АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. В. И. РОМАНОВСКОГО

Г. П. МАТВИЕВСКАЯ

УЧЕНИЕ О ЧИСЛЕ НА СРЕДНЕВЕКОВОМ БЛИЖНЕМ И СРЕДНЕМ ВОСТОКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» УЗБЕКСКОЙ ССР
Ташкент · 1967

51
М33

В книге рассматриваются основные разделы учения о числе в математике Ближнего и Среднего Востока в средние века (теоретическая и практическая арифметика, алгебра). Особое внимание уделено формированию понятия иррационального числа.

Работа написана на основании литературных данных и на материале ряда арабских математических рукописей IX—XIII вв. Приводится русская и иностранная библиография, а также биобиблиографические данные о средневековых восточных математиках.

Книга рассчитана на специалистов по истории математики и студентов математических факультетов вузов; может представить интерес и для широкого круга читателей.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

академик АН УзССР *С. Х. СИРАЖДИНОВ*

ВВЕДЕНИЕ

Изучение математики стран Ближнего и Среднего Востока периода средневековья относится, несомненно, к наиболее интересным проблемам, стоящим сегодня перед историей науки. Исследователь находит здесь широкое поле деятельности, так как, несмотря на большую работу, которая уже проделана в этом направлении, многие вопросы, важные и для истории мировой математики и для истории культуры Востока, до сих пор остаются нерешенными.

Решить их и, в частности, дать объективную оценку уровня, достигнутого восточной математикой в средние века, можно лишь на основе исследования подлинных рукописей математического содержания, хранящихся в библиотеках Европы и Азии. По мере изучения рукописей, начатого в первой половине прошлого столетия, менялась и эта оценка. Если первоначально считалось, что единственная заслуга средневековых восточных ученых состояла в сохранении и передаче в Европу греческого и отчасти индийского научного наследия, то впоследствии, когда были выявлены замечательные результаты их собственного творчества, полученные главным образом при решении практических задач, сложилось представление о сугубо прикладном характере математики этого периода. Часто высказывалось мнение, что, хотя в разработке вычислительных методов здесь добились значительных успехов, в отношении теории был сделан шаг назад в сравнении с греческой наукой, все идейное богатство которой будто бы осталось не понятым восточными учеными.

Работы последних лет внесли существенные изменения в эту, достаточно прочно укоренившуюся оценку. Оказалось, что средневековые восточные математики не только проявляли интерес к наиболее сложным вопросам теории, но и получили результаты, оказавшие серьезное влияние на труды европейских ученых XIII—XVI вв. Такой вывод позволяют сделать исследования Б. А. Розенфельда, А. П. Юшкевича по теории параллельных линий на средневековом Востоке.

Другим примером такого рода является учение о числе. Генезис понятия числа — одного из основных понятий математики — представляет собой долгий и сложный исторический процесс, на разных этапах которого в понятие числа вкладывалось различное содержание. Как теперь выясняется, труды средневековых восточных математиков оказали большое влияние на ход этого процесса, завершившегося в XIX в. созданием и обоснованием понятия действительного числа.

Цель предлагаемой работы — обобщить уже известные факты и на основании нового материала раскрыть содержание учения о числе на Ближнем и Среднем Востоке в средние века. Постановка вопроса требует описания предыстории этого учения, поэтому значительное внимание уделено результатам, полученным в математике Древней Греции и Индии. В последней главе в общих чертах показано, какое влияние оказали труды восточных ученых в области математики на развитие европейской науки.

Книга должна помочь исследователю ориентироваться в фактическом материале, относящемся к рассматриваемой теме. Мы не имели возможности подробно осветить вопрос с учетом всех имеющихся данных, поэтому обращаем особое внимание на обзор литературы с тем, чтобы работы, в которых упущенные моменты освещаются досконально, попали в поле зрения читателя.

Материалом для написания некоторых разделов (в частности, гл. VI) послужили переводы арабских математических рукописей, выполненные автором.

Работа осуществлена в плане исследований по истории восточной математики, проводимых в течение ряда лет в Институте математики АН УзССР под руководством акад. АН УзССР С. Х. Сираждинова.

Автор выражает благодарность проф. Б. А. Розенфельду и проф. А. П. Юшкевичу за оказанное внимание к работе и ценные консультации.

Глава I. ЧИСЛО И ВЕЛИЧИНА В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

§ 1. Предпосылки развития и общая характеристика древнегреческой математики

Математика Древнего Египта и Вавилона

Историки науки располагают в настоящее время достоверными данными, позволяющими в общих чертах нарисовать картину развития математики в весьма отдаленную эпоху, начало которой ориентировочно относится к XX в. до н. э. Наиболее веские из этих данных, касающиеся математических познаний Древнего Египта и Вавилона, получены благодаря расшифровке обнаруженных археологами подлинных текстов того времени.

О характере древнеегипетской математики судят главным образом по двум папирусам математического содержания; один из них, открытый в 1858 г. (папирус Райнда), хранится в Лондоне, а другой — в Москве [732, 839]. Сведения о вавилонской математике черпаются из найденных при раскопках глиняных клинописных табличек, многие из которых содержат разнообразные математические тексты или таблицы [724, 725, 903]. Открытие этих документов, в корне меняющих взгляд на ранний период развития математики, вызвало в свое время огромный интерес историков науки и породило обширную литературу, посвященную их изучению.

Исследования показали, что в Египте и Вавилоне — странах древней высокоразвитой цивилизации — уже около 2000 г. до н. э. накопился большой запас сведений из различных областей прикладной математики. Такие сведения приобретались в ходе решения задач, возникающих в практике землемерия, строительного дела, торговли и особенно астрономии, развитие которой стимулировалось потребностями поливного земледелия, характерного для этих стран.

В египетских математических папирусах отражены конкретные хозяйственные задачи, решение которых приводило к операциям с целыми числами и дробями, к вычислению площадей геометрических фигур и объемов тел.

Система счисления, на которой основывалась египетская математика, десятичная иероглифическая. Арифметика носила аддитивный характер, т. е. операция умножения сводилась к последовательному сложению.

Дроби понимались как доли единицы $\frac{1}{n}$, и всякую дробь вида $\frac{m}{n}$ представляли в виде суммы таких долей, что было очень громоздко и требовало значительного искусства в проведении вычислений; для упрощения широко применялись вспомогательные таблицы разложения дробей вида $\frac{2}{n}$. Египетская теория дробей привлекает внимание многих историков математики; в ряде работ [87, 88, 100, 101, 241, 260, 392, 721, 723, 726, 913 и др.] даны реконструкции приемов, применявшихся в вычислениях с дробями.

Некоторые задачи египетской арифметики сводились к операции, названной «исчислением кучи» и соответствовавшей решению линейного уравнения с одним неизвестным. Встречаются также задачи, для решения которых требовалось определить сумму членов арифметической и геометрической прогрессий.

Что касается геометрии, то египтяне умели определять площади прямоугольника, треугольника, трапеции, круга (при этом значение π принималось равным 3,1605), а также объемы куба, параллелепипеда, кругового цилиндра, пирамиды и даже усеченной пирамиды с квадратным основанием [241, 259, 260, 687, 688].

Математика Древнего Вавилона [78—82, 88, 100, 101, 103, 182, 241, 252—254, 256, 257, 259—262, 418, 451, 722, 726, 902, 903, 917] достигла еще более высокого уровня, чем египетская. Она основывалась на шестидесятиричной системе счисления, построенной по позиционному принципу, но без применения нуля; особый знак для обозначения пустого промежуточного разряда появился в поздний период вавилонской истории (середина I тыс. до н. э.), однако он не применялся при отсутствии последних разрядов [82, 103, 726]. Вавилонская шестидесятиричная система сыграла большую роль в развитии науки, прочно укоренившись в математике и астрономии последующих веков (например, деление угла на градусы, минуты и секунды) [82, 87, 241, 260, 722, 726].

Для математики Древнего Вавилона характерно высокое развитие вычислительной техники. Здесь широко использовались значительно облегчавшие вычисления вспомогательные таблицы (произведений, обратных значений, квадратов, кубов, квадратных и кубических корней, степеней данного числа, чисел вида n^3+n^2 и т. д.). Из текстов видно, что вавилоняне умели приближенно извлекать квадратный корень. Возможно, что им был известен итерационный метод, согласно которому, если за первое (недостаточное) значение $\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r}$ (где a^2 — наибольший целый квадрат, содержащийся в A) взять $a_1=a$, а в качестве избыточного значения принять $b_1=\frac{A}{a_1}$, то второе приближение дается средним арифметическим $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$. Аналогично $a_3=\frac{a_2+b_2}{2}$, $a_4=\frac{a_3+b_3}{2}$, где $b_2=\frac{A}{a_2}$, $b_3=\frac{A}{a_3}$, Вероятно [383, 384, 419, 726], таким способом было получено вавилонское приближенное значение $\sqrt{2}=1, 24, 51, 10$ (в шестидесятиричной системе).

О вычислительных методах, применявшихся в вавилонской математике, сведения не сохранились, все известные тексты дают только готовый рецепт решения задачи, но не содержат ни указания пути, которым пришли к этому решению, ни, тем более, доказательства правильности последнего. Сейчас предложены различные реконструкции вавилонских методов, которые, хотя и относятся к области предположений, весьма вероятно, близки к действительным [78—82, 256, 257, 259—262, 726].

Интересные сведения получены и при исследовании клинописных текстов с практическими задачами геометрического содержания. Из них, в частности, следует, что вавилонянам была известна так называемая «теорема Пифагора» и различные формулы для вычисления площадей и объемов. Значение π в вавилонской математике принималось чаще всего равным 3; однако недавно [726] обнаружена задача, в которой $\pi=3\frac{1}{8}$.

В клинописных текстах встречается ряд результатов, которые мы отнесли бы к теории чисел. Среди них — задача о нахождении так называемых «пифагоровых чисел» (т. е. троек чисел, выражающих длины сторон прямоугольного треугольника) и другие задачи [78, 82, 726].

Замечательным достижением вавилонской математики является создание числовой алгебры. Тексты многочисленных клинописных табличек показывают, что существовали хорошо разработанные приемы решения задач, сводящихся к линейным, квадратным, даже к кубическим и биквадратным уравнениям; решались также системы линейных уравнений с двумя неизвестными. Хотя в текстах каждый раз рассматривался конкретный числовой пример, не вызывает сомнения, что вавилонянам был известен и общий прием решения уравнений. Изучение табличек показало, что вавилонскую алгебру уже нельзя рассматривать только как набор результатов, полученных чисто опытным путем. По словам Н. Бурбаки, «если в текстах мы еще не находим ничего похожего на «доказательство» в формальном смысле слова, все же имеются все основания полагать, что открытие таких приемов решения, общность которых видна из частных применений к числовым примерам, не могло иметь места без хотя бы минимального количества логических рассуждений, возможно, еще не вполне осознанных, но схожих с теми, на которые опирается современный алгебраист, когда предпринимает вычисление до «окончательного оформления» всех деталей» [77, стр. 10].

Краткий перечень результатов, полученных в Египте и Вавилоне, показывает, что математические познания народов этих стран заслуживают высокой оценки. Если учесть, что сведения, сохранившиеся до наших дней, очень отрывочны и неполны, то можно ожидать, что по мере обнаружения новых данных эта оценка еще более повысится.

Итак, древнеегипетская и древневавилонская математика представляла собой прежде всего совокупность приемов для решения вычислительных и измерительных задач, возникающих в повседневной практической жизни и теснейшим образом с ней связанных. В ходе совершенствования этих приемов появился, как это видно в вавилонской математике, более общий подход к постановке и решению математических задач, поэтому с полным правом можно говорить о зарождении здесь первых ростков теоретической науки.

Тем не менее математика Египта и Вавилона по существу оставалась эмпирической. Отсутствие общих понятий и утверждений, а главное — доказательства как основного пути к достижению математической истины показывает, что здесь еще не возникла та связная логическая теория, которая понимается под словом «математика». Именно поэтому древнеегипетскую и древневавилонскую математику относят к периоду зарождения математической науки, когда лишь накапливался материал для ее построения [179].

Математика Древней Греции

Все достигнутое в рассмотренный период перешло как наследство в середине I тыс. до н. э. из Египта и Вавилона в Грецию, где на этой базе была создана математика в ее современном понимании. Здесь впервые математика из совокупности прикладных знаний превратилась в систематически построенную дедуктивную науку с присущим ей отвлеченным характером и общностью выводов [2]. Доказательство стало основой, на которой строится вся математика. По логической строгости греческая математика не уступает математике современной и, выражаясь словами Цейтена, «в области доказательства нам ничего на остается, как только подражать древним» [350, стр. 30].

