввел хорошо известный теперь знак „$\int$“ или удлиненное „S“ для сокращения слова „сумма“, рассматривая сумму бесконечного числа бесконечно-малых элементов, как это мы делали в методе неделимых. Предположим, что мы задаемся целью определить площадь, заключенную между некоторой кривой $y=f(x)$, осью x-ов и двумя постоянными ординатами, уравнения которых суть $x=a$ и $x=b$; тогда, если мы воспользуемся идеей и обозначением дифференциалов, мы заметим, что искомая площадь может быть записана так:

$$\int y \cdot dx,$$

где суммование распространяется от $x=a$ до $x=b$. Здесь мы не будем более заботиться об этих пределах. Заметим, что в вышеприведенном выражении мы поставили точку между y и dx: это для того, чтобы указать, что y умножается на dx. До сих пор мы просто ставили рядом сомножители для обозначения умножения, но здесь d пишется вплотную с x с другой целью; и желательно подчеркнуть разницу между „d“, употребленным в смысле прилагательного, и „d“, употребленным в смысле числового сомножителя, по крайней мере, до тех пор, пока изучающий не будет в состоянии видеть разницу между тем и другим по смыслу текста. Тогда, если мы представим, что абсцисса разделена на равные бесконечно-малые части, каждая длиною в dx, которые соответствуют составным частям, называемым „точками“ в методе неделимых, то $y \cdot dx$ есть площадь маленького прямоугольника со сторонами dx и y, стоящего при конце абсциссы x. Если теперь суммование распространяется до ординаты, соответствующей неопределенной или „переменной“ точке x, вместо $x=b$, то $\int y \cdot dx$ становится функцией x.

Если же мы захотим определить дифференциал этой суммы, то найдем, что бесконечно-малое приращение, которое она получит, когда абсцисса длины x, являющаяся одной из границ, увеличится на dx, должно быть равно $y \cdot dx$. Откуда

$$d\left(\int y \cdot dx\right)=y \cdot dx,$$

и следовательно знак „d“ уничтожает, так сказать, эффект, произведенный знаком „$\int$“. Мы имеем также $\int dx=x$ и заключаем, что это суммирование есть процесс, обратный дифференцированию. Таким образом, задачи о касательных и квадратурах обратны одна другой. Величина, которая при дифференцировании дает в результате заданный дифференциал, называется „интегралом“ этого дифференциала. Ведь мы рассматриваем ее, как образованную посредством сложения бесконечно-малых, непрерывно изменяющихся прибавок; каждая из них есть то, что мы назвали дифференциалом возрастающей величины, есть частичка ее, и сумма всех этих частичек есть цельная величина, которую мы имеем в виду отыскать. По тем же самым основаниям мы называем „интегрированием“ или „суммованием“ дифференциала· отыскание интеграла или суммы всех бесконечно малых последовательных прибавок, образующих ряд, общий член которого, собственно говоря, есть дифференциал.

Очевидно, что из двух переменных, постоянно равных друг другу, за один и тот же промежуток времени одна возрастет на столько же, на сколько возрастет другая, и, следовательно, их приращения равны; то же самое имеет место, если даже эти величины при начале изменения отличались одна от другой на какое-нибудь количество; предполагая только, что эта первоначальная разность всегда остается одинаковой, их дифференциалы будут всегда равны.

Обратно, ясно, что две переменные, получающие в каждый момент бесконечно-малые и одинаковые приращения, должны также либо оставаться постоянно равными друг другу, либо всегда отличаться на то же самое количество, т. е. интегралы двух равных дифференциалов могут отличаться друг от друга только на постоянное количество. По этой же самой причине, если две какие бы то ни было величины отличаются друг от друга бесконечно мало, то и их дифференциалы также отличаются между собой бесконечно мало; и обратно, если два дифференциальных количества бесконечно мало отличаются между собой, то их интегралы, не принимая в расчет постоянную, также могут отличаться друг от друга только на бесконечно-малую величину.

Далее, некоторые из правил дифференцирования состоят в следующем. Если $y=f(x)$, то $dy=f(x+dx)-f(x)$, причем здесь можно пренебречь дифференциалами в высших степенях, если они складываются с дифференциалами в низших степенях. Так, если

$y=x^2$, то $dy=(x+dx)^2-x^2=2x.dx+(dx)^2=2x.dx$.

Это правило полезно сравнить с приемом, употребленным при решении задачи о касательных, в начале главы. Затем, если $y=a.x$, где a постоянное, то $dy=a.dx$. Если $y=x.z$, то

$dy=(x+dx)(z+dz)-x.z=x.dz+z.dx$. Если $y=\frac{x}{z}$, то $x=y.z$ и $dx=y.dz+z.dy$; откуда $dy=\frac{dx-ydz}{z}$. Так как интегральное исчисление обратно дифференциальному исчислению, то мы получаем сразу

$$\int 2x.dx=x^2, \int a.dx=a\int dx,$$

$$\int x.dz+\int z.dx=x.z, \text{ и т. д.}$$

Более полно, из $d(x^3)=3x^2.dx$ мы не выводим, что $\int x^2.dx=\frac{1}{3}x^3$, а что $\int x^2.dx=\frac{1}{3}x^3+c$, где „$c$" обозначает некоторую постоянную, зависящую от определенного значения x, с которого начато интегрирование.

Рассмотрим параболу $y^2=ax$; отсюда получим $2y.dy=a.dx$, или $dx=\frac{2y.dy}{a}$. Итак, площадь, ограниченная параболой, считая от начала до точки x, есть $\int\frac{2y^2\ dy}{a}+c$; но $d\frac{2y^3}{3a}=\frac{2y^2.dy}{a}$, следовательно, эта площадь есть $\frac{2y^3}{3a}+c$, или, так как $y^2=ax$, есть $\frac{2}{3}x.y+c$. Для определения c в том случае, когда площадь берется от 0 до x, мы замечаем, что площадь есть 0, когда $x=0$;

откуда полученное выше уравнение дает $c=0$. Весь этот результат, кажущийся нам теперь совершенно простым, есть одно из величайших открытий Архимеда.

Теперь сделаем несколько кратких замечаний относительно исчисления бесконечно-малых. Во первых, его необычайное могущество при разрешении сложных вопросов заключается в том, что решаемый вопрос раздробляется на бесконечное число *более простых*, которые можно рассматривать все сразу, благодаря удивительно экономическому способу, применяемому исчислением, подобно аналитической геометрии, в обращении с переменными. Так, *криволинейная* площадь разбивается на *прямоугольные* элементы, и сумма всех этих последних получается сразу, как только замечено, что интеграл есть действие, обратное легко выполнимому на практике дифференцированию. Мы никогда не должны упускать из виду тот факт, что когда мы дифференцируем y или интегрируем $y.dx$, мы рассматриваем не какое -нибудь частное значение x или y, но *любое* из бесконечности этих значений. Во-вторых, мы видели, что тот прием, который первоначально рассматривался, только как простой метод приближения, дает, по крайней мере, в известных случаях, совершенно точные результаты. Суть дела состоит в том, что точные результаты получаются благодаря компенсации ошибок: ошибка, возникающая от неправильного предположения, например, от соглашения рассматривать кривую, как многоугольник с бесконечным числом сторон, каждая из которых бесконечно мала и при продолжении дает касательную к кривой, исправляется или компенсируется ошибкой, проистекающей из самых процессов исчисления, согласно которым при дифференцировании мы удерживаем только лишь бесконечно-малые величины одного и того же порядка. В самом деле, после того, как эти количества были введены в вычисление для облегчения выражения условий задачи, и после того, как их полагают безусловно равными нулю сравнительно с данными количествами, с целью упростить эти уравнения, то для того, чтобы изгнать ошибки, проистекающие от введения бесконечно -малых и получить совершенно точный результат, остается еще исключить эти самые количества из уравнений, в которых они еще могут быть.