Ставшее характерным для науки Греции стремление к обобщению и систематике привело к созданию первых математических теорий. Результаты, достигнутые классиками античности, послужили действительным фундаментом современной математики, ибо ее творцы прямо или косвенно являлись учениками греков. Все это объясняет, почему в особенности к греческой математике применяют известные слова Энгельса: «Теоретическое естествознание, если оно хочет проследить историю возникновения и развития своих теперешних общих положений, вынуждено возвращаться к грекам» [369, стр. 314]. Именно поэтому наибольшее число историко-математических исследований посвящено математике Древней Греции; в нижеследующем обзоре мы используем лишь небольшую часть из них [3, 4, 33, 35—43, 77, 87, 89, 91, 101, 102, 107, 108, 110, 163, 180—182, 212—217, 225, 237, 248, 255, 350, 373, 393, 414—419, 442, 461, 480, 495, 496, 501, 503, 573, 583, 585—589, 597, 598, 600—602, 604—607, 890—894, 914, 915, 918—921, 932, 933, 1028, 1031—1036].

То качественно новое, что проявилось в древнегреческой математике и отличает ее от предшественниц на Востоке, дало основание считать время, когда начался ее расцвет (VI в. до н. э.), началом нового периода истории математики — периода элементарной математики [179, 383].

К VI в. до н. э. греческие города-государства в силу многих — экономических, политических, географических и других — причин приобрели господствующее положение в районе Средиземноморья. С этого времени начался бурный подъем всех областей хозяйственной и культурной жизни Греции. Наряду с техникой, искусством достигла расцвета и наука. Почетное место среди других наук заняли философия и математика, которым уделялось особенно много внимания в греческих натурфилософских школах — милетской, пифагорейской, афинской и др. «В многообразных формах греческой философии, — писал Энгельс, — уже имеются в зародыше, в процессе возникновения, почти все позднейшие типы мировоззрений» [369]. Философия греков, как материалистическое ее направление, так и идеалистическое, на протяжении всей своей истории развивалась в теснейшей связи с естественными науками и прежде всего с математикой, к которой в той или иной форме обращались почти все крупные греческие мыслители.

Несомненное влияние на развитие математики оказывали потребности естествознания [43, 116].

Античные историки единодушно подтверждают, что первоначальные математические познания греки заимствовали из стран древнего Востока, восприняв при этом не только фактический материал, но и имевшиеся там в зародыше элементы теоретической науки. Многим математикам, например, основателю милетской школы Фалесу (ок. 624—548 гг. до н. э.) и «отцу греческой геометрии», главе пифагорейского союза — Пифагору (ок. 570—500 гг. до н. э.) традиция определенно приписывает путешествия в Египет и Вавилон для изучения наук.

Вопрос о том, что послужило причиной превращения математики в дедуктивную науку, вырос сейчас в одну из важных проблем истории математики и вызвал в литературе оживленную дискуссию [39, 43, 82, 111, 181, 299, 393]. Ответ на поставленный вопрос, несомненно, требует изучения условий общественно-политической жизни Греции того времени, которое показывает, что уже в самих этих условиях были заложены стимулы дедуктивного метода, нашедшего применение в философии, политике, юриспруденции и в математике.

Отличительную черту греческой математики в этот период составляет преимущественное развитие теоретических ее разделов в ущерб практическим. Вычислительная арифметика (в противоположность теоретической) и числовая алгебра составляли особую отрасль знания—логистику, стоявшую вне науки. Именно поэтому прикладные задачи почти не фигурируют в сочинениях классического периода, что чрезвычайно затрудняет изучение вычислительных методов, применявшихся греками.

Математика, сформировавшись в систематически построенное дедуктивное учение, приобрела необычайно быстрый, особенно в сравнении с предыдущими веками, темп развития. В течение VI—IV вв. до н. э. были сделаны самые замечательные открытия греков и созданы основные математические методы. На период в три — четыре столетия приходится деятельность таких титанов греческой науки, как уже упоминавшиеся Фалес и Пифагор, как Гиппократ Хиосский (VI в. до н. э.), Архит Тарентский (ок. 428—365 гг. до н. э.), Феодор Киренский (V в. до н. э.), Теэтет Афинский (IV в. до н. э.), Евдокс Книдский (ок. 405—355 гг. до н. э.). В это же время жили и творили крупнейшие греческие философы, оказавшие огромное влияние на развитие математики и ее методов: Демокрит (VI в. до н. э.), Зенон Элейский (V в. до н. э.), Платон (429—348 гг. до н. э.) и Аристотель (384—322 гг. до н. э.).

В трудах Аристотеля [6—8, 39, 82, 107, 146, 147, 393, 402, 571, 588, 589], хотя он и не был математиком, этой науке и вопросам ее обоснования отведено большое место. Проявив незаурядное знание арифметики и элементарной геометрии, он изложил теорию доказательства, разъяснил основные математические понятия, исследовал различие между аксиомами, определениями, гипотезами и постулатами, дал четкие формулировки предмета и метода математики и определил ее место среди других наук. Много внимания Аристотель уделил основным философским вопросам математики своего времени и прежде всего проблеме бесконечного и проблеме непрерывного и дискретного. Огромное влияние на математиков оказали также сочинения Аристотеля по логике.

Следующий — эллинистический период развития греческой математики, закончившийся, ориентировочно, около 200 г. до н. э., представлен не менее замечательными именами: Евклид (IV—III вв. до н. э.), Аристарх Самосский (III в. до н. э.), Архимед (287—218 гг. до н. э.), Эратосфен (276—194 гг. до н. э.), Аполлоний Пергский (265—170 гг. до н. э.) и др. К концу эллинистического периода в греческой математике уже была построена система элементарной геометрии, созданы основы теории чисел, геометрическая алгебра, общая теория отношений, игравшая в то время роль современной теории действительного числа, элементы теории пределов и, наконец, общая теория конических сечений [39, 42].

Итог развития математики почти за триста лет подвел Евклид в своих знаменитых «Началах» [85, 134, 541, 587, 896]. Это сочинение, излагающее систематически построенную математическую теорию древних, является не только основным источником наших знаний об античной математике, но и ключом к пониманию путей развития математической мысли в последующие века: система геометрии, представленная в «Началах», — это та основа, на которой базируется вся математика и механика средних веков и нового времени. По этому сочинению изучали математику и на средневековом Ближнем и Среднем Востоке, и в средневековой Европе; и сейчас на его основе (хотя и значительно упрощенно) строится курс школьной геометрии. «Начала» пережили огромное число изданий — в этом с ними могут соперничать лишь очень немногие книги; комментированием труда Евклида занимались крупнейшие математики всех времен. Поэтому не удивительно, что исследованию «Начал» посвящена сейчас обширная историко-научная литература [3, 4, 33, 36, 42, 82, 85, 102, 108, 225, 237, 255, 350, 415—419, 480, 490, 587, 588, 590, 591, 607, 617—619, 627, 664, 685, 735, 739, 816, 819, 824, 829, 849, 887, 896, 897, 928, 929, 931, 1034—1036]. Более подробно о некоторых разделах «Начал» Евклида речь будет идти ниже.

Особо следует остановиться на инфинитезимальных методах, широко применявшихся в античной математике. Основой их служила теория пределов в ее первоначальной форме — так называемый «метод исчерпывания», созданный Евдоксом [39, 42, 180, 182, 214, 350, 373, 377, 418, 419]. С помощью этого метода были разработаны интеграционные приемы, которые применялись при нахождении площадей и объемов, и дифференциальные, служившие для отыскания экстремумов и касательных к кривым. Особенно важны с точки зрения развития этих методов труды Архимеда, в частности, его сочинения «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах», сыгравшие громадную роль в создании метода бесконечно малых в XVII в. [9, 35, 37—42, 89, 163, 198—200, 214, 216, 352, 414, 586, 1006].

В позднеэллинистический период, который продолжался до VI в. н. э., протекала научная деятельность Герона Александрийского (I в. до н. э.), Никомаха Геразского (I в.), Гиппарха (II в.), Клавдия Птолемея (II в.), Диофанта (III в.), Паппа Александрийского (III в.), Теона Александрийского (IV в.).

В конце второго, но особенно в третий из названных периодов античная математика изменила русло своего развития, обратившись под воздействием возросших требований других отраслей науки (главным образом, астрономии и механики) и практики к разработке прикладных вопросов [39, 41—43, 383]. Так, потребности развивающейся астрономии стимулировали создание методов, равносильных плоской и сферической тригонометрии; в трудах Гиппарха, Менелая и Птолемея она сформировалась в так называемое «исчисление хорд» [39, 82, 449, 461, 576, 1030]. Кроме того, астрономия предъявляла свои требования и к арифметике, поставив задачу совершенствования вычислительных методов, так как это было необходимо для построения астрономических таблиц. Вообще центр тяжести в математике этого периода переместился в существенно новые для греческой науки области. Начался процесс постепенной арифметизации и алгебраизации математики [39, стр. 418—421].

В то же время приостановились исследования в направлениях, которые в классический период были основными, и прежде всего — по геометрии. Не получили дальнейшего развития дифференциальные и интегральные методы, обузой для алгебры стала ее геометрическая форма, от которой начали постепенно отказываться уже в то время.

Имеются различные взгляды на сущность изменений, происшедших в математике эллинистического периода, и породившие их причины [82, 350, 726]. Иногда эти изменения рассматриваются как полный упадок (и даже регресс) греческой математики, начавшийся сразу после Аполлония [82] и вызванный рядом внешних (экономический и политический упадок) и внутренних (трудности геометрической алгебры в связи с прекращением устной традиции в передаче знаний) причин.

В противовес такому взгляду выдвинут другой, согласно которому речь следует вести не об упадке античной математики и, тем более, не о ее регрессе, а лишь о переключении интересов на другие вопросы. Успешное развитие нового направления было прервано экономическим и политическим кризисом, постигшим весь античный мир, а затем и его гибелью [39—43, 181].

Рассмотрим, в какой форме выступало в математике Древней Греции учение о числе. Прежде всего остановимся на практической арифметике этого периода — логистике.

§ 2. Логистика

Согласно взглядам греков, математика имела две ветви, между которыми предполагалось принципиальное различие. Одна из них — собственно математика — изучала то, что в количественном отношении не подвергается изменению, возникновению, уничтожению. Объекты такого рода, считавшиеся единственно доступными точному знанию, подразделялись на непрерывные величины (линии, плоскости, тела, углы и т. д.) и дискретные количества (целые числа). Соответственно выделялись и две науки: геометрия и арифметика. Под термином «арифметика» понималось, следовательно, не учение о числовых операциях вообще, а лишь наука о самих числах; предмет ее в значительной степени совпадал с предметом современной теории чисел. К теоретическим разделам математики относили также теорию музыки — гармонию и теоретическую астрономию.

Вторая ветвь — прикладная математика, по существу наукой не считавшаяся, занималась количественными отношениями, существующими между реальными чувственно воспринимаемыми объектами. К ней относилась геодезия, представлявшая собой искусство измерения земли и вообще поверхностей и объемов, а также искусство счета, носившее название логистики.

Логистика, в противоположность арифметике, рассматривала сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратных и кубических корней, действия с дробями и т. д., а также простейшие задачи числовой алгебры, сводящиеся к решению уравнений первой и второй степени, систем уравнений с двумя и более неизвестными, к численному решению некоторых неопределенных уравнений и т. д. Логистика обучала также приемам вычислений с помощью абака — древнегреческого счетного прибора. Примечательно, что правила логистики обычно не сопровождались доказательствами, а предлагались в виде готового рецепта так же, как и в древнеегипетских математических текстах.

Помимо геодезии и логистики, к прикладным областям математики относились также механика и оптика, в которой, в свою очередь, выделялись собственно оптика, теория отражения и прикладная перспектива; этим разделам придавалось большое значение. Астрономия занимала промежуточное положение и являлась одновременно наукой теоретической и практической, основанной на наблюдениях и практических вычислениях.

Однако было бы неверным заключить, что в классический период прикладная математика греков стояла на низком уровне. Замечательные достижения греческой строительной техники предполагали существование развитых вычислительных и измерительных методов. В этом смысле практическая математика органически входила и в архитектуру, где огромное значение придавалось пропорции, и в планирование городов, юриспруденцию, торговлю, военное дело и т. д. [39, 116, 133, 215].

Выдающиеся греческие математики, как показывает анализ некоторых сочинений, владели тонкими приемами вычислений. Виртуозную вычислительную технику продемонстрировал Архимед, который, в противоположность большинству своих современников, в научных трудах часто решал задачи, возникающие из практики.

В проведении вычислений греки, как свидетельствуют многие литературные и исторические памятники, были достаточно искусны уже в древний период своей истории. Если сначала при счете пользовались пальцами и камешками, то затем главным инструментом стала счетная доска — абак, который, судя по сообщениям древних историков, был заимствован у египтян, но еще более вероятно — у вавилонян [91, 182]. Абак прочно вошел в практическую математику греков и впоследствии римлян; с его помощью считали и много столетий спустя в средневековой Европе [384, 461, 549].

Для обозначения чисел в Древней Греции применялись две системы счисления: иероглифическая — так называемая аттическая (или Геродианова) и более поздняя алфавитная — ионийская [39, 91, 182]. Вторая из них, более удобная, в эпоху эллинизма полностью вытеснила традиционную аттическую систему. Древние греки не пришли к созданию десятичной позиционной системы, хотя, казалось бы, были совсем близки к идее обозначения любых чисел с помощью десяти знаков; об этом, в частности, свидетельствует счет с помощью октад, разработанный Архимедом в его знаменитом сочинении «Псаммит» [9, 39, 83, 89, 182, 216, 248, 256], в котором доказана бесконечность числового ряда и дан способ выражения сколь угодно большого числа.

Техника сложения, вычитания и умножения не отличалась существенно от современной. Относительно того, как осуществлялось действие деления, сведений не сохранилось. При вычислениях широко пользовались вспомогательными таблицами.

В греческой логистике было хорошо разработано учение о дробях. Помимо аликвотных дробей вида $\frac{1}{n}$, которые применялись ранее в Египте, греки оперировали также дробями вида $\frac{n-1}{n}$ («дополнительная дробь»), а главное—здесь впервые стали рассматриваться дроби общего вида $\frac{m}{n}$. Введение их имело огромное значение не только для самой теории дробей, но оказало большое влияние и на теоретическую арифметику. В астрономии применялись также шестидесятиричные дроби, заимствованные из вавилонской математики.

Широко обсуждается в историко-математической литературе вопрос о методах приближенного вычисления корней, применявшихся в греческой математике. Особенно много внимания уделяется реконструкции метода, которым Архимед в сочинении «Измерение круга» [9, стр. 266—270] получил приближение

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

[39, 101, 182, 215, 484, 492, 495, 501, 573, 600, 601, 605, 708, 915].

Из трудов Архита и Герона известен прием извлечения квадратного корня, имеющий вавилонское происхождение: пусть дано некоторое неквадратное число A и известно какое-либо приближение x_1 для $\sqrt{A}$; тогда более точное приближение дается формулой

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{A}{x_1}\right). \qquad (*)$$

В одном из сочинений Архита указана связь операции приближенного извлечения корня по этому методу с взятием трех средних (арифметического, геометрического и гармонического), игравших в греческой математике и особенно в теории музыки большую роль [39, 82, 91, 419]. Действительно, пусть в (*)

$$x_1 = a, \ \frac{A}{x_1} = b;$$

тогда искомый корень $\sqrt{A} = \sqrt{ab}$ есть среднегеометрическое, найденное в (*) приближение $\frac{1}{2}(a+b)$ — среднеарифметическое, а для получения следующего приближения нужно взять $\frac{A}{x_2}$, т. е.

$$\frac{A}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

— среднегармоническое. Этим методом Архит вычислил приближенное значение $\sqrt{2}$.

Второй метод получения последовательных приближений $\sqrt{2}$, состоящий в отыскании так называемых „диагональных чисел“, имеет также древнее происхождение [39; 82; 134, т. I, стр. 312—314; 182; 461; 597; 604; 606].

Пусть дан квадрат со стороной a и диагональю d; ищутся приближенные значения отношения $\frac{d}{a}$. Полагается, что $a = 1$, $d = 1$, т. е. первое приближение есть $\frac{d_1}{a_1} = \frac{1}{1}$. Оно удовлетворяет уравнению

$$d^2 - 2a^2 = \pm 1.$$

Для получения второго приближения к стороне прибавляется диагональ, а к диагонали — две стороны; т. е.

$$a_2 = a_1 + d_1 = 2,\ d_2 = 2a_1 + d_1 = 3,$$

причем снова удовлетворяется уравнение $d^2 - 2a^2 = \pm 1$.

Продолжая далее, получаем n-е приближение

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1} \quad d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}$$

где

$$d_n^2 - 2a_n^2 = \pm 1.$$

Таким образом получим последовательные приближения

$$\frac{d_1}{a_1} = \frac{1}{1},\ \frac{d_2}{a_2} = \frac{3}{2},\ \frac{d_3}{a_3} = \frac{7}{5},\ \frac{d_4}{a_4} = \frac{17}{12},\ .$$

Этот метод основан, по существу, на разложении $\sqrt{2}$ в непрерывную дробь; последовательные приближения представляют собой последовательные подходящие дроби.

§ 3. Теоретическая арифметика. Учение о числе в школе Пифагора

Пифагор и его школа

К наиболее ранним и в то же время особенно значительным явлениям античной математики относится творчество Пифагора Самосского и созданной им школы. Возникновение этой замкнутой организации, деятельность которой отличалась философско-мистическим характером, древние историки относили ко второй четверти VI в. до н. э. Личность ее основателя в настоящее время представляется полулегендарной, так как точных сведений о его жизни и научном творчестве не сохранилось, а сообщения античных авторов основаны, в значительной степени, на позднепифагорейской традиции, которая не всегда заслуживает доверия; согласно этой традиции, Пифагору приписывались все математические открытия его последователей, сделанные не только в его время, но и значительно позднее. Тем не менее имеется достаточно много исторически достоверных данных, показывающих, какой вклад в математику внесли представители пифагорейской школы, к числу которых относятся такие крупнейшие ученые античного мира, как Архит Тарентский, Феодор Киренский, а из более поздних — Никомах Геразский. Несмотря на различие в оценках роли пифагорейцев в истории науки, исследователи сходятся на том, что, несомненно, деятельность этой школы оказала огромное влияние на развитие древнегреческой математики. Такой вывод особенно справедлив в отношении учения о числе.

Из сообщений древних источников следует, что именно в пифагорейской школе геометрия превратилась в логически построенную науку, истины которой устанавливались с помощью систематического доказательства. Основные понятия — число, величина, линия, поверхность, тело, угол и т. д. у пифагорейцев впервые выступили в отвлеченном виде, в то время как у их восточных предшественников эти понятия были неотделимы от практических задач, в которых они фигурировали. Практические приемы для решения задач геодезии и вычислительной математики в школе Пифагора стали общими теоремами; здесь в основных чертах было завершено построение планиметрии прямолинейных фигур.

Большой интерес проявляли пифагорейцы к астрономии и теории музыки и сделали в этих областях основополагающие открытия. В частности, в астрономии они первыми пришли к представлению о шарообразности Земли и других небесных тел, знали о зодиаке и склонении эклиптики. Несмотря на значительный элемент мистики, их учение создало почву для дальнейшего развития астрономии как науки [39, 82, 108]. В теории музыки пифагорейцы установили, например, зависимость высоты тона от длины струны; эту зависимость они умели выражать с помощью числовых соотношений [39, 82, 83, 891].

Особое место в их исследованиях занимала наука о числе, на которой основывалась не только вся пифагорейская математика, астрономия и музыка, но и философия.

Арифметика пифагорейцев

Основные результаты, полученные пифагорейцами в арифметике, сейчас хорошо известны не только из сообщений греческих историков, но и в результате анализа арифметических сочинений более позднего времени, на которых отразилось влияние их числовой теории. В частности, благодаря изучению «Начал» Евклида установлено, что VII, VIII и IX книги этого сочинения имеют пифагорейское происхождение [82, 417, 912].

Арифметика пифагорейцев представляла собой учение о натуральных числах. В основное понятие арифметики — число вкладывался совершенно иной смысл, чем в современной математике: под числом понимали только совокупность единиц, причем саму единицу к числам не относили. Она рассматривалась скорее как философское понятие и определялась (согласно формулировке, данной в «Началах» Евклида) следующим образом: «Единица есть то, через что каждое из существующих считается единым» (кн. VII, определение 1). Единица предполагалась неделимой, вследствие чего понятие дроби в арифметике пифагорейцев не существовало.

Чрезвычайное внимание, которое уделялось учению о числе, объяснялось в значительной мере ролью, которую оно играло в философской системе, созданной в пифагорейской школе. Изучение астрономии и особенно музыки позволило сделать вывод о том, что многие законы природы можно выразить отношениями чисел. Обобщив его, пифагорейцы пришли к мысли, что эта числовая зависимость выражает сущность отношений между всеми объектами реального мира и пришли к выводу, составляющему ядро их философского учения: числа являются прототипами вещей, вещи представляют собой отражения чисел. Аристотель говорит по этому поводу: «Так называемые пифагорейцы, занявшись математическими науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их началами всех вещей. Но в области этих наук числа занимают от природы первое место, а у чисел они усматривали, казалось им, много сходных черт с тем, что существует и происходит, больше, чем у огня, земли и воды, например, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то — душа и ум, другое — удача, и, можно сказать, в каждом из остальных случаев, точно так же. Кроме того, в числах они видели свойства и отношения, присущие гармоническим соотношениям. Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю вселенную признали гармонией и числом» [7, стр. 26—27].

Символический смысл, придававшийся понятию числа, побудил пифагорейцев с особым старанием отнестись к изучению законов, которые управляют числами. Знание этих законов, по их мнению, должно было привести к познанию мира и помочь управлять им.

Такое отношение к науке о числах привело, с одной стороны, к тому, что на ее выводах в течение долгих веков основывалась всякого рода числовая мистика [83, 84, 356], но, с другой стороны, оно послужило мотивом для глубоких исследований, сделавших пифагорейцев основоположниками современной математической дисциплины — теории чисел.

Наиболее древним разделом пифагорейского учения о числе была, как показал О. Беккер [417, 419], теория четных и нечетных чисел. Эта теория, изложенная впоследствии в IX книге «Начал» Евклида (предложения 21—34, 36), дала возможность доказать несоизмеримость стороны и диагонали квадрата и придти, таким образом, к открытию понятия иррациональности. Более позднее происхождение имеет теория числовых отношений и делимости чисел, изложенная в VII книге «Начал»; как установил Ван дер Варден [82, 912], есть основание считать, что эта теория в своем первоначальном виде («Начала», кн. VII, предложения 1—36) оформилась в пифагорейской школе в период, предшествовавший Архиту, т. е. до 400 г. до н. э.

Пифагорейская арифметика являлась по существу геометрической арифметикой, в которой для представления чисел и интерпретации их свойств использовались геометрические образы [39, 182, 350, 419, 461, 1034, 1035]. Один способ изображения чисел, происходивший от древнего счета с применением «счетных камешков», состоял в том, что единица изображалась точкой, и всякое число, в соответствии с пифагорейским определением, представлялось совокупностью точек. Вполне вероятно, что доказательство основных предложений теории четных и нечетных чисел было получено с помощью этого метода [82, 299].

Позднее стали применять другой, более общий способ изображения чисел — в виде прямолинейных отрезков: один фиксированный отрезок принимается за единицу, и тогда каждое число может быть представлено некоторым отрезком, полученным повторением единичного. Этот способ* вошел в обиход в IV в. до н. э. [134, т. II, стр. 348] или раньше [299, стр. 389].

Геометрическая арифметика оперировала также прямоугольными площадями и параллелепипедами. Произведение двух чисел a и b изображалось прямоугольником, сторонами которого служат отрезки, изображающие эти числа (рис. 1). Аналогично с помощью параллелепипеда представлялись числа, являющиеся произведением трех сомножителей.

---

* В том факте, что второй способ изображения чисел вытеснил первый, А. Сабо видит отражение перехода греческой математики от методов доказательства, основанных на «приведении к наглядности», к логическим косвенным доказательствам, заимствованным из философии, и момент этого перехода определяет как момент превращения математики в дедуктивную науку. Гипотеза А. Сабо о возникновении математического дедуктивного метода была И. Г. Башмаковой [43, стр. 39—41] подвергнута критике.

Таким геометрическим подходом объясняются некоторые определения VII книги «Начал» Евклида, например, определения плоских (плоскостных) и телесных чисел: «Когда же два числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающее есть телесное, стороны же его — перемножаемые между собой числа» (определение 18). Такое же происхождение имеют понятия квадратного, кубического и «подобных» — плоских и телесных — чисел (кн. VII, определения 19, 20, 22).