Но все это нельзя рассматривать, как строгое доказательство. *Возникают* большие трудности при попытке определить, что пр дставляют из себя бесконечно-малые: одно время их считали чем-то вроде конечных чисел, в другое время их считали нулями или „призраками усопших количеств", как их называл епископ Бэркли, известный философ.

Другая трудность возникает при рассмотрении дифференциалов „высших, чем первого, порядков". Воспользуемся снова рассуждениями четвертой главы. Мы видели, что $v=\frac{ds}{dt}$, и нашли, что s получается интегрированием: $s=\int v.dt$. Это теперь непосредственно выводится, так как $\frac{ds}{dt}dt=ds$. Подставим в $\frac{dv}{dt}$ выражение v через s. Здесь t есть независимая переменная. Все старые математики считали элемент dt постоянным — промежуток независимой переменной разбивался, так сказать, на атомы, которые сами считались известными, и через которые определялись другие дифференциалы, ds, dx, dy. Итак

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}=\frac{\frac{1}{dt}(d(ds))}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2},$$

где „d^2s" написано вместо „$d(ds)$" и „dt^2" — — вместо „$(dt)^2$". Таким образом, ускорение выражалось, как „второй дифференциал пути, деленный на квадрат dt". Если $\frac{d^2s}{dt^2}$ постоянно, скажем a, тогда $\frac{d^2s}{dt}=a.dt$; интегрируя почленно, получаем:

$$\frac{ds}{dt}=\int a.dt=a\int dt=at+b,$$

где b новая постоянная. Интегрируя снова, имеем:

$$s=a\int t.dt+b\int dt=\frac{at^2}{2}+bt+c;$$

это более общая форма Галилеева результата.

Таким образом исчисление бесконечно-малых чрезвычайно увеличило наше могущество в описании явлений природы. И этим успехом мы главным образом обязаны обозначениям Лейбница: сам Лейбниц приписывал все свои математические открытия улучшениям в обозначениях. Те, кто немнсго знакомы с трудами Лейбница, знают, что у него было глубокое сознание того, какую побудительную экономическую силу имеют хорошие обозначения. Тот факт, что мы до сих пор пользуемся и ценим Лейбницевы знаки „$\int$“ и „d“, несмотря на то, что наши взгляды на принципы исчисления очень отличаются от взглядов Лейбница и его школы, есть, может быть, лучшее свидетельство в пользу важности этого вопроса об обозначениях. То обстоятельство, что Лейбницевы обозначения стали прочными, есть главная причина, по которой я начал рассматривать его работу раньше аналогичной и первой по времени появления работы Ньютона.

Исаак Ньютон (1642—1727) пришел несомненно много раньше Лейбница к принципам и приложению на практике некоторого метода, эквивалентного исчислению бесконечно-малых. Его концепции, подобно Робервалевым, выросли на почве динамики Галилея. Он рассматривал кривые, описанные движущимися точками. Если мы вообразим, что движущаяся точка описывает кривую и что кривая отнесена к осям координат, то скорость точки можно разложить на две, параллельно осям x и y, соответственно; эти скорости были названы „флюксиями“ x и y, а скорость точки—„флюксией“ дуги. Обратно, дуга есть „флюэнта“ скорости, с которой она описана. По заданному уравнению кривой мы можем искать соотношения между флюксиями, —и это эквивалентно Лейбницевой задаче дифференцирования; и обратно, мы можем искать соотношения между координатами, когда нам известны соотношения между флюксиями,—либо между ними одними, либо между ними и самими координатами. Это эквивалентно Лейбницевой общей задаче интегрирования, и это та задача, к которой, как мы знаем из конца четвертой главы, приводится теоретическая астрономия.

Ньютон обозначал флюксию x-а через „$\dot{x}$“, а флюксию от флюксии (ускорение) через „$\ddot{x}$“. Очевидно, что такие обозначения неудобны, если рассматривать флюксии высших порядков;

Ньютон не указывал при своих обозначениях, какая переменная считается независимой. Так „$\dot{y}$“ может с одинаковым правом обозначать либо $\frac{dy}{dt}$ либо $\frac{dy}{dx}$. Мы имеем $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$; но для $\frac{d^nx}{dt^n}$ обозначение точками было бы неуклюже и неудобно. Ньютоново обозначение, употреблявшееся им в „обратном методе флюксий“, было еще более громоздким и значительно хуже, чем Лейбницев знак „$\int$“.

Отношения между Ньютоном и Лейбницем были сначала дружелюбными, и каждый из них сообщал другому о своих открытиях с некоторой откровенностью. Впоследствии между Ньютоном и Лейбницем и их сторонниками возник долгий, полный горечи спор. Каждый обвинял другого,—повидимому, несправедливо,—в плагиате, и низкие подозрения дали повод к низким поступкам. Такое поведение опиралось еще и на то, что иногда называют „патриотизмом“. Благодаря этому английские математики в течение более, чем ста лет, не успели заметить преимущества Лейбницевых обозначений. Таким образом, в то время, как швейцарские математики Яков Бернулли (1654-1705), Иван Бернулли (1667—1748) и Леонард Эйлер (1707—1783), французские математики д'Аламберт (1707—1783), Клэро (1713—1765), Лагранж (1736—1813), Лаплас (1749—1827), Лежандр (1752—1833), Фурье (1768—1830) и Пуассон (1781—1850), и многие другие континентальные математики быстро [1]) расширяли область знания, применяя исчисление бесконечно-малых ко всем ветвям чистой и прикладной математики, прогресс в Англии в этом направлении был сравнительно невелик. В самом деле, только в начале девятнадцатого столетия было основано в Кембридже общество для введения и распространения среди английских математиков Лейбницевой системы обозначений: чтобы установить, если можно так выразиться, „принципы чистого *d*—изма“ в противуположность тупой точечной косности университета“ [2]).

---

[1]) Для математика трудно отрешиться от той мысли, что блестящая заря великолепной и, повидимому, всеобъемлющей физики Ньютона, и удивительно могучего математического метода Лейбница, внезапно засиявшая над Францией восемнадцатого столетия, внушила ученым веру в то, что конечное стремление всей науки близко к осуществлению и что началась новая эра науки, быстро шагающей по пути к совершенству, и что этот оптимизм косвенным образом оказал большое влияние на подготовку французской революции.

[2]) Непереводимая игра слов: в оригинале слово *dot-age* (*dot*=точка) означает символизм при помощи знака

Трудности, встреченные в принципах исчисления бесконечно-малых Ньютоном, Лейбницем и их ближайшими последователями и разрешенные ими не достаточно удовлетворительно, сосредоточиваются вокруг понятия о „пределе“; и большая часть размышлений современных математиков, таких, как француз Коши (1789—1857), норвежец Абель (1802—1829) и немец Вейер- Ч Ч штрасс (1815—1897), не говоря о многих других, еще живущих, была посвящена укреплению этого понятия на твердом логическом основании.

Мы видели, что если $y=x^2$, то $\frac{dy}{dx}=2x$. Чтобы найти $\frac{dy}{dx}$ мы вычисляем выражение $\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$, которое, как легко видеть, есть $2x+\Delta x$, и затем соображаем, что, так как Δx все больше и больше приближается к 0, приведенное выше частное приближается к $2x$. Мы выражаем это, говоря, что „предел частного при приближении Δx к 0“ есть $2x$. Мы не рассматриваем Δx, как фиксированную „бесконечно-малую“ или же как абсолютный нуль (который превращает вышеприведенное частное в неопределенное выражение вида $\frac{0}{0}$); нам

точки (напр. $\dot{x}$). Слово же *dotage* (от глагола *dote*=бредить, врать, нести чепуху) переводится, как тупая косность, чепуха, бред. „*d-ism*“—читается как „*deism*“—„*деизм*“. Эта фраза принадлежит Ч. Бэбэджу (Charles Babbage). *Ред.*

не нужно также, чтобы частное *достигало* своего предела (состояние, при котором Δx есть нуль). То, что нам необходимо рассматривать, заключается в том, что „Δx“ должно представлять собою некоторую переменную, которая может принимать значения, как угодно мало отличающиеся от 0. Иначе говоря, если мы выбираем *какое-нибудь* число, как угодно малое, то существуют такие значения для Δx, которые отличаются от 0 на величину, меньшую выбранного нами числа. Как и раньше, когда мы говорим о „переменной“, мы разумеем под этим, что рассматриваем некоторый *класс*. Когда же мы говорим о „пределе“, мы рассматриваем некоторый *бесконечный* класс. Так, последовательность бесконечного числа членов $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ и т. д., закон составления которых легко усматривается, имеет пределом 0. В этом случае 0—такое число, что всякое число, большее, чем 0, больше некоторого члена этой последовательности, но само число 0 не больше какого либо члена последовательности и не есть член таковой. Последовательность, подобная такой, как $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$ имеет аналогичный *верхний* предел 2. Некоторая функция $f(x)$ при приближении независимой переменной x к определенному значению, например, $\frac{2x}{x}$, когда x приближается к 0, может иметь определенное значение (в данном случае 2, не смотря на то, что *при* $x=0$ выражение $\frac{2x}{x}$ неопределенно). Вопрос о пределах функции, в своей общей постановке, несколько сложен, но наиболее важным является предел выражения $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, когда Δx приближается к 0; этот предел, если $f(x)$ обозначить через y, есть $\frac{dy}{dx}$.

То, что исчисление бесконечно-малых со своими несколько темными „бесконечно-малыми“,—с которыми обращаются, как с конечными числами, когда мы пишем $\frac{dy}{dx}\,dx=dy$ и $\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{dx}{dy}$, и которыми затем, по мере надобности, пренебрегают,—приводит так часто к правильным результатам, представляет в высокой степени замечательный факт. Его истинное объяснение появилось только тогда, когда Коши, Гаусс (1777—1855), Риманн (1829—1866) и Вейерштрасс развили теорию одного обширного и очень часто встречающегося класса функций. Эти функции обладают случайно такими свойствами, которые позволяют особенно легко оперировать с ними, и приблизительно все функции, которыми мы обычно пользуемся в математической физике, принадлежат к этому классу. Замечательно то, что комплексные числа служат в большой мере *основой* этой теории.

Конечно, здесь не было упомянуто о некоторых обширных отделах математики. Так, существует обработанная теория целых чисел, на которую мы будем ссылаться в примечании к главе седьмой, затем отдел геометрии, оперирующей идеями древних и методами современной математической мысли; очень многие люди смотрят еще на пространственные представления, как на вещи, имеющие прямое отношение к математике. Мы скоро к этому вернемся. Повторяем, алгебра развилась и разделилась на ветви; выросло общее учение о функциях и учение о частных классах их; и список лишь некоторых из многих великих людей, способствовавших всему этому, скоро станет слишком обширным. Попытаемся теперь резюмировать то, что мы заметили в развитии математики по тому направлению, которое, повидимому, является главным.

В древнейшие времена люди занимались частными вопросами—свойствами отдельных чисел и геометрическими свойствами частных фигур, вместе с простыми механическими вопросами. Греки начинают более общее изучение классов геометрических фигур. Но только „алгебра“ дает признаки раннего уклонения от этого изучения частностей. В ней, в ее более поздней форме, символы, подобные нашим x и y, заняли место чисел, так что часть вычислений могла быть выполнена над символами, а не над числами, что является большим прогрессом с точки зрения экономии мысли и другого рода труда, т. к. один и тот же полученный результат выражает, как и в греческой геометрии, предложение, имеющее значение для всего бесконечного класса различных чисел.

Великая революция математической мысли была произведена Декартом в 1637 г. на почве приложения к геометрии этой общей алгебры, благодаря очень естественной мысли заменять прямые числами, выражающими длины этих прямых. Так, положение точки на плоскости, например, определяется двумя числами, или координатами x и y; когда положение рассматриваемой точки изменяется, то x и y оба изменяются; каждому x вообще отвечает один или более y-ов, и мы приходим к весьма изящной идее об одном единственном алгебраическом уравнении между x и y, представляющем всю кривую—об одном „уравнении кривой“, выражающем общий закон, благодаря которому по одному, из всей бесконечности значений, частному значению x можно найти соответствующее значение или значения y.

Задача о касательной в любой точке кривой, т. е. о предельном положении секущей, когда две точки ее пересечения неопределенно близко приближаются одна к другой,—выступает на первый план в результате работ Декарта. Это, в связи с идеями о скорости и ускорении „в некоторый момент“, появившимися в классических исследованиях Галилея, опубликованных в 1638 г., относительно закона движения свободно падающих тел, дало толчок к дальнейшему развитию могущественного и удобного „исчисления бесконечно-малых“ Лейбница и „метода флюксий“ Ньютона. С математической точки зрения, задача о построении касательной к кривой и задача определения скорости частицы, описывающей кривую, в момент прохождения ее через данную точку,—тождественны между собой. Решение их состоит в нахождении „дифференциального частного“ или „флюксии“ в точке. Теперь известно с большой степенью вероятности, что оба указанные выше метода, являющиеся теоретически,—но не практически,—вполне одинаковыми, были открыты независимо один от другого. Ньютон открыл свой метод первым, а Лейбниц первым опубликовал свой в 1684 г. Определения площадей, ограниченных кривыми, и формы кривых, описанных движущимися под влиянием данных сил частицами, оказывались в этом исчислении результатами процесса, обратного по отношению к прямому процессу, служащему для построения касательных и определения закона притяжения частицы к данной точке по заданному пути, описанному этой частицей. Прямой процесс называется „дифференцированием", а обратный—„интегрированием".

Ньютон обязан своей славой главным образом приложению этого метода к решению задачи о движении тел солнечной системы, которое он дал в общих чертах и которое включает в себе его открытие закона всеобщего тяготения, —притяжения частиц материи друг к другу. Это он сделал в своих *Началах*[1]), в 1687 г.; и на протяжении более, чем ста лет после него, математики занимались рассмотрением и приложением исчисления бесконечно-малых.

Затем появились более современные работы, все больше и больше направленные к тому, чтобы поставить математические методы на прочное логическое основание и отделить математические процессы от чувственных представлений о пространстве, в связи с которыми развивалось и развивается столь многое в математике. Так, тригонометрия становится рядом с алгеброй, как

1) „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". „Математические начала философии природы" (физики).

наука, изучающая определенные математические функции, и начинает проявляться та точка зрения, что истинное назначение геометрии заключается в том, чтобы снабжать прекрасными и выразительными картинами отвлеченные,—„аналитические“ или „алгебраические“, или даже арифметические, как их называют, — математические процессы.

В ближайшей главе мы будем иметь дело с частью этой работы логической проверки и перестройки.

ГЛАВА VI

Современные взгляды на пределы и числа

Попытаемся составить себе ясное представление о том понятии, которое оказалось основным для принципов исчисления бесконечно-малых,— о понятии *предела*.