Большое значение в доказательствах геометрической арифметики имела вспомогательная фигура — гномон, представляющая собой разность между двумя перспективно подобными фигурами, с угловой точкой в качестве центра подобия [350, стр. 40]. Например, если дано квадратное число n^2, изображаемое квадратом $ABCD$ (рис. 2), и рассматривается квадратное число $(n+1)^2$, которое изображается квадратом $AEFG$, то фигура $BEFGDCB$ есть гномон.

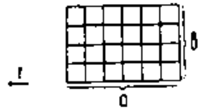


Рис.

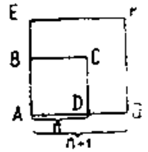


Рис. 2.

Среди всех чисел пифагорейцы выделили простые («первые»), которые они определяют как числа, «измеряемые только единицей» («Начала», кн. VII, определение 12), и составные, «измеряемые некоторым числом» (там же, определение 14).

Античные математики уделяли большое внимание учению о простых числах и получили важные результаты, известные нам из IX книги «Начал» Евклида. Здесь, в частности, доказаны фундаментальные теоремы о существовании бесконечного множества простых чисел (предложение 20) и о единственности разложения числа на простые сомножители (предложение 14). Грекам был известен также метод последовательного выделения простых чисел из числового ряда, носящий сейчас название «решето Эратосфена».

Пифагорейцы рассматривали и другие виды чисел, например, четные и нечетные, совершенные, дружественные и фигурные. Из исследования их свойств родились многие знаменитые теоретико-числовые задачи, привлекавшие математиков долгое время спустя. Решение этих задач при крайней просто-те формулировок часто оказывалось чрезвычайно затруднительным.

Совершенным было названо число, равное сумме своих делителей, т. е. $\sigma(n)=n$; например, первые совершенные числа (известные еще египтянам [87]) $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$. Пифагорейцы установили, что число вида $2^{n-1}(2^n-1)$, где 2^n-1 — простое, является совершенным [134, т. 2, кн. VII, предложение 36]. Спустя многие столетия было показано (Декарт, Эйлер), что не существует никаких четных совершенных чисел, кроме тех, которые содержатся в этой формуле. Вопрос о нечетных совершенных числах не решен и до настоящего времени, несмотря на многочисленные попытки ответить на него: есть предположение, что таких чисел вообще не существует, но оно не доказано.

Под дружественными понимались два числа m и n, у которых сумма делителей одного равна сумме делителей другого, т. е. $\sigma(m)=\sigma(n)$. Согласно сообщениям древних источников, пифагорейцам была известна пара дружественных чисел: 220 и 284 [505].

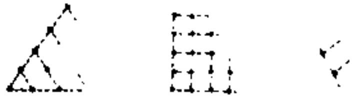


Рис. 3.

Большой интерес проявляли математики школы Пифагора к так называемым фигурным числам, среди которых, в частности, различались многоугольные (треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д.) числа [702]. Свое название они получили в связи с наглядным геометрическим представлением при помощи точек (рис. 3).

Вообще же n-е m-угольное число $\left(P_m^n\right)$ представляет собой сумму n членов арифметической прогрессии, первый член которой есть 1, а разность $m-2$, т. е.

$$P_m^n=\frac{(m-2)\,n^2-(m-4)\,n}{2}$$

В частности, треугольные числа получаются суммированием прогрессии

$$P_3^n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2},$$

квадратные — суммированием прогрессии

$$P_4^n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{(2n-1)+1}{2} n = n^2,$$

и т. д.

Интерес к многоугольным числам сохранился и у поздних пифагорейцев — прежде всего у Никомаха. Он посвятил теории многоугольных чисел треть своего известного труда «Введение в арифметику» [509], в котором был установлен ряд интересных взаимоотношений, например,

$$P_m^n = P_{m-1}^n + P_3^{n-}$$

Специальный труд о многоугольных числах был написан Диофантом. Этой теорией занимались также многие восточные и европейские математики средневековья и Нового времени, среди которых можно указать таких выдающихся ученых, как Кардано, Штифель, Декарт, Валлис и, наконец, Ферма, Эйлер и Коши. Например, Ферма сформулировал в 1637 г. свою знаменитую теорему: каждое число есть либо треугольное, либо сумма двух или трех треугольных; либо квадратное число, либо сумма двух, трех и четырех квадратных чисел; либо пятиугольное число, либо сумма двух, трех, четырех или пяти пятиугольных чисел; и так далее для шести, семи—и вообще многоугольных чисел. Эта теорема была доказана для случая квадратов Эйлером, а для общего случая — Коши [505].

К фигурным числам относились также продолговатые (промекные) $n(n+m)$, где $m>1$, и прямоугольные (гетеромекные) $m(m+1)$ числа. Помимо плоских фигурных чисел, рассматривались и пространственные числа, к которым относились кубические n^3, балкообразные $n^2(n+m)$, где $m>1$, пирамидальные, полученные суммированием ряда соответствующих многоугольных чисел, и многие другие.

В пифагорейской школе решался также ряд других теоретико-числовых задач. В частности, средствами геометрической арифметики было найдено целочисленное решение неопределенного уравнения $x^2+y^2=z^2$, т. е. дан метод получения троек целых чисел, которые могут представлять стороны прямоугольного треугольника, например, 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25 и т. д. Решение было дано в виде $z=\alpha^2+1$, $y=2\alpha$, $x=\alpha^2-1$ (подробнее см. [39, стр. 243—245; 82, стр. 137—138; 419, стр. 53—55]). Эта задача, как уже говорилось, берет свое начало из вавилонской математики.

Развивалось учение о пропорциях, зачатки которого также можно найти в математике древних египтян и вавилонян в применении к подобным треугольникам; у вавилонян существовал даже специальный термин для обозначения отношения. Пифагорейцы рассматривали три вида средних пропорциональных: арифметическое $x = \frac{a+b}{2}$, геометрическое $x = \sqrt{ab}$ и гармоническое $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ Впоследствии были получены и другие виды средних [82, стр. 318—321].

Теория отношений целых чисел

Как упоминалось выше, единица в математике пифагорейцев предполагалась неделимой, и поэтому понятие дроби было чуждо их арифметике. Вводились, правда, понятия «доли» (или «части») и «долей» (или «частей»), определяемые в «Началах» следующим образом: «Часть есть число в числе, меньшее в большем, если оно измеряет большее», «Части же — если оно его не измеряет» (кн. VII, определения 3 и 4). С современной точки зрения их можно отождествить с дробями вида $\frac{1}{n}$ и $\frac{m}{n}$ (точный смысл понятия «частей» выясняется в процессе доказательства предложения 4 книги VII), но для греков здесь шла речь только о целых числах и их отношениях; введение отношений основывалось на измерении одного числа другим. Теория отношений целых чисел, математически эквивалентная теории дробей, не нарушала предположения о неделимости единицы. Сейчас высказывается мнение [82], что в построении этой теории наиболее видную роль сыграл выдающийся математик пифагореец Архит Тарентский.

Одно из основных понятий греческой математики — количественное отношение являлось в то же время философским понятием; оно рассматривалось как особый вид «отношения», которое принадлежало, по Аристотелю, к десяти философским категориям. В то время как для нас понятия числа и отношения эквивалентны, для греков это были совершенно различные понятия, относящиеся к разным категориям [4, 365, 418, 617]. В ранней пифагорейской теории, вероятно, в виде первичной формы количественного отношения выступало понятие «части» [4, стр. 573—580].

Теория отношений целых чисел базировалась на понятии равенства двух отношений, или пропорции, которое определялось следующим образом: «Числа будут пропорциональны, когда первое от второго, а третье от четвертого будут или равнократными, или той же частью, или теми же «частями» [134, кн. VII, определение 21]. Согласно этому определению, если применить современную терминологию, две пары чисел A, B и C, D образуют пропорцию, если имеет место одна из трех возможностей:

1) $A=mB$ и $C=mD$;

2) $mA=B$ и $mC=D$;

3) существуют такие числа L и M, что одновременно $A=mL$, $B=nL$ и $C=mM$, $D=nM$, где m, $n>0$.

Таким образом, в основу этого определения положено понятие общей меры, т .е. общего делителя чисел; для отыскания общей наибольшей меры служил метод, называемый сейчас алгоритмом Евклида («Начала», кн. VII, предложение 1), игравший, следовательно, центральную роль в теории числовых отношений.

Для отношений целых чисел существовала эквивалентная умножению операция „составления отношений": говорилось, что отношение $\frac{A}{C}$ составлено из отношений $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{C}$ („Начала", кн. VIII, предложения 5 и 11). К составлению отношений сводились операции возведения в степень $\left(\text{например, если } \frac{A}{B}=\frac{B}{C}\text{, то } \frac{A}{C}=\left(\frac{A}{B}\right)^2=\left(\frac{B}{C}\right)^2\right)$ и извлечения корня (осуществлявшееся с помощью вставки средних пропорциональных). Операций, соответствующих сложению и вычитанию отношений, введено не было (подробно об арифметике рациональных чисел см. [39, 350, 1034] и особенно [33]).

Теория отношений целых чисел играла важную роль во всей научно-философской системе пифагорейцев. Она являлась той теоретической основой, на которой в этот период строились все доказательства предложений арифметики, геометрии и теории музыки. Но значение ее понималось более широко: считалось, что с ее помощью могут быть описаны все взаимоотношения реального мира вообще и математики — в частности. Последнее означало, между прочим, что отношение длин любых двух прямоугольных отрезков может быть выражено отношением целых чисел, или, другими словами, любые два отрезка имеют общую меру. Это утверждение было составной частью учения о мировой гармонии, основанного на понятии числа, и поэтому большим ударом для всей системы пифагорейцев явилось открытие факта, опровергающего указанное утверждение — факта существования несоизмеримых отрезков.

§ 4. Открытие иррациональности

Открытие существования несоизмеримых отрезков, т. е. понятия иррациональности, является одним из величайших событий в истории греческой математики. Оно произвело коренной переворот в науке и полностью изменило направление ее развития, поставив ряд принципиально новых задач, решение которых потребовало огромных усилий многих поколений математиков. Ранней истории понятия иррациональности посвящена сейчас обширная литература [39, 42, 82, 350, 461, 553, 587, 597, 602, 617, 920, 921, 1034, 1035].

Древняя легенда, приписывающая это открытие Пифагору, говорит, что в течение ста лет оно хранилось в строгой тайне и что пифагореец Гиппас, раскрывший ее непосвященным, был жестоко наказан за это богами [82, 541, 553, 618]. Так как документов, точно свидетельствующих о том, кем и когда впервые был установлен факт существования несоизмеримых величин, не сохранилось, мнения о роли математиков школы Пифагора в создании теории иррациональных величин нередко расходятся в существенных моментах.

Некоторые авторы [617, 920, 921] вообще подвергают сомнению возможность пифагорейского происхождения этой теории, во-первых, ввиду отсутствия каких-либо исторических доказательств, а во-вторых, из тех соображений, что если бы пифагорейцы обладали понятием иррациональности, то дальнейшее развитие греческой теории чисел и геометрии пошло бы по совершенно иному пути. Однако большинство исследователей [42, 82, 461, 553, 597, 1034] сходятся на том, что в пифагорейской школе в середине V в. до н. э. действительно было открыто и доказано существование несоизмеримых величин, по крайней мере, для одного частного случая — стороны и диагонали квадрата.

Судя по всему, к открытию несоизмеримости пришли в результате непосредственного измерения диагонали и попытки выразить ее отношение к стороне квадрата с помощью отношения двух целых чисел [101, 461]. Возможно, однако, что к этому привел какой-либо иной путь, например, исследования в теории музыки или попытки найти точное значение дроби, квадрат которой есть 2 [39, стр. 257]. Получающиеся при этом приближенные значения вначале, очевидно, принимались за точные, однако затем неточность ряда последовательных приближений была обнаружена и ясно осознана. После этого оставалось сделать еще один, огромный по своей важности шаг — из бесплодности сделанных попыток вывести заключение о бесплодности всех вообще попыток;

такой шаг, по всей вероятности, и был сделан пифагорейцами.