Заметим, что предел некоторой последовательности есть число, принадлежащее к классу уже определенных нами чисел. Мы не можем показать, что последовательность имеет некоторый предел, если искомый предел не находится среди уже известных чисел. Так, имея систему „чисел“,—здесь мы должны сослаться на вторую главу,—состоящую из всех дробей (или отношений), мы можем сказать что последовательность

$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots$, (где 1 и 2 пишутся вместо отношений $\frac{1}{1}$ и $\frac{2}{1}$) имеет предел (2), но последовательность $1,\ 1+\frac{4}{10},\ 1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100},$ $1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}\cdots$, или 1,4142...., получаемая при извлечении квадратного корня из 2, посредством известного процесса десятичной арифметики, предела не имеет. В самом деле, можно доказать, что не существует отношения, которое служило бы пределом для указанной выше последовательности. Еслибы таковой существовал, то, обозначив его через „x“, мы имели бы $x^2=2$. Здесь мы опять приходим к вопросу о несоизмеримых и „иррациональных числах“. Греки были совершенно правы, отличая столь резко числа от величин; это было молчаливое, естественное и логически не оправданное,— хотя, как оказалось, по существу и правильное,— предположение о том, что ряд рациональных чисел, превращенный путем пополнения его „иррациональными числами“, в то, что мы называем „вещественными числами“, точно соответствует ряду точек прямой линии. Ряд точек, представляющий последнюю из указанных последовательностей, несомненно, как это кажется, имеет предел; предполагается, что эта предельная точка представляет некоторое число; так как она не может представлять целое число или отношение, то говорили, что она представляет „иррациональное число“ $\sqrt{2}$. Другое иррациональное число есть то, которое представляется несоизмеримым отношением длины окружности круга к своему диаметру. Это число обозначается греческой буквой „π“, и его приближенное значение есть 3·141 6.... . Конечно процесс приближения при помощи десятичных дробей не имеет конца.

Вопрос о пределах сам собою стал на очень видное место в семнадцатом и восемнадцатом столетиях, когда стали применять бесконечные ряды для приближенных вычислений. Я буду отличать название „последовательность“ от „ряда“. Последовательность есть совокупность,—конечная или бесконечная,—чисел, а ряд есть конечная или бесконечная совокупность чисел, *связанных между собой операцией сложения*. Последовательности и ряды могут быть приведены в соответствие друг с другом следующим образом. Последовательности 1, 2, 3, 4,.... принадлежит ряд, члены которого получены вычитанием, по порядку, каждого члена последовательности из другого члена, непосредственно следующего за первым, именно $(2-1)+(3-2)+(4-3)+....=$ $=1+1+1+....$; а из ряда может быть получена соответствующая последовательность путем составления суммы одного первого члена, первых двух, первых трех...., причем получаются соответственно первый, второй, третий .... члены последовательности. Итак, ряду $1+1+1+$.... отвечает последовательность 1, 2, 3,...

В том случае, когда ряд состоит только из конечного числа членов, возможно найти сумму их всех; но если ряд бесконечный, этого, очевидно, сделать нельзя. Однако, в известных случаях соответствующая последовательность имеет некоторый предел, и тогда математики называют этот предел,—что представляется хотя и естественным, но не точным,—„суммой бесконечного числа членов ряда". Так, последовательность $1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$,.... имеет пределом 2, и, таким образом, сумма бесконечного числа членов ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$.... есть 2. Конечно, не все ряды имеют сумму: так, $1+1+1+$.... не имеет предела, т. к. члены соответствующей последовательности постоянно возрастают, превосходя всякую границу. Заметим, в частности, что члены некоторой последовательности могут постоянно возрастать, и всетаки предел может существовать—например, члены приведенной выше последовательности с пределом 2 возрастают, но не превосходят 2, хотя превосходят всякое число, меньшее 2; заметим также, что члены некоторых последовательностей могут при возрастании превосходить всякую границу, даже если члены соответствующего ряда, постоянно уменьшаясь и оставаясь положительными, приближаются к 0. Таков, например, ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{5}+\ldots$; члены отвечающей ему последовательности, медленно возрастая, превосходят всякие границы, как это можно видеть из того соображения, что каждая из сумм $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+$ $+\frac{1}{8}, \frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}, \ldots$ больше $\frac{1}{2}$. Существование такого ряда очень важно в том отношении, что этот пример показывает, что условия, при наличии которых ряд имеет сумму, совсем не так просты, как это может казаться на первый взгляд.

Логическое исследование, которому подверглись в течение последнего столетия математические процессы и понятия, весьма ясно показало, что существование вообще какого-нибудь предела для выражений, подобных 1·414 2..., не смотря на то, что *все* члены его меньше 2, есть дело чистого предположения. Когда мы заменяем числа точками прямой, мы вполне твердо чувствуем, что на ней существует точка, которая относительно точек, представляющих указанную выше последовательность, ведет себя совершенно так же, как 2 относительно последовательности $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ldots$ Теперь, если наша система чисел такова, что образует *континуум* (непрерывную совокупность), каковым представляется нашей мысли линия, так как мы можем утверждать, что наша числовая система пригодна, когда мы введем оси, как это делается в аналитической геометрии, для описания всех явлений изменения положения, которые имеют место в нашем пространстве [1]), *тогда только* мы будем иметь число $\sqrt{2}$, являющееся пределом последовательности $1{\cdot}4142\ldots$, если 2 есть таковой для ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$, так как тогда каждой

1) Единственный род изменения, с которым имеет дело механика, есть изменение положения, т. е. движение. Мне не кажется необходимым придерживаться того взгляда, что полное описание каждого физического явления состоит в указании происходящих в нем механических явлений; потому что, помимо положения, возможно приписывать числовые значения нашего числового континуума другим изменяющимся характеристикам состояния тела (таким, как температура) и производить над этими числами вычисления.

точке прямой будет отвечать некоторое число, подчиняющееся тем же самым правилам вычисления, что и отношения или целые числа.

Итак, чтобы оправдать с логической точки зрения наши поступки при пользовании великими математическими методами, мы должны показать, что такое представляют собою иррациональные числа и определить их *прежде*, чем мы сможем доказать, что они суть пределы. Мы не можем рассматривать ряд, закон составления которого очевиден, а сумма которого не есть отношение и который, однако, таков, что все члены соответствующей ему последовательности меньше некоторого определенного числа, (как например, ряд $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{12} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$, все члены соответствующей последовательности которого меньше 3), и затем сказать, что ряд „определяет некоторый предел“. Все, что мы можем доказать, состоит в том, что *если* такой ряд имеет предел, то, если члены соответствующей ему последовательности, читая их слева направо (как в предыдущем примере) не убывают, этот ряд не может иметь больше одного предела.

Некоторые математики просто *постулировали* существование иррациональных чисел. В начале своих рассуждений они, явно или неявно, говорили: „В дальнейшем мы будем *предполагать*, что существуют такие предметы, которые дополняют своего рода пробелы в системе рациональных чисел (или отношений)“. Существование таких пробелов обнаруживается так. Рациональные числа, меньше, чем $\frac{1}{2}$, и больше, чем $\frac{1}{2}$, образуют две совокупности, которые отделяются друг от друга числом $\frac{1}{2}$. Все те рациональные числа x, для которых x^2 больше 2, и те x-ы, для которых x^2 меньше 2, образуют две аналогичные совокупности, но аналогия относительно разделения этих совокупностей, как в случае числа $\frac{1}{2}$, получится только тогда, когда мы постулируем существование числа $\sqrt{2}$. Таким образом, посредством постулирования мы заполняем в совокупности рациональных чисел эти тонкие пробелы и получаем непрерывную совокупность вещественных чисел. Но мы можем избежать этого постулирования. Определим „$\sqrt{2}$“, как название класса таких рациональных чисел x, для которых x^2 меньше, чем 2, и „$\left(\frac{1}{2}\right)$“, как название класса таких рациональных чисел x, что x меньше $\frac{1}{2}$. Поступив так, мы получим совокупность *классов*, некоторые из которых соответствуют рациональным числам, как, например, $\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{1}{2}$, остальные же удовлетворяют нашей потребности в получении совокупности без пробелов. Нет причин, по которым мы не могли бы сказать, что эти классы *суть вещественные числа*, включающие в себя и числа иррациональные. Но мы должжны заметить, что рациональные числа никогда не совпадают с вещественными числами; $\frac{1}{2}$ не есть $\left(\frac{1}{2}\right)$, хотя и аналогична ему. Тут мы имеем почти то же положение вещей, что и во второй главе, где мы различали $2, +2$ и $\frac{2}{1}$ между собой, а затем намеренно уничтожали это различие по той причине, что мы, вместе с математиками, чувствовали важность аналогии при вычислении. Здесь мы снова отождествляем $\left(\frac{1}{2}\right)$ с $\frac{1}{2}$ и т. д.