Есть основания считать, что доказательство несоизмеримости $\sqrt{2}$ с единицей впервые было проведено методом, основанным на теории четных и нечетных чисел, который впоследствии применил для той же цели Аристотель в сочинении „Первая аналитика" [8, стр. 70] и который излагается в некоторых списках X книги „Начал" Евклида [134, т. II, стр. 503—505]. Это доказательство, являющееся наиболее ранним в истории математики доказательством с помощью приведения к абсурду, состоит в следующем. Пусть дан квадрат $ABCD$ (рис. 4) и допустим, что его сторона AB соизмерима с диагональю AC, т. е. отношение $\frac{AC}{AB}$ может быть выражено отношением целых чисел. Пусть это отношение, выраженное наименьшими числами, есть $\frac{\alpha}{\beta}$. При этом $\alpha > \beta$ и отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ необходимо > 1. Так как $\frac{AC}{AB} = \frac{\alpha}{\beta}$, то $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Но $AC^2 = 2\,AB^2$, следовательно, $\alpha^2 = 2\beta^2$. Отсюда α^2 четное, а следовательно, и α четное; но α и β взаимно просты, поэтому β нечетно. Положим $\alpha = 2\gamma$; тогда $4\gamma^2 = 2\beta^2$, $\beta^2 = 2\gamma^2$, откуда β^2 четно, а следовательно, и β четно. Получено противоречие, доказывающее несоизмеримость диагонали и стороны квадрата.

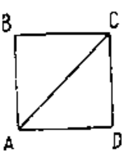


Рис. 4.

Установлено [597], что наряду с арифметическим существовало и геометрическое доказательство этой теоремы, основанное на методе нахождения общей наибольшей меры двух величин, т. е. на алгоритме Евклида.

Таким образом, был получен самый древний факт теории иррациональных величин — иррациональность $\sqrt{2}$. Но так как метод, которым это было доказано, применим только к данному случаю, вполне допустимо, что пифагорейцы не сделали более общих выводов из своего открытия.

О дальнейшей истории учения об иррациональных величинах имеются более подробные сведения. Из сочинения Платона «Теэтет» [247, стр. 22—23] мы узнаем, что Феодор Киренский доказал иррациональность $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,... $\sqrt{17}$, а точнее — показал (рассматривая каждый случай в отдельности), что у квадратов, площади которых равняются 3, 5,... 17 квадратным футам, стороны несоизмеримы со стороной квадрата с площадью в 1 квадратный фут. По поводу метода доказательства, применявшегося Феодором, данных нет, и на этот счет было высказано немало предположений. Вероятно, Феодор шел здесь геометрическим путем, используя существовавший ранее метод для доказательства иррациональности [82, стр. 197—202; 350, стр. 50; 597; 602]; однако вполне возможно [39, стр. 259], что он опирался на теорию делимости на 3, на 5 и т. д. до 17

Эти факты были обобщены, как свидетельствует Платон в упомянутом сочинении, учеником Феодора, великим математиком древности Теэтетом. Он показал, что если площадь квадрата выражается целым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной единичного квадрата. Это предложение, включенное в X книгу «Начал» (кн. X, предложение 9)*, равносильно, с нашей точки зрения, утверждению о том, что корень из целого неквадратного числа иррационален. Теэтету принадлежит и первая классификация иррациональных величин (см. § 7).

Открытие иррациональности имело для науки последствия огромной важности. Оно повлекло за собой кризис оснований математики, разрушив пифагорейскую систему, покоившуюся на принципе «все есть число». Оказалось, что далеко не все взаимные отношения объектов, которые рассматривает математика, подчинены законам, распространяющимся на целые числа. Таким образом, потерпела неудачу попытка построить всю математику на базе арифметики [39, 77, 182, 350, 583].

Следствием открытия несоизмеримости явилось, прежде всего, проведение резкой грани между дискретным и непрерывным, т. е. между понятиями числа и геометрической величины. Арифметика — наука о числе — и геометрия — наука о величине — были, как говорилось выше, строго разграничены между собой. Обе они рассматривались как составные части одной науки — математики, которая изучает предметы, имеющие общую природу, ибо как к числам, так и к величинам относятся такие понятия, как равенство, неравенство, «больше», «меньше», отношение, пропорция. Общими для обеих наук являются такие аксиомы, как: «Равные одному и тому же равны и между собой», «Если от равных отнимаются равные, то и целые будут равны» и др. и некоторые теоремы.

Однако между объектами арифметики и геометрии, с точки зрения античного математика, существовало принциаль-

---

* В дальнейшем для краткости будем указывать только номер книги и номер предложения.

ное различие, исследованием которого занималась главным образом философия. Поэтому вопросу о числе и величине уделено много внимания в трудах великого мыслителя древности Аристотеля.

Согласно Аристотелю, величина есть непрерывная протяженность, которая обладает свойством бесконечной делимости: «Невозможно ничему непрерывному состоять из неделимых частей» [6, стр. 124]. К непрерывным величинам относились линия, поверхность, тело, пространство и время. Если непрерывная величина разделена на части, то каждые две последовательные части имеют общую границу. Примером может служить прямолинейный отрезок, который при последовательном делении дает отрезки все меньшей длины; такое деление может быть продолжено до бесконечности, и при этом не будет получен отрезок минимальной длины.

Таким образом, отрицалось существование наименьших неделимых частей величины, сумма которых дала бы эту величину. В случае прямолинейного отрезка это утверждение означало, что отрезок не есть совокупность точек. Другими словами, допускалась потенциальная бесконечность в смысле безграничной делимости величины, но отвергалась актуальная бесконечность в смысле существования наименьшей ее части.

Число же прежде всего характеризуется дискретностью. Единица — составная часть каждого числа — не может быть разделена, не потеряв при этом своего основного свойства — быть единой. В то же время единица сама не является числом: наименьшее число есть два и «между двойкой и единицей нет ничего промежуточного» [6, стр. 114].

С этой точки зрения очевидно и различие между арифметикой и геометрией. Арифметика изучает свойства чисел: четность, нечетность, равенство, неравенство, пропорцию и т. д. Геометрия, имеющая своим предметом величины — линии, плоскости, тела, — изучает симметрию, асимметрию, равенство, параллельность и относительность положения.

Одно из основных понятий пифагорейской математики — отношение приобрело после открытия несоизмеримости двоякий смысл в зависимости от того, идет ли речь о числах или о величинах. В связи с этим оказалось, что теория пропорций, построенная пифагорейцами, на которой ранее основывались все математические доказательства, применима только к арифметике и не применима к геометрии.

Таким образом, после открытия иррациональности в вопросах обоснования понятий возникли существенные трудности, и дальнейшее развитие математики могло продолжаться лишь при условии, что эти трудности будут разрешены.

Выход из создавшегося положения был найден, когда вместо арифметики обратились к геометрии как к той основе, на которой можно унифицировать всю математическую науку. В качестве наиболее общего объекта математики стали рассматривать не число, а геометрическую величину, которая обычно изображалась в виде прямолинейного отрезка или площади. Так как два отрезка (площади) могут быть либо соизмеримыми, либо несоизмеримыми, то при геометрическом подходе понятие иррациональности оказывается узаконенным самым естественным образом. А поскольку греческая математика оперировала только положительными количествами, геометрические величины представлялись для обоснования универсальными.

Чтобы учение о величинах могло рассматриваться как фундамент всей математики, его следовало превратить в строгую математическую теорию, т. е. не только определить его объекты, но и дать аналог операций, ранее установленных в арифметике.

Эта проблема решалась, с одной стороны, созданием так называемой геометрической алгебры, которую Г Цейтен определил как теорию операций над количествами, представленными геометрическим образом [350, стр. 39]. С другой стороны, нужно было расширить теорию отношений целых чисел, ставшую важнейшим орудием математики, так, чтобы она оказалась одинаково пригодной для чисел и величин: результатом этого явилось построение общей теории отношений — «самого оригинального творения греческой математики» [77, стр. 65].

§ 5. Геометрическая алгебра

Основные понятия и операции

Основой, на которой возникло новое исчисление, применимое одновременно к числам и к непрерывным величинам, — геометрическая алгебра [39, 82, 101, 186, 256—258, 350, 418, 419, 442, 461, 562, 588, 887, 1032, 1033, 1036] — послужила геометрическая арифметика пифагорейцев.

Для изображения непрерывных величин (рациональных и иррациональных), как раньше для изображения чисел, стали применяться прямолинейные отрезки. Операции с этими объектами — сложение, вычитание, умножение, деление — были узаконены с помощью аксиом геометрии.

Как и в геометрической арифметике, сложение величин производилось путем присоединения друг к другу отрезков, изображающих эти величины; вычитание — отбрасыванием отрезка, изображающего меньшую величину, от отрезка, изображающего большую величину.

Умножение двух величин осуществлялось построением прямоугольника, сторонами которого служат отрезки, изображающие сомножители. При этом говорили не о произведении, что само по себе по отношению к геометрическим объектам не имело смысла, а о соответствующей площади. Площади, так же как и отрезки, можно было складывать и вычитать. Умножение трех величин производилось аналогично — с помощью построения прямоугольного параллелепипеда. Что касается произведения четырех и более сомножителей, то описать эти случаи средствами геометрической алгебры было невозможно. Во всех операциях с величинами строго выдерживался «принцип однородности», другими словами, операции над объектами, относящимися к разным видам, считались незаконными (например, сложение линии с площадью).

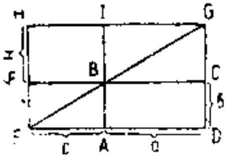


Рис. 5.

Делению величин соответствовало геометрическое построение, носившее название „приложения площадей" Задача деления величины ab на величину c формулировалась следующим образом: приложить к отрезку c (рис. 5) прямоугольник, равновеликий данному прямоугольнику ab. Решение ее заключается в построении прямоугольника cx, равновеликого заданному. Пусть $ABCD$ — прямоугольник со сторонами $a = AD$ и $b = DC$. Откладываем на продолжении одной из сторон, например, AD, отрезок $AE = c$. Из E возводим перпендикуляр, который продолжим до пересечения его в точке F с продолжением стороны BC. Диагональ EB полученного прямоугольника $EFBA$ продолжим до пересечения с продолжением стороны DC. Обозначим точку пересечения через G и возведем из нее перпендикуляр GH. Наконец, продолжив EF и AB до пересечения с GH, получим прямоугольники $EHGD$ и $FHIB$. Прямоугольник $FHIB$ является искомым. Действительно, он равновелик данному прямоугольнику $ABCD = ab$, так как оба они получаются из равных треугольников EHG и EDG вычитанием равных площадей. Таким образом, сторона $x = FH = BI$ прямоугольника $FHIB$ давала решение поставленной задачи.

С помощью описанных операций геометрическим путем были установлены основные алгебраические тождества, доказательства которых даны во II книге «Начал» Евклида. Доказан (II, 1) дистрибутивный закон умножения по отношению к сложению, т. е. выражаясь современным языком, выведена формула

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

Далее (предложения 2 и 3) показано, что, в частности, из $b+c=a$ следует $ab+ac=a^2$ и что $(a+b)a=a^2+ab$. Затем (предложение 4) доказано тождество

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Формулируется оно следующим образом: «Если прямая как-либо рассечена, то квадрат на всей прямой равен квадратам на отрезках вместе с дважды взятым прямоугольником, заключенным между отрезками». Доказательство становится ясным при рассмотрении рис. 6.

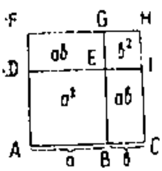


Рис. 6.

Пусть $AB=a$, $BC=b$. Построим квадраты $ADEB=a^2$, $AFHC=(a+b)^2$ и продолжим BE и DE до пересечения с FH и CH в точках G и I. Тогда $DFGE=BEIC=ab$, $EGHI=b^2$ и, следовательно,

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ac.$$

Таким же образом установлены следующие формулы:

$$ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \qquad \text{(II, 5)}$$

$$(a+b)\,b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 \qquad \text{(II, 6)}$$

$$(a+b)^2 + a^2 = 2\,(a+b)\,a + b^2, \qquad \text{(II, 7)}$$

или

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$4\,(a+b)\,a + b^2 = [(a+b) + a]^2; \qquad \text{(II, 8)}$$

$$a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)\right]^2 \qquad \text{(II, 9)}$$

или

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$(a+b)^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{a}{2} + b\right)^2\right]. \qquad \text{(II, 10)}$$

Теория уравнений

Основной задачей геометрической алгебры было решение уравнений. С помощью приложения площадей, как показано выше, легко решалось линейное уравнение $ab = cx$.

Для теории квадратных уравнений, которая до открытия иррациональности основывалась на численных методах, ведущих начало от вавилонской алгебры, после этого открытия оказалось необходимым развить более общие методы на основе геометрии. Геометрическое решение квадратного уравнения сводится к некоторому построению с помощью циркуля и линейки; и обратно — всякое построение с помощью циркуля и линейки может быть сведено к решению некоторой конечной цепочки квадратных уравнений со старшим коэффициентом, равным единице (подробно см. [39, стр. 265—276]).