Итак, целые, положительные и отрицательные „числа“, дроби и вещественные „числа“—все суть разные вещи: вещественные числа—это классы, дроби и положительные и отрицательные числа—отношения. Целые числа, как мы увидим, суть классы. Весьма возможно, что в установлении этого есть некоторый произвол, но это не имеет значения по сравнению с тем фактом, что в современной математике мы свели определения всех „чисел“ к логическим терминам. Являются ли они классами или соотношениями, или предложениями, или же другими логическими сущностями—все это сравнительно не имеет значения.

Целые числа можно определить, как некоторые классы. Математики, как Вейерштрасс, останавливались в деле обоснования своей науки, не доходя до этого; созидание других чисел анализа они сводили на логическое развитие идеи целого числа и таким образом освобождали анализ от каких-либо остававшихся еще в нем следов влияния геометрии. Но оставалось очевидным, что целые числа должны быть определены, если возможно, в логических терминах. Было давно признано, что две совокупности состоят из одного и того же числа объектов в том и только в том случае, когда эти совокупности можно поставить в такое соотношение друг к другу, чтобы каждому объекту какой-нибудь одной из них отвечал один и только один объект другой. Не нужно думать, что это предполагает, что мы уже имеем идею о *числе один*. Правда, что говоря „один и только один“ мы, повидимому, пользуемся этой идеей. Но выражение: „класс a“ имеет один и только один член“, есть сокращение выражения: „x есть член a, и, если y также есть член a, то y тождествен x“. Справедливо также, что мы пользуемся идеей *единственности* или *индивидуальности* рассматриваемых вещей. Но эта единственность есть свойство каждого индивидуума, тогда как число есть свойство некоторого *класса*. Если класс страниц некоторой книги есть сам по себе, под именем „тома“, член класса книг, то тот же класс страниц имеет число (скажем 360) и единственность, будучи сам членом некоторого класса.

Приведенное выше соотношение, в котором находятся, друг относительно друга, два класса, обладающие одним и тем же числом, не предполагает для своего установления процесса счета. Возьмем пальцы наших рук. Если всякому пальцу одной из рук относится, при помощи некоторого процесса соответствия, один и только один палец другой руки,—вспомним указанное выше значение этого выражения,—то говорят, что руки имеют по „одинаковому числу“ пальцев. Это есть определение того, что должны означать для нас слова „одинаковое число“; до сих пор слово „число“ само по себе не имело для нас никакого значения; и, чтобы избежать путаницы в выражении, мы лучше заменим слова „одинаковое число“ словом „подобный“.

Конечно, можно воспользоваться для этого всяким другим словом, но выбранное слово оказывается весьма выразительным и употребительным. Теперь, если переменная *u* есть какой-либо класс, то „число *u*“ коротко определяется фразой: „Класс, члены которого суть классы, подобные *u*“. Таким образом, число *u* есть сущность, по своей природе чисто логическая. Некоторые люди могут настаивать на том, что под „числом“ они разумеют нечто отличное от этого, и это вполне возможно. Все, что установлено теми, кто согласился выполнять описанный выше процесс, сводится к следующему: (1) классы указанного рода тождественны во всех известных арифметических свойствах с теми неопределенными вещами, которые люди называют „целыми числами“; (2) фраза: „Эти классы не суть *числа*“ представляет собою пустые слова, если при этом не указано, что такое *числа*, т. е. если не определено „число чего-нибудь“ более удовлетворительным образом. Возможны более удовлетворительные определения, но это—единственное из известных в настоящее время, представляющее прочное основание для всей математики, включая и теорию не рассмотренных здесь *порядковых чисел* (имеющих названия „первый“, „второй“,...), которые применяются для рассмотрения совокупностей, расположенных в некотором порядке.

Для иллюстрации положения (1) рассмотрим следующее. Согласно определению, данному выше, 2 есть общая идея того, что мы называем „парой". Мы говорим: „А и его супруга составляют чету"; наше определение требует, чтобы сказанное находилось в согласии с предложением: „Класс, состоящий из А и его супруги есть член класса 2". Мы определяем „2", как „класс таких классов u, что если x есть некоторое u, то u без x есть 1"; определение класса „3" вытекает из определения класса „2" и т. д. Точно так же мы видим, что класс пальцев вашей правой руки и класс пальцев вашей левой руки суть, каждый в отдельности, члены класса 5. Отсюда следует, что классы пальцев подобны между собой в вышеуказанном смысле.

В итоге усилий человеческого разума, стремящегося удобно воспроизвести и предвосхитить результаты опытного исследования геометрических и физических событий, развилась математика. Ее развитие дало бесценные указания для развития логики, и тогда оказалось, что нет никакого пробела между наукой о числе и наукой о наиболее общих соотношениях между объектами мысли. Как для геометрии, так и для математической физики стало возможным ясно отделить их логические части от частей, формулирующих данные нашего опыта.

Мы видели, что математика часто делала большие шаги, жертвуя точностью ради аналогии. Вспомним, что, хотя математика и логика представляют собою, в пределах наших достижений, высшие формы точности, однако процесс математического открытия, который так часто смешивается с тем, что открыто, шел через много сомнительных аналогий и ошибок, происходящих от той легкости, с которой символизм позволял обходить представлявшиеся трудности. К счастью, символизмом можно также пользоваться для точного и тонкого анализа; его можно заставить служить для обнаружения трудностей в том, что кажется легким и даже не заслуживающим внимания,—в роде предложения $1+1=2$. Такие вещи служат предметом многих современных основных математических работ.

ГЛАВА VII

Природа математики

В предшествующих главах мы проследили развитие некоторых отраслей знания, которые обычно объединяются под именем „математической науки". Эти отрасли знания никогда не отделялись резко от всех других отделов науки: так, геометрия иногда рассматривалась, как логическое учение, а иногда, как физическая наука—учение о свойствах пространства, в котором мы живем. Еще менее ясное представление было о том, что собственно изучает эта наука. Предмет ее изучения назывался Математикой и немногие, за исключением „практических" людей и некоторых философов, сомневались в том, что существует нечто, к чему относятся те знания, которые излагаются в науке, называемой „математикой". Однако, вопрос о том, каковы предметы изучения математики, не представлял интереса для очень многих людей; была и существует большая склонность думать, что на вопрос о сущности Математики можно было бы ответить, лишь зная все факты развития нашего математического знания. Мне кажется, что это мнение обязано в значительной мере неясности языка: одно и то же слово,—„математика",—одинаково употребляется как для обозначения нашего знания определенного рода, так и для обозначения вещи, если таковая существует, являющейся предметом этого знания. Я провел различие, и теперь буду строго держаться этого,—между „Математикой"—как собранием истин, о которых нам нечто известно, и „математикой"—нашим познанием о Математике. Так, мы можем говорить о „математике Евклида" или „математике Ньютона" и правильно утверждать, что математика развилась и имеет таким образом историю; но Математика вечна и неизменна, и, следовательно, никакой истории не имеет; она не принадлежит, даже отчасти, ни Евклиду, ни Ньютону или кому-нибудь другому, но есть нечто, открываемое с течением времени человеческим разумом. Аналогичное различие можно провести между „Логикой" и „логикой". Малые начальные буквы указывают на то, что мы пишем о психологическом процессе, который может привести к Истине; большие буквы указывают на то, что мы пишем о сущности,—части Истины,—к которой этот процесс приводит нас. Причина важности математики заключается в том, что без нее Математика непостижима, хотя вечна и неизменна.