Для решения уравнения $ab = x^2$, к которому сводится задача построения квадрата, равновеликого заданному прямоугольнику (II, 14), строили среднее геометрическое между данными величинами a и b. Решение основывалось на доказанном в предложении 5 из II книги «Начал» тождестве

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Применяя его, задачу сводили к следующей:

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

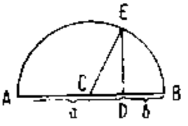


Рис. 7.

которая, в свою очередь, решалась с помощью теоремы Пифагора. Пусть $AD = a$, $DB = b$ и $AB = a + b$ (рис. 7). Проводим окружность с диаметром AB с центром в точке C, так что

$$AC = CB = \frac{a+b}{2}.$$

Возводим из D перпендикуляр и продолжаем его до пересечения с окружностью в точке E. Строим треугольник CDE, в котором

$$CE = AC = \frac{a+b}{2}, \qquad CD = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}.$$

Отсюда

$$DE^2 = x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Методом приложения площадей решались квадратные уравнения видов

$$x^2 - ax = b^2,$$
$$x^2 + ax = b^2,$$

из которых первый вид носил название эллиптического, а второй — гиперболического. Для того чтобы при решении получались положительные корни, на условия накладывались соответствующие ограничения.

Задача эллиптического типа формулировалась [134, VI, 28] следующим образом: «К данной прямой приложить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм, имеющий недостаток в виде параллелограмма, подобного данному, необходимо же, чтобы данная прямолинейная фигура, равную которой надо приложить, была не больше фигуры, построенной на половине, подобной недостатку от фигуры на половине и подобную которой надо взять в недостатке». Другими словами, если дан отрезок $AB=a$ и некоторая площадь S (рис. 8), то требуется построить прямоугольник ax (или более обще — параллелограмм) так, чтобы выполнялось условие

$$(a-x)x = S.$$

Прежде всего площадь S преобразуется в квадрат b^2, и тогда это условие принимает вид

$$(a-x)x = b^2,$$

при этом в условии задачи требуется, чтобы $b < \frac{a}{2}$

Разделим AB пополам в точке C и проведем из нее перпендикуляр $CD=b$. Найдем на CB такую точку E, что $DE=CB$. Тогда утверждается, что EB есть искомый отрезок x, и задача решается „приложением“ к данному отрезку AB прямоугольника $AEHG$, сторона которого $EH=AG=x$.

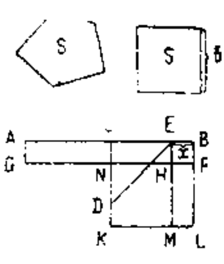


Рис. 8.

Действительно, построим квадрат $CBLK$ с площадью $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ и прямоугольник $EBLM$, который оказывается равновеликим прямоугольнику $ACNG$. Тогда прямоугольник $AEHG$, площадь кокоторого равна $(a-x)x$, равновелик гномону $CNHMLBC$. Но площадь последнего равна разности площадей квадратов $CBLK$ и $NHMK$, т. е.

$$(a-x)\,x = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

Следовательно, по условию,

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

а поэтому отрезок $\frac{a}{2} - x$ получается с помощью теоремы Пифагора как катет треугольника CED.

Аналогично проводилось решение уравнения в гиперболическом случае [134, VI, 29].

Как уже отмечалось, с помощью метода приложения площадей можно было решать только уравнения, имеющие при старшем члене коэффициент 1. Далее, при геометрическом решении получался только один положительный корень, что требовало особых ограничений, налагаемых на условие задачи. Наконец, орудиями классической геометрической алгебры были лишь циркуль и линейка. Все это значительно ограничивало ее возможности, что особенно проявилось при рассмотрении задач, решение которых, как было установлено впоследствии, принципиально нельзя осуществить с помощью циркуля и линейки. Прежде всего это касается знаменитых задач древности — удвоения куба и трисекции угла. Для решения этих и подобных задач, сводящихся к кубическим уравнениям, пришлось прибегнуть к новому методу — методу конических сечений [39, 82, 401, 461, 1031 и др.].

§ 6. Общая теория отношений

Вторая важнейшая проблема, возникшая в греческой математике в связи с открытием иррациональности, состояла, как уже говорилось, в создании теории отношений, одинаково применимой как к соизмеримым, так и к несоизмеримым величинам. Решение этой проблемы стало совершенно необходимым с методической точки зрения, так как все доказательства, проведенные ранее с помощью арифметической теории отношений, после установления факта существования несоизмеримых величин утратили свое значение.

Теория «антифайрезиса»

Сравнительно недавно доказано, что первой по времени возникновения теорией, разрешавшей возникшие трудности, явилась теория отношений, которая названа «антифайретической» [4, 384, 415, 418—419, 735]. Основную роль в ней играл метод определения общего наибольшего делителя двух чисел, или общей наибольшей меры двух величин, известный как «алгоритм Евклида» и изложенный в «Началах» отдельно для чисел (VII, 1, 2) и для величин (X, 2, 3).

Этот метод, как известно, для чисел заключается в следующем: если требуется найти общий наибольший делитель чисел a и b $(a>b>0)$, то производим деление a на b и получаем

$$a = qb + r, \quad 0 \leqslant r < b,$$

где частное q и остаток r суть целые числа. Если $r \neq 0$, то производим деление b на r, получая при этом

$$b = q_1 r + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < r,$$

и продолжаем аналогично:

$$r = q_2 r_1 + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 < r_1,$$
$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad 0 \leqslant r_3 < r_2,$$

$$r_{k-2} = q_k \, r_{k-1} + r_k, \quad 0 \leqslant r_k < r_{k-1},$$
$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k.$$

Для чисел этот процесс закончится на некотором к-м шаге, так как существует лишь конечное число целых положительных убывающих чисел $b>r>r_1>r_2>.....\geqslant 0$. При этом последний остаток $r_к$ и есть общий наибольший делитель данных чисел a и b.

Для величин рассуждение проводится аналогично, но процесс здесь завершается лишь в случае, когда данные величины, у которых ищется общая мера, соизмеримы. Если же они несоизмеримы, процесс оказывается бесконечным.

Алгоритм Евклида равносилен разложению отношения $\frac{a}{b}$ в непрерывную дробь

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots}}},$$

причем отношение является рациональным или иррациональным в зависимости от того, обрывается ли это разложение или продолжается до бесконечности.

В основе антифайретической теории отношений лежало определение равенства двух отношений, согласно которому отношения $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ равны тогда только тогда, когда все неполные частные в разложении этих дробей соответственно равны между собой. Это определение применимо как к рациональным, так и к иррациональным отношениям; в последнем случае мы будем иметь бесконечные ряды соответственно равных значений.

Согласно терминологии древних, в одном и том же отношении друг к другу находятся величины, имеющие один «антифайрезис». Термин «антифайрезис», означающий «попеременное вычитание», применяется Евклидом в его доказательствах (VII, 1, 2; X, 2, 3) и характеризует процесс попеременного вычитания чисел (или величин), а затем последовательных остатков от деления для нахождения общего наибольшего делителя (или общей наибольшей меры). Этот же термин употребляет и Александр Афродизийский (ок. 200 г. н. э.) в толковании отрывка из сочинения Аристотеля «Топики»: при определении величин, находящихся в одном и том же отношении, говорится, что они должны иметь один и тот же «антанайрезис»; Александр указывает, что Аристотель здесь назвал «антанайрезисом» антифайрезис [418, стр. 82]. Эти высказывания древних авторов послужили толчком к исследованиям, которые привели к мысли о первоначальном существовании в греческой математике антифайретической теории отношений. Имеются данные, позволяющие считать [82, стр. 240—243], что антифайретическая теория была создана Теэтетом. Подтверждение гипотезы об антифайретической теории как первоначальной формы общей теории отношений найдено впоследствии [735] в арабских сочинениях математиков средневекового Ближнего и Среднего Востока, о чем будет сказано ниже.

Антифайретическая теория своим появлением разрешила стоявшие перед математикой трудности, так как позволила обосновать почти все предложения, для доказательства которых требовалось применение теории отношений [415, 418].

Однако при всей своей строгости антифайретическая теория не лишена существенных недостатков, главный из которых состоял в том, что с ее помощью приходилось доказывать каждую теорему отдельно для величин различных видов, т. е. для чисел, линий, площадей, тел и т. д. В частности, это касалось важной теоремы о переставлении внутренних членов пропорции [134, V, 16]. Такое существенное ограничение общности созданной теории отношений требовало дальнейшей разработки вопроса.

Теория отношений величин

Построение общей теории отношений, свободной от указанного ограничения, считается заслугой великого ученого древности Евдокса Книдского. Об этом свидетельствует не только схолия к V книге «Начал», где прямо указано его авторство, но и анализ содержания во многом сходных между собой V и XII книг этого сочинения, из которых последняя, несомненно, принадлежит Евдоксу [82, стр. 258—261]. Создание общей теории отношений явилось одним из наиболее замечательных достижений греческой математической мысли, сразу открывшим путь чрезвычайно плодотворному и беспрепятственному развитию науки [39, 82, 350, 588].

Значение теории Евдокса хорошо осознавалось уже в древности, о чем свидетельствует высказывание Аристотеля. Доказывая предложение о том, что внутренние члены пропорции можно переставлять, он говорит, что раньше эта теорема доказывалась отдельно для чисел, отрезков, тел и времен, в то время как это можно показать для всех случаев с помощью одного единственного доказательства: так как все это не имеет единого обозначения и числа, отрезки, времена и тела отличаются друг от друга по внешнему облику, то каждое рассматривалось отдельно; теперь же — заключает Аристотель — доказательство проводится в общем виде [8, стр. 190—191].

Изложению общей теории отношений посвящена V книга «Начал» Евклида. Основные определения, на которых базируется вся теория, формулируются здесь следующим образом:

«1. Часть есть величина от величины, меньшая от большей, если она измеряет большую.

2. Кратное же — большая от меньшей, если она измеряется меньшей.

3. Отношение есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству.

4. Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга.

5. Говорят, что величины находятся в том же отношении: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке.

6. Величины же, имеющие то же отношение, пусть называются пропорциональными.

7 Если же из равнократных кратное первой превышает кратное второй, а кратное третьей не превышает кратности четвертой, то говорят, что первая ко второй имеет большее отношение, чем третья к четвертой» [134, кн. V определения].

Наибольшее значение для построения теории имеют 4-е и 5-е определения.

Четвертое определение, дающее условие того, какие две величины могут находиться в отношении между собой, является аксиомой: две величины a и b могут иметь между собой отношение лишь тогда, когда существует целое число n такое, что $na>b$, и целое число m такое, что $mb>a$. (Эту аксиому часто называют «аксиомой Архимеда», имея в виду, что Архимед впоследствии сформулировал ее, хотя и в несколько другом виде; однако такое название условно, так как различие здесь не только терминологическое [598]).

Таким образом, согласно Евдоксу, отношения между собой могут иметь только однородные величины (определение 3), но не все, а лишь удовлетворяющие условию определения 4. При этом имеется в виду, что мыслимы такие однородные величины, которые не находятся в отношении между собой. Примером, хорошо известным грекам, являются так называемые роговидные углы, т. е. углы между кривой и касательной к ней или между двумя кривыми [39, стр. 310—311].

Определение тождества двух отношений (определение 5), на котором основывается вся теория пропорций, может быть сформулировано следующим образом: величины a и b находятся между собой в том же отношении, что и величины c и d, если для произвольных целых чисел m и n

$$\begin{aligned} &1)\ \text{либо}\ ma > nb,\quad mc > nd,\\ &2)\ \text{либо}\ ma = nb,\quad mc = nd,\\ &3)\ \text{либо}\ ma < nb,\quad mc < nd. \end{aligned}$$

Аналогичное определение дано для случая, когда отношение $\frac{a}{b}$ больше отношения $\frac{c}{d}$ [134, кн. V, определение 7]; это справедливо при условии, если существуют такие числа m и n, что $ma>nb$, но $mc\leqslant nd$.

Общая теория отношений играла в греческой математике ту же роль, что и теория вещественных чисел в современной математике. С ее помощью строго обосновывался имевший важнейшее значение «метод исчерпывания» Евдокса, который лежал в основе всех доказательств, где применялся предельный переход. Она служила, кроме того, фундаментом учения о подобных фигурах и давала возможность в сочетании с геометрической алгеброй решать неприведенные уравнения второй степени.