По правилам грамматики мы принуждены употреблять прописные буквы и для слова „математика", когда его нужно понимать в психологическом смысле, в том случае, если с этого слова начинается предложение. Однако в таких случаях я был и буду осторожен, чтобы не впасть в двусмысленность.

Та частная функция истории, которую я хочу здесь подчеркнуть, теперь проявится в полной мере. В математике мы постепенно учимся, приобретая некоторые сведения о Математике, сознанию, что существует такая вещь, как Математика.

Итак, мы кратко ознакомились с математикой первобытных народов и видели, что она состояла, по началу, из отдельных свойств отвлеченных вещей, подобных числам или геометрическим фигурам, и из отвлеченных соотношений между конкретными вещами, как, например, соотношений между тяжестями и плечами рычага, находящегося в равновесии. Конечно, эти свойства сначала были открыты и приложены к практике с единственной целью—удовлетворить телесные нужды. Древние греки в отношении математики меняют впервые точку зрения, которая в виду наших недостаточных сведений, может казаться нам слишком неожиданной. Насколько мы знаем, греческая геометрия была, с самого своего возникновения, дедуктивной, общей и изучалась из интереса к ней самой, а не ради каких либо возможных приложений ее к конкретному миру. Если в египетской геометрии какой-нибудь результат устанавливался, как справедливый вообще, то это, вероятно, производилось с помощью индукции, т. е. умозаключения от большого числа частных примеров к общему предложению. Так, если кто-нибудь встречает очень много служащих определенной железнодорожной компании и замечает, что все они носят красные галстуки, то он может отсюда заключить, что *все* служащие этой компании носят красные галстуки. Весьма вероятно, что это может быть и так, но такое заключение вообще не строго: для строгого вывода необходимо было бы знать, что существуют некоторые правила, согласно которым все служащие обязаны носить красные галстуки. Конечно, даже и тогда указанное заключение не было бы вполне строгим, так как законы такого рода могут нарушаться. Напротив, законы *Логики* нарушены быть не могут. Эти законы не суть, как иногда о них говорят, законы *мышления*, потому что логике нет дела до того, как люди думают, как и поэзии нет дела до того, какую пищу должны употреблять поэты, чтобы быть способными писать стихи. Кто-нибудь мог бы *думать*, что 2 и 2 составляют 5; мы же знаем, благодаря процессу, основывающемуся на законах Логики, что они составляют 4.

Вот более удовлетворительный случай заключения по индукции; Ферма высказал предложение о том, что нет никаких целых чисел x, y, и z, таких, чтобы $x^n + y^n = z^n$, при n целом и большем двух. Справедливость этой теоремы была обнаружена для $n = 3, 4, 5, 7$ и для многих других чисел, и нет оснований сомневаться вообще в ее истинности. Но до сего дня для нее не дано общего доказательства[1]). Таким

[1]) Это пример из „теории чисел", изучающей свойства целых чисел. Наиболее ценными в этой области являются, может быть, работы Ферма и Гаусса.

образом, это – пример математического предложения, которое вероятно справедливо в силу индукции.

В греческой геометрии, наоборот, предложения высказывались и доказывались по законам Логики с помощью, как мы знаем теперь, неявных ссылок на те заключения, которые извлекает здравый смысл из картинного представления в уме геометрических фигур,—для *любых*, скажем, треугольников, или *некоторых* треугольников; таким образом, не для одного или двух частных предметов, но для *бесконечной совокупности* таковых. Рассмотрим какие-нибудь два треугольника, *ABC* и *DEF*. Для многих из нас будет легче соображать, если мы начертим определенные треугольники, но наши выводы годятся не только для этих треугольников. Если стороны *BA* и *AC* равны по длине сторонам *ED* и *DF* соответственно, а угол при вершине *A* равен углу при *D*, то *BC* равна *EF*. Это несколько несовершенно доказано в четвертом предложении первой книги Евклидовых *Начал*.

Когда мы близко рассматриваем рассуждения геометров и дополняем их, то приходим к тому, что идея пространства исчезает и мы остаемся только при одной логике. Философы и математики имели обыкновение думать,—а некоторые так думают и теперь,—что в геометрии мы имеем дело не с пространством нашей повседневной жизни, в котором стоят наши дома и двигаются наши друзья и которое, как выражаются некоторые чудаки, „уничтожается“ электрическим телеграфом и автомобилями, но с некоторой абстрактной формой этой вещи, из которой исчезло все личное или материальное и в которой остались только такие вещи, как *расстояние*, *порядок* и *положение*. Некоторые даже думают, что при этом не остается и положение; что в абстрактном пространстве круг, например, не имеет никакого положения сам по себе, но имеет его по отношению к другим вещам. Очевидно, что на практике мы можем указать положение какой-либо вещи только по отношению к другим вещам,—следовательно „относительно“, а не „абсолютно“. Эти „релативисты“ (сторонники относительности) отрицали, что положение обладает какими-либо свойствами, которые не могли бы быть действительно открыты.

Со стороны умозрительной относительность кажется вполне неуязвимой; если же смотреть на дело проще, то такая точка зрения походит на исключение числа 2, как предмета, отличаемого от класса, состоящего из двух вещей, в качестве выдумки ума, в виду того, что его нельзя видеть и осязать подобно кочерге или кусочку радия, или бараньей котлете.

На самом деле, усовершенствованная геометрия приводит к ряду дедукций, имеющих силу не только для пространственных фигур, но и для всяких отвлеченных вещей. Пространственные фигуры доставляют поразительно наглядную иллюстрацию некоторых отвлеченных вещей; и в этом—тайна того интереса, который представляет аналитическая геометрия. Но чтобы вскрыть природу Математики, мы должны глубже вглядеться в сущность алгебры.

Мы видели, что арифметика египтян была более общей, чем их геометрия; подобно алгебре, она начала рассматривать предложения для *любых* чисел, пользуясь буквами для обозначения неизвестных чисел. В алгебре и алгебраической геометрии этот прием быстро развился, и тогда стало возможным систематически изучать отдельные ветви математики и подвергать, при посредстве одного метода, однообразной и почти механической обработке целые классы задач. Здесь мы снова должны напомнить об экономической функции науки.

Одновременно с быстрым ростом методов,—алгебры, аналитической геометрии и исчисления бесконечно-малых,—выросли из приложений математики к естествознанию и новые идеи, повлиявшие на форму, которую приняла математика в семнадцатом, восемнадцатом и девятнадцатом столетиях. Идеи *переменной* и *функции* выдвигались все более и более на первый план. Эти идеи явились вместе с идеей движения, и, несмотря на сомнение немногих логиков в ряду математиков, эти плодотворные идеи остались в обиходе математики. Когда у математиков проснулось сознание необходимости логического объяснения математики и определения природы Математики, они нашли, что стремление к общности в математике привело в очень раннее время к пользованию особым методом дедукции, который хотя и применяли, но не признавали за таковой и не отличали от метода, обычно применявшегося последователями Аристотеля. Я постараюсь определить природу этих методов и тогда будет видно, как вошли в математику идеи переменной и функции в форме, не зависящей от того частного вида переменности, который известен под именем движения.