В основных чертах теория отношений Евдокса сходна с теорией вещественных чисел Дедекинда, согласно которой всякое вещественное число определяется сечением в области рациональных чисел; у Евдокса соответствующее деление на классы осуществляется заданием пары величин a и b, находящихся в отношении [39, стр. 312—321]. Равенству двух вещественных чисел соответствует здесь сформулированное выше («Начала», кн. V, определение 5) понятие одинаковости двух отношений. В дальнейшем, когда понятия натурального числа и отношения постепенно стали сближаться и, наконец, объединились в едином понятии вещественного числа, вместо термина «одинаковые» применительно к отношениям появилось слово «равные»; это уже ясно наблюдается в средневековой математике стран ислама (см. ниже).

Однако теория отношений в смысле строгости во многом уступала теории вещественных чисел: для отношений не имеет места аксиома непрерывности, а, кроме того, из арифметических операций для отношений была введена лишь операция „составления", соответствующая их умножению. Говорят, что отношение $\frac{a}{d}$ составляется, например, из отношений $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{d}$, т. е. $\frac{a}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}$. В случае, если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, отношение $\frac{a}{c}$ называется **двойным** [134, кн. V, определение 9], а в случае $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ отношение $\frac{a}{d}$ называется **тройным** (там же, кн. V, определение 10); таким образом, вводилось понятие возведения отношения в степень $\left(\text{в первом случае } \frac{a}{c}=\left(\frac{a}{b}\right)^2, \text{ во втором } \frac{a}{d}=\left(\frac{a}{b}\right)^3 \text{ и т. д.}\right)$

Однако для общего случая, т. е. для любых двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, операция составления могла считаться законной лишь при условии, что для отношения $\frac{c}{d}$ существует тождественное ему отношение $\frac{b}{x}$, имеющее своим первым членом b; другими словами, нужно было решить задачу о существовании четвертой пропорциональной. (В „Началах" [134, VI, 12] эта задача решена только для случая, когда рассматриваемые величины суть прямолинейные отрезки). К нахождению четвертой пропорциональной должна сводиться и операция сложения двух отношений, но в „Началах" эта операция не применяется.

Помимо указанного ограничения, касающегося арифметических действий над отношениями, общая теория отношений имела тот недостаток, что она была с трудом приложима к потребностям вычислительной практики, значительно уступая в этом антифайретической теории. По словам Н. Бурбаки, «при всем восхищении, которое вызывает построение Евдокса, не оставляющее желать ничего лучшего с точки зрения строгости и стройности, все же следует признать, что ему не хватало гибкости и что оно не способствовало развитию вычислительной техники, и особенно алгебраического исчисления» [77, стр. 150]. Этот недостаток стал особенно заметен в поздний период греческой истории, когда практика начала предъявлять к математике все более серьезные требования.

§ 7. Классификация иррациональностей

О X книге «Начал»

Учение греков об иррациональных величинах в наиболее завершенном виде мы находим в X книге «Начал» Евклида — самой большой по объему и наиболее трудной для понимания из всех книг этого сочинения.

Вопрос о том, является ли Евклид автором теории иррациональных или же он только пересказал полученные до него результаты, часто обсуждался в литературе. Наряду с мнением, согласно которому «относительно этой книги можно с наибольшей уверенностью предположить, что она принадлежала самому Евклиду» [480, стр. 202], существуют и другие точки зрения. Так, Цейтен полагает, что классификация иррациональностей, которая является предметом X книги, была начата Теэтетом, а завершена Евклидом, и видит в этом и в применении указанной классификации к определению ребер правильных многогранников самую самостоятельную часть работы Евклида [1034, стр. 408; 350, стр. 83]. Наибольшую же популярность приобрел взгляд на X книгу как на труд Теэтета [82; 461, I, стр. 261]. Хотя иногда [882, стр. 77] высказывалось предостережение против слишком смелых выводов такого рода, этот взгляд представляется в свете недавних исследований Ван дер Вардена [82] вполне оправданным.

О важной роли, которую Теэтет сыграл в развитии иррациональных величин, свидетельствуют многочисленные данные. Ему, несомненно, принадлежит первая по времени классификация иррациональных величин. Платон [247, стр. 22, 23] приписывает Теэтету следующее рассуждение: «Корней оказалось бесконечное количество, и нам пришло в голову попытаться подыскать нечто общее, которое охватывало бы все эти корни.... Мы разделили все числа на два рода: числа, происходящие от квадрата какого-нибудь числа, назвали мы, уподобляя фигуре квадрата, квадратными и равносторонними..... А числа, находящиеся в промежутке между названными, такие, как 3, 5 и другие, которые не могут произойти от умножения какого-нибудь числа на себя, а возникают от умножения большего числа на меньшее или меньшего на большее и представленные в виде геометрической фигуры, всегда заключаются между неравными сторонами, мы назвали, тоже уподобляя их продолговатой фигуре, продолговатыми числами..... Линии, которые дают в квадрате равностороннее и квадратное число, выразили мы в понятии линейного измерения; линии же, которые образуют продолговатое число, выразили в понятии потенциального (т. е. выраженного в квадратных корнях) измерения, так как они соизмеримы с первыми не в линейном измерении, а в площадях, для которых они суть корни».

Таким образом, для того, чтобы классифицировать отрезки, с помощью которых изображались все (рациональные и иррациональные) величины, Теэтет строит на этих отрезках квадраты и исследует их свойства. К одному классу он относит те отрезки, для которых площади построенных на них квадратов выражаются квадратными числами вида n^2, а к другому — те, для которых эти площади выражаются неквадратными (продолговатыми) числами, т. е. числами вида $m(m+n)$. Второй класс объединяет, следовательно, отрезки, длины которых мы выразили бы с помощью квадратного корня из неквадратного числа. Для отрезков первого и второго классов не существует общей меры; соизмеримыми являются лишь площади квадратов, построенных на них. Эти отрезки называются соизмеримыми в степени.

Помимо указанного отрывка, цитируемого обычно, вклад Теэтета в теорию иррациональных величин отмечается и в комментарии Паппа к X книге „Начал" Евклида, сохранившемся в арабском переводе [618, 822]. Здесь говорится, что учение об иррациональных величинах „было основано в школе Пифагора, но получило развитие в руках афинянина Теэтета, который имел к этой, как и к другим отраслям математики, природную склонность и тем заслужил восхищение" Теэтету приписывается „установление точных различий и неоспоримых доказательств относительно вышеупомянутых величин" [618, стр. 63]. В этом комментарии указано также, что Теэтету были известны основные виды иррациональных, рассматривающихся в X книге, — медиаль, биномиаль и вычет (или апотома). При этом сообщается, что он сопоставил медиальную линию среднему геометрическому, биномиаль — среднему арифметическому, а вычет — среднему гармоническому; т. е. если рассматривать, например, две величины 1 и $\sqrt{a}$, где a — неквадратное число, то среднее геометрическое между ними $\sqrt[4]{a}$ есть медиаль, среднее арифметическое $\frac{1+\sqrt{a}}{2}$ — биномиаль, а среднее гармоническое $\frac{2\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{2}{a-1}(a - \sqrt{a})$ — вычет.

Что касается Евклида, то, по словам Паппа [618, стр. 63], он «достиг неоспоримых принципов, которые он установил для соизмеримости и несоизмеримости вообще. Для рациональных и иррациональных он сформулировал определения и специфические различия и определил также количество видов иррациональных».

С полной определенностью Теэтета считают автором предложения 9 из X книги «Начал», в котором дано необходимое и достаточное условие соизмеримости сторон двух квадратов; основанием служит схолия к этому предложению, где сказано: «Теорема эта является теэтетовым изобретением и о ней упоминает Платон в «Теэтете» [134, т. II, стр. 370; 587, гл. VI].

Ван дер Варден после основательного анализа X книги пришел к выводу, что автором ее является Теэтет. В результате исследования выявлено, что «одна и та же основная мысль проходит через всю книгу, одни и те же методы доказательства применяются во всех случаях» [82, стр. 235]. Довод в пользу своего заключения Ван дер Варден видит и в тесной связи между теорией, изложенной в X книге, и учением о правильных многогранниках, содержащемся в XIII книге «Начал», которое также почти несомненно принадлежит Теэтэту [82, стр. 236—239].

Отсутствие в книге X «Начал» какой бы то ни было символики и вытекающая отсюда необходимость давать рассуждения на языке геометрической алгебры привели к необычайной громоздкости формулировок и доказательств, что делает их труднодоступными для современного читателя. Восприятие материала, достаточно сложного по существу, затрудняется и построением книги, идея которого становится понятной далеко не сразу.

Г Цейтен в своей «Истории математики в древности и в средние века» уклоняется от детального разбора X книги, объясняя это следующим образом: «Если мы не будем останавливаться подробнее на десятой книге «Начал», наиболее обширной книге евклидова труда, то не потому, что содержащийся в ней материал, накапливавшийся со времен Теэтета вплоть до Евклида — не представляет большого значения, — наоборот; но дело в том, что, несмотря на тщательное изложение Евклидом материала, его трудно охватить, ибо нелегко, не обладая никакой системой знаков, разобраться среди классифицированных в этой книге иррациональных величин» [350, стр. 112].

На трудности, связанные с изучением X книги, жаловался в свое время Рамус (1515—1572 гг.), писавший, что никогда не читал ничего столь сбивчивого и путаного и никогда в человеческих писаниях не находил такой неясности [618, стр. 18]. Великий фламандский математик Симон Стевин (1548—1620 гг.), посвятивший X книге «Начал» сочинение [832], говорил, что многих эта книга настолько устрашает, что ее «считают наиболее глубоким и непонятным предметом в математике» и называют «крестной мукой математиков» [832, II В, стр. 713]. Кастелли (1577—1644 гг.), выдающийся ученик Галилея, в одном из своих писем к нему писал, что «застрял на 40 предложении X книги, подавленый массой слов, глубиной предмета и трудностью доказательства» [461, т. I, стр. 254].

В то же время давалась высокая оценка излагаемой в этой книге теории; например, великий астроном и математик И. Кеплер (1571—1630 гг.), обороняя ее от критиков, утверждал, что только в X книге видит путь к пониманию причин вещей и что она «будучи прочитана и понята, может открыть тайны философии» [618, стр. 18—19].

Эти особенности X книги явились причиной того, что в древности и в средние века к ней были написаны многочисленные комментарии; ими объясняется также, почему эта книга долгое время оставалась изученной историками математики в значительно меньшей степени, чем другие книги «Начал».

Античной теории иррациональных величин, изложенной в X книге, посвящен ряд историко-математических исследований [82, 85, 134, 225, 255, 480, 503, 541, 587, 588, 618, 719, 739]. На основании ее изучения сделан, например, вывод, что эта книга является «самой удивительной» [204, стр. 76], «наиболее замечательной, так как она, действительно, наиболее завершенная из всех книг «Начал» [588, стр. 241]; в ней видят «образец глубокомыслия древних геометров» [85, стр. IX], а работу, проделанную при ее написании, называют «заслуживающей удивления» [480, стр. 217]. Во введении к русскому изданию «Начал» 1880 г. М. Е. Ващенко-Захарченко пишет: «Начала» Евклида принадлежат к числу тех замечательных творений древнего мира, которые всегда останутся образцами в своем роде, которым тем больше удивляешься, чем больше их читаешь, и которые обыкновенно приписываются не одному лицу. Если с первого раза некоторые части его и кажутся утомительными, то это происходит вследствие того отличительного характера новых методов исследований, к которым мы привыкли; но по мере того, как мы углубляемся в изучение этого замечательного сочинения, такое впечатление исчезает, а является сознание необыкновенной строгости доказательств и логической последовательности в порядке истин. Такое, например, впечатление производит с первого раза десятая книга «Начал», но вместе с этим ни одна из книг не поражает нас такою глубиною исследований» [85, стр. IV—V].

В то же время ставятся вопросы, связанные с разъяснением содержания X книги: каков смысл классификации иррациональностей, изложенной в ней, с современной точки зрения [39, 82, 255, 350, 480, 618, 587, 588, 1034, 1035], какова цель ее построения [39, 42, 255, 350, 1034, 1035], какие принципы положены в ее основу [225, 255, 350, 1034, 1035], какое место занимает X книга в системе «Начал» [33, 85, 255, 503, 739], как вообще трактовались алгебраические иррациональности в Древней Греции [39, стр. 279; 42; 134, т. II, стр. 358—510; 618] и, наконец, какова дальнейшая судьба X книги и какую роль это сочинение сыграло в истории математики. Многие из этих вопросов уже нашли достаточно полное разрешение, однако исследование проблем, возникающих при изучении X книги, и сейчас ни в коей мере нельзя считать завершенным. В следующих главах мы обратим внимание на два последних вопроса и приведем материал, который поможет получить более или менее исчерпывающий ответ на них.