Предложением называется в логике такого рода вещь, которая выражается, например, фразой: „Сократ был смертен и имел ворчливую жену". Если мы заметим,— и это характерная черта современной логики,—что идеи переменной и функции (соответствия, соотношения), которые появились сначала в специальной форме в математике, являются основными во всем том, что служит предметом нашего мышления, то мы придем к мысли заменить частные понятия в предложении переменными для того, чтобы таким образом яснее усмотреть строение предложения. Так, предложение: „x есть некоторый y и состоит в соотношении R к z, члену класса u“ представляет общую форму для множества предложений, частным случаем которого является приведенное выше предложение; последнее может быть верным, но это есть предмет суждения не логики,—но истории или опыта. Предложение окажется ложным, если подставить вместо слова „Сократ“ слова „Кант“ или „Вестминстерское аббатство“; об истинности его нельзя ничего сказать, если „x“—знак переменной и тогда оно становится так называемой „пропозициональной функцией“ x-а и обозначается через „φx“ или „ψx“. Если рассматривается большее число переменных, то мы вводим обозначение „φ (x,y) и т. д.

Соотношения между пропозициональными функциями могут быть истинными или ложными. Так предложение: Если x—член класса a, и a содержится в классе b, то x есть некоторое b, —истинно. Здесь *заключение* верно. Род заключений, которые мы употребляем в математике, есть предложения вида: „Если φx истинно, то *тогда* и ψx истинно“ т. е. всякое частное значение x, делающее φx истинным, делает также истинным и ψx.

Принимая во внимание то, что, когда идеи переменной и функции введены в логику, как того требует основной характер их, все математические методы и все математические концепции могут быть определены в чисто логических терминах, мы приходим к взгляду на математику только как на развитую логику, изучающую класс всех предложений вида: $\varphi(x,y,z\ldots)$ заключает в себе для всех значений переменных $\psi(x,y,z\ldots)$. Строение пропозициональных функций связано только с такими идеями, которые являются основными в логике, как заключение, класс, соотношение, отношение термина к классу, членом которого он является и т. д. И, конечно, кроме этого математика пользуется идеей истинности.

Когда мы говорим, что „$1+1=2$“ мы, повидимому, делаем математическое утверждение, которое не подходит под данное выше определение. Но дело в том, что это утверждение, записывается несколько неправильно. Припоминая, что 1 есть класс некоторых известных классов, мы выразим указанное предложение так: Если x и y суть члены класса 1, и x отличается от y, то x вместе с y составляют член класса 2.

Итак, в конце концов, мы приходим к тому выводу, что природа Математики не зависит от нас лично и от внешнего мира, и мы можем чувствовать, что наши собственные открытия и взгляды не затрагивают самой Истины, но являются только теми пределами, до которых она видна нам или другим людям. Некоторые из нас делают научные открытия, но действительно создать что-нибудь в науке мы можем не более, чем Колумб мог создать Америку.

Здравый смысл приводит нас, конечно, к заблуждениям, когда мы пытаемся использовать его для тех целей, для которых он в частности неприспособлен, подобно тому, как мы можем поранить себя, а не сбрить бороду, если мы попробуем бриться кухонным ножем; но достоинство здравого смысла состоит в том, что он без труда соглашается с теми философами, которым удалось убедиться в истинности и значении Математики. Некоторые философы пришли к ошеломляющему заключению о том, что Истина творится людьми и что Математика создается математиками и, наконец, что Колумб создал Америку; однако, здравый смысл—об этом отрадно думать—стоит во всяком случае выше того, чтобы льстить себе тем философским убеждением, что он действительно занимает место, которое некоторые предоставляют исключительно еще более священному Существу.

БИБЛИОГРАФИЯ

Тот взгляд, что наука управляется принципом экономии мысли был отчасти [1]) основательно разработан Эрнестом Махом (См. в особенности перевод его „Науки о механике“).

По истории математики можно указать на книги Балля (W. W. Rouse Ball) „A. Primer of the History of Mathematics (изд. 3-е, 1906), на более полную *„Short Account of the History of Mathematics“* (изд. 4-е, 1908, обе изданы Макмилланом в Лондоне), на книгу Финка (Karl Fink) *„Brief History of Mathematics“* (изд. 3-е, 1910, Чикаго), на русском языке можно указать «Историю элементарной математики“ Кэджори изд. 2-е „Mathesis“ 1917 г.

В качестве руководств по математике до сих пор не превзойдены книги Де-Моргана по *Арифметике, Алгебре и Тригонометрии.* Его *Тригонометрия и двойная алгебра* содержат одно из наилучших, среди имеющихся теперь, изложений теории комплексных чисел, для желающих изучить ее. Так как книги Де-Моргана достать не совсем легко, то можно рекомендовать перепечатки его *„Elementary Illustrations of the Differential and Integral Calculus“* и его работу *„On the Study and Difficulties of Mathematics“* (Чикаго, 1899 и 1902 г.) Там, где возможно, лучше всего читать оригинальные работы великих математиков. *Лекции по элементарной математике* Лагранжа служат наиболее совершенным образцом для элементарных книг.

---

1) Ср. 5, 15, 24, 32.

Вопросы, о которых шла речь в четвертой главе, наиболее полно разобраны в *Механике* Маха. Превосходное собрание методов и задач из графической арифметики и алгебры и т. п. содержится в книге Совв'а „Elements of Applied Mathematics (Бостон и Лондон, Ginn & Co., 1911).

Наконец, наилучший разбор вопроса о природе Математики содержится в книге Рёсселя (B. Russel)„ Principles of Mathematics" (Cambridge University Press, 1903).

УКАЗАТЕЛЬ

Абак 23
Абель (Abel) 139
Абсцисса 73
Алгебра 22, 23, 31, 42, 45, 48, 52, 56, 57, 69, 166
Алхуаризми 49
Анализ 6, 146
— геометрический 30, 34, 42, 45
Аналитическая геометрия 33, 70, 91, 96, 99, 166
Аналогия 12, 53, 61, 62, 70, 87, 153, 159
Аполлоний 17
Арабы 23, 37, 38, 49
Арифметика 31, 50
Аристотель 6, 122
— я последователи 6, 167
Архимед 17, 29, 54, 95, 132
Архит 17, 29
Ассирийцы 11
Астрономия 4, 5, 26, 136
Ахилл и черепаха 94, 95
Ахмес 20, 21, 22, 23, 31, 45

Балль (Ball W. W. R.) 171
Барроу (Barrow) 126
Бесконечно-малых исчисление 84, 100
Бесконечно-малых методы 92
Бесконечно-малые 94, 96, 113, 125, 139, 141
Бесконечные ряды 148
Бернулли (Bernoulli) Яков 137
— Иван 92, 137
Боэтий 37
Бросание 115
Буль (Boole) 41
Беркли (Berkeley) 133

Валлис (Wallis) 99
Величины 33
Вера математиков 6, 56, 59, 78, 98
Вейерштрасс (Weierstrass) 141, 142, 155
Вещественные числа 78, 147, 154
Возрождение 37
Восточная империя 38
Вьета (Viète) 41
Вывод 25, 166
Вычитание 48, 51, 61

Галилей 104, 105-123
Гарриот (Harriot) 50, 64
Гаусс (Gauss) 141, 163
Геометрические объекты 28, 103
Геометрия 162, 164,
— современная 142
Геродот 17
Герц (Hertz) 12
Гипербола 77
Гиппократ (Hippocratus) 17, 35
Греки 21, 23, 33, 39, 87, 95, 96, 147
Греческая геометрия 16, 17, 35, 143, 162
Гулливера путешествия 56

Д'Аламбер (D'Alembert) 138
Движение 40, 85, 86, 104
— , идея о нем 39

Двойственность в обозначениях 63
Декарт (Descartes) 41, 42, 47, 48, 54, 57, 64, 67, 70, 71, 76, 84, 90, 96, 115, 143
Деловые методы науки 15
Де-Морган (De-Morgan) 41, 172
Десятичная нумерация 24, 49
Диофант 31, 45
Дифференциалы 126, 129
— высшего порядка 134
Дифференциальное исчисление 99, 111, 126
— частное 112, 144
— ный треугольник 124
Дифференцирование 129, 133, 145
Дроби 20, 21, 33, 54, 55, 59, 75

Евдем (Eudemus) 32
Евдокс 95 (Eudoxus)
Евклид (Euclid) 17, 25, 95, 160, 164
Европа 37, 38
Египтяне 11, 17, 18, 19, 20, 21, 26, 50, 162
Единицы 119
Естествознание 4, 8, 15, 29, 39, 101

Жирар (Girard) 50

Законы природы 90, 102, 104
— логики 163
— мысли 163
Запросы, духовные 9, 12, 16
— , телесные 12, 16
Здравый смысл 170
Землемерие 17, 27, 35
Зенон (Zeno) 40, 94, 95
Знаки в математике 2, 22, 31, 45, 62, 63, 89, 127
Знание, инстинктивное 11, 109
— , образование его 13

Индукция 25, 162
Индусы 23, 35, 49
Инерции закон 121
Интеграл 129
Интегральное исчисление 98, 111
Интегрирование 131, 144, 145
Интерпретация символов 68
Иррациональные числа 56, 59, 75, 147, 152, 154
Истощения метод 95, 124

Кавальери (Cavalieri) 97, 98
Каком-либо, идея о 22, 89, 132
Касательная к кривой 82, 83, 112, 124, 125, 130, 133, 144, 145
Квадратные уравнения 65, 66, 81
Квадратур метод 92, 129
Кеплер (Kepler) 97, 125
Китайцы 19, 50
Классификация 11, 13
Клэро (Clairaut) 138
Книгопечатания изобретение 38
Кобб (Cobb H. E.) 172
Количества 33
Компенсация ошибок 133
Конические сечен. 76, 77, 122
Континуум 151
Координаты 74, 143
Косинус 36, 91, 92
Коши (Cauchy) 141
Кривая пространств 111, 113, 114
— скоростей 111, 113, 114
Критика 39, 59
Кубические уравнения 65

Лагранж (Lagrange) 138, 171
Ламберт (Lambert) 41

Лаплас (Laplace) 138
Лежандр (Legendre) 138
Леонард из Пизы 50
Лейбниц (Leibniz) 41, 71, 113, 126, 127, 135, 136, 137, 138, 139, 144
Логарифмы 48
Логика 15, 41, 60, 87, 88, 159-166
— символическая 53
— современная 2, 6, 41, 167
Логики 88
Логическое исследование математики 150

Мавры 37
Максвелл (Maxwell) 12
Математика и „математика" 7, 160
Математики, польза от 1, 2, 3
— приложение 3, 4, 167
— рост 11 и сл
— природа 9, 159, 170
Математическое открытие 8
Мах Э. (Mach) 171
Менехм 17, 29
Места 32, 34, 40, 77
Методы математические 5, 7
Механика 29, 103, 145
Механическая теория 151
Мнемонический характер символов в механике 118, 121
Могущество исчисления бесконечно-малых 132
Модель 102, 103
Морской Календарь 4, 102, 103
Мышления законы 163

Направленные величины 52
Начало 74
— геометрии 17
Nautical Almanac 4, 102, 103
Неделимых метод 97, 113, 128
Независимость движений 15
Несоизмеримые 32, 56, 147
Нужды духовные 9, 12, 16
— телесные 12, 16
Ньютон (Newton) 12, 104, 114, 122, 124, 135, 136, 137, 139, 144
Нэпер (Napier) 48

Объемы 92, 124
Обобщение понятия о числах 55, 56
Обозначение 23, 58, 99, 135
Обращение задачи о касательных 99
Общность алгебры 39, 69,
Описания 9, 14, 100, 123, 136, 151
Орбиты 122, 145
Ордината 74
Оси 71, 73
Отвлечение математики 26
Относительность 165
Отношения 153
Отрицательные количества 74

Папп 77
Парабола 77, 115, 131
Паскаль (Pascal) 98
Переменная 14, 39, 71, 86, 88, 89, 90, 129, 140, 167
Пересечения точки 82
Пифагор 25, 32
Платон 17
Площади 93, 94, 96, 97, 111, 116, 124, 127, 144
Плутарх 29
Подобие 156
Показатели 47
Поместное значение символов 24
Последовательность 140, 147-152

Постоянная 41
Предвосхищение фактов, мысленное 16, 103, 158
Предел 84, 113, 140, 146-156
— верхний 140
Предложения 167
Принципы Математики 6, 160-170
Пробелы в системе рациональных чисел 153
Прокл 17, 25, 32
Пропорции 118
Пространственные представления 142, 145
Пространство 165
Прямая линия, уравнение ее 73, 76
Психология 8
Птоломей 35
Пуассон (Poisson) 138

Равнобедренный треугольник 28
Размерности 120
Распространение знания 14
Рассуждение математическое 5, 7, 26
Рациональные числа 147, 153
Рекорд (Record) 50
Риманн (Riemann) 141
Римляне 21, 37, 74
Роберваль (Roberval) 98, 123, 136
Рёссель (Russel) 171
Ряды 148

Свифт (Swift) 56
Связь 30
Символизм 31, 143, 159
Символы арифметики 50
Синус 36, 91, 92
Скорость 105-123, 136, 144
Сложение 22, 48, 51, 60, 61, 68
Сумма ряда 149
Сфера, уравнение ее 85
Сходство 156

Теория чисел 142, 163
Точка, движущаяся 40, 86
Тригонометрия 32, 35, 91
— сферическая 35

Умножение 22, 48, 51, 55, 66, 119, 127
— логическое 53
Уравнение круга 73, 75, 77, 79-83
— кривой 73, 136, 143
— я, механические 119
Ускорение 109, 121, 134, 136, 144

Фалес 26, 28, 15
Фарадэй (Faraday) 13
Ферма (Fermat) 125, 163
Финк (Fink) 171
Физика, математическая 123, 158
Философы 10, 39, 87, 98
Флюксия 136
Флюксий, метод 114, 123, 136, 144
Флюэнта 136
Французская революция 138
Функциональность 64, 90
Функция 39, 41, 64, 72, 91, 141, 166, 167, 168
— , пропозиционная 168
Фурье (Fourier) 138

Целых чисел определение 154

Частное 48
Частные сущности 142
Чета 158

„Числа“ 33, 54, 59, 61, 146, 154, 155
Числа без знака 59
— , комплексные 68, 142
— , мнимые 66
— , отвлеченные 51, 56
— , отрицательные 6, 60, 61, 63
— , положительные 61, 154
— , порядковые 157
— , предметные 51
— , представление их при помощи точек 54, 74, 75, 151
Экономия мысли 4, 15, 16, 24, 28, 32, 47, 57, 99, 132, 135, 143, 171
Эллипс 77
Эйлер (Euler) 92, 137

СКЛАД ИЗДАНИЯ:
Одесское Отделение
Гос. Издат. Украины
Одесса, Пушкинск. 1