При передаче содержания X книги прежде всего возникает необходимость переложить ее на современный алгебраический язык. Хотя это в значительной мере нарушает строй идей Евклида и мешает понять излагаемую теорию в том виде, как она представлялась грекам, к этой модернизации приходится прибегнуть, ибо только таким путем можно сделать содержание книги легкодоступным и обозримым. При этом форма алгебраической интерпретации оказывается в существенных моментах различной у разных авторов и с разной степенью точности позволяет передать смысл предложений «Начал». Мы будем стремиться как можно ближе следовать идеям, а где это возможно — и терминологии Евклида, так как это необходимо для правильного понимания материала VI главы нашей работы.

Исходные понятия X книги — соизмеримость и несоизмеримость величин, причем под величинами понимаются прямолинейные отрезки и прямоугольные площади. Эти понятия вводятся в первых двух определениях. Помимо линейно соизмеримых отрезков (т. е. тех, которые могут быть одновременно измерены каким-либо одним отрезком), рассматриваются также соизмеримые в степени, т. е. обладающие тем свойством, что квадраты, построенные на них, могут быть измерены одной и той же площадью; если такой площади не существует, то отрезки называются несоизмеримыми в степени.

Далее (определение 3) задается некоторый отрезок, который определяется как рациональный. Для него, утверждает Евклид, существует бесчисленное множество отрезков, соизмеримых или несоизмеримых с ним (как линейно, так и в степени). Все соизмеримые с ним линейно и в степени называются рациональными, а несоизмеримые — иррациональными.

Интерпретируя предложенную классификацию с помощью алгебраической символики, обозначаем заданный отрезок через a; тогда все величины, изображаемые прямолинейными отрезками, подразделяются следующим образом:

I. Соизмеримые с a, т. е. имеющие вид ma, где m — рациональное число;

II. Несоизмеримые с a:

1) соизмеримые с a в степени, т. е. имеющие вид $a\sqrt{n}$, где n — рациональное число, отличное от квадратного,

2) несоизмеримые с a в степени, т. е. не имеющие вида $a\sqrt{n}$.

Величины вида ma и $a\sqrt{n}$ названы рациональными; первые (ma) — это рациональные линейно (или рациональные в длине), а вторые $a\sqrt{n}$ — рациональные только в степени. Если рассматривать отрезок a как единичный, то рациональные величины Евклида можно записать в виде m и $\sqrt{n}$, где m, n — рациональные числа. Бросается в глаза отличие евклидова понимания рациональности и иррациональности от современного. В то время как для нас это понятия абсолютные, для греков они относительны: данная величина является рациональной или иррациональной в зависимости от того, соизмерима она (либо линейно, либо в степени) или несоизмерима с фиксированным, но выбранным произвольно отрезком. Кроме того, если прибегнуть к алгебраической терминологии, то, согласно Евклиду, к рациональным были отнесены не только величины вида m, но и вида $\sqrt{m}$.

В следующем, четвертом, определении вводится понятие рациональной и иррациональной площади: квадрат на заданной рациональной прямой назван р а ц и о н а л ь н ы м и все площади, соизмеримые с ним, определяются как р а ц и о н а л ь н ы е, а несоизмеримые — как и р р а ц и о н а л ь н ы е.

Введено также понятие прямой, к в а д р и р у ю щ е й некоторую площадь. Пусть задана площадь S (рис. 9); построим равновеликий ей квадрат $ABCD = a^2$. Тогда говорят, что сторона a этого квадрата квадрирует данную площадь S.

Евклид утверждает, что прямая, квадрирующая иррациональную площадь, также иррациональна.

Содержание X книги условно подразделяется на несколько отделов. В первом из них (предложения 1—18) даются критерии определения того, является рассматриваемая величина рациональной или иррациональной и, если она рациональна, то в длине или только в степени.

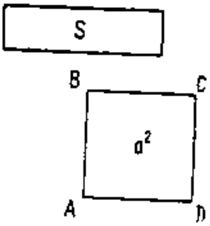


Рис. 9.

Знаменитое первое предложение десятой книги представляет собой ту основу, на которой был построен „метод исчерпывания" Евдокса, сыгравший столь большую роль в истории античной математики. В этом предложении утверждается и доказывается, что „для двух неравных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей прямой».

На основании этого предложения в XII книге «Начал» доказано (XII, 2), что круги относятся друг к другу как квадраты, построенные на их диаметрах, и ряд других теорем (XII, 5; XII, 7; XII, 10).

В предложении 2 описанный процесс (так называемый алгоритм Евклида) применен как критерий существования общей меры двух неравных величин: если при постоянном переменном вычитании остающееся никогда не измерит своего предшествующего, то величины несоизмеримы.

Установление этого критерия является отправной точкой для построения всей теории. В предложениях 3 и 4 решается задача практического нахождения общей наибольшей меры для двух и трех соизмеримых величин с помощью этого процесса. Здесь же формулируется следствие: если некоторая величина измеряет данные величины, то она измеряет и их общую наибольшую меру.

Если применить алгебраическую терминологию, то окажется, что в этой форме предложения 2, 3, 4 аналогичны предложениям 1—3 из VII, арифметической, книги «Начал».

В предложениях 5—8 решается задача: определить, когда отношения двух величин могут быть заменены отношениями чисел. Сначала (X, 5, 6) показано, что соизмеримые величины имеют между собой отношение, как число к числу, и обратно, если две величины имеют между собой отношение, как число к числу, то они соизмеримы. Затем (X, 7, 8) установлены аналогичные предложения для несоизмеримых величин: они не имеют между собой отношения, как число к числу, и обратно, если две величины не имеют между собой отношения, как число к числу, то они несоизмеримы. Таким образом, оказывается, что отношение двух величин может быть сведено к отношению двух чисел в случае, если эти величины линейно соизмеримы.

В предложении 9 (так называемая теорема Теэтета) этот вопрос рассматривается подробнее. Оказывается, что если даны две линейно соизмеримые величины, то квадраты, построенные на них, относятся между собой, как два квадратных числа; обратно, у двух квадратов, относящихся между собой, как квадратное число к квадратному числу, стороны линейно соизмеримы.

Таким образом, здесь даны необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять два квадрата для того, чтобы их стороны были соизмеримы в длине. В то же время для двух несоизмеримых линейно (соизмеримых только в степени) величин квадраты, построенные на них, не имеют между собой отношения, как квадратное число к квадратному числу; и обратно. В переводе на алгебраический язык это предложение (если дано $\sqrt{A} = m\sqrt{B}$, то для площадей квадратов, построенных на них, A и B имеет место отношение $\frac{A}{B} = \frac{k}{l}$, где k, l не являются квадратными числами) означает, что корень из неточного квадрата не может быть выражен рациональным числом. Вообще же в предложении 9 установлена зависимость между величинами и числами.

Отсюда вытекает интересное следствие, касающееся величин, соизмеримых линейно и в степени: из линейной соизмеримости двух величин всегда следует соизмеримость в степени, но соизмеримые в степени не необходимо соизмеримы линейно; из линейной несоизмеримости не следует необходимо несоизмеримость в степени, но из несоизмеримости в степени линейная несоизмеримость следует с необходимостью. При алгебраической записи это очевидно: из $a = mb$ всегда следует $a^2 = m_1 b^2$ (m, m_1 — рациональны), но из $\sqrt{a} = m\sqrt{b}$ следует $a_1 = m_1 b_1$ (где a_1, b_1 — рациональные числа) лишь при условии $a = a_1^2 \quad b = b_1^2$

В предложении 10 решается задача на построение; если дана некоторая прямая, предлагается построить две несоизмеримые с ней прямые, из которых одна несоизмерима с ней только линейно, а другая — и в степени. Задача решается на основе предложения 26 из VIII книги, согласно которому подобные плоские числа имеют отношение, как квадратное число к квадратному числу. Построив требуемые прямые, Евклид тем самым доказывает существование величин, несоизмеримых ни линейно, ни в степени.

Далее доказаны теоремы, которые в современных обозначениях могут быть записаны следующим образом:

1) если даны величины A, B, C, D и $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, причем A соизмерима с B, то и C соизмерима с D; обратно, из несоизмеримости A с B вытекает несоизмеримость C с D (предложение 11);

2) транзитивность свойства соизмеримости: если даны величины A, B, C, причем A соизмерима с C, а B соизмерима с C, то A соизмерима с B (предложение 12);

3) если даны величины A, B, C, причем A соизмерима с B, но несоизмерима с C, то и B несоизмерима с C (предложение 13).

Предложение 14 важно тем, что в нем рассматриваются величины, удовлетворяющие следующим условиям, которые будут иметь большое значение в дальнейшем: для величин A, B имеет место равенство $\sqrt{A^2 - B^2} = C$, причем C линейно соизмеримо с A, т. е. $A = mC$. Евклид выражает это условие так: величина A в квадратах больше величины B на квадрат величины C, линейно с собой соизмеримой. В предложении 14 показано, что если имеются четыре величины A, B, C, D, причем $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ и $A^2 - B^2 = a^2$, $C^2 - D^2 = b^2$, то при условии, что a, A соизмеримы, оказывается, что b, C соизмеримы; если же a, A несоизмеримы, то и b, C несоизмеримы.

Таким образом, в рассмотренных выше предложениях Евклид установил зависимость между учением о соизмеримости и теорией отношений.

В предложениях 15 и 16 утверждается, что в результате сложения соизмеримых (несоизмеримых) величин получается величина, соизмеримая (несоизмеримая) с каждой из данных величин; и обратно, если результат сложения двух величин соизмерим (несоизмерим) с каждой из них, то и сами величины соизмеримы (несоизмеримы) между собой. Этот факт используется в предложениях 17 и 18, играющих чрезвычайно важную роль в доказательствах последующих предложений X книги. По существу здесь установлено, что решения системы уравнений

$$x + y = a,$$
$$xy = \frac{b^2}{4},$$

где $a > b$ $\left(\text{или, что то же, корни квадратного уравнения } ax - x^2 = \frac{b^2}{4}\right)$, соизмеримы или несоизмеримы между собой в зависимости от того, соизмеримы или несоизмеримы между собой a и $\sqrt{a^2 - b^2}$ Евклид формулирует предложение 17 для двух величин A и BC (рис. 10), где $BC > A$: если к BC „приложен“ с недостатком в виде квадрата параллелограмм, равный четвертой части квадрата на A $\left(\text{т. е. если выполнено условие } BC = x + y,\ xy = \frac{A^2}{4}\right)$, и если он разделяет ее на соизмеримые части (т. е. если x и y соизмеримы), то в квадратах большая будет больше меньшей на квадрат на соизмеримой с собой линейно прямой (т. е. тогда $BC^2 - A^2 = D^2$ и BC и D соизмеримы); и обратно.

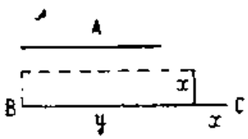


Рис. 10.

Таким образом, корни x_1, x_2 уравнения $ax - x^2 = \frac{b^2}{4}$ соизмеримы, если a и $\sqrt{a^2 - b^2}$ соизмеримы; и обратно, если a и $\sqrt{a^2 - b^2}$ соизмеримы, то и корни уравнения $ax - x^2 = \frac{b^2}{4}$ соизмеримы. Или, другими словами: если $\frac{x_1}{x_2} = k$ (k — рациональное число), то $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = l$ (l — рациональное число); и обратно. В этом предложении, следовательно, дается необходимое и достаточное условие рациональности корней указанного уравнения.

Предложение 18 по содержанию аналогично предыдущему с той разницей, что речь идет о несоизмеримости корней.

Предложение 19 принято считать началом второго раздела X книги «Начал», в котором Евклид рассматривает площади, построенные на соизмеримых и несоизмеримых (линейно и в степени) прямых. Оказывается, что прямоугольник, заключенный между двумя рациональными прямыми, соизмеримыми между собой линейно, рационален; и обратно: если прямоугольник рационален и одна сторона его рациональна, то и вторая также будет рациональной и соизмеримой с первой линейно (предложения 19, 20).

Если же построить прямоугольник на рациональных прямых, соизмеримых только в степени, то он окажется иррациональным. Евклид называет его медиальным, а сторону квадрата, равновеликого ему, медиалью. Он показывает, что эта прямая также иррациональна.

Переводя эти предложения на алгебраический язык, мы видим, что в них утверждается: 1) произведение двух линейно соизмеримых рациональных величин есть также рациональная величина; другими словами, здесь доказана рациональность произведений вида mn и $\sqrt{m}\sqrt{n}$ (где $\sqrt{n}=k\sqrt{m}$); 2) обратное утверждение: если произведение mn и один сомножитель m рациональны, то и второй сомножитель n рационален и соизмерим линейно с m; 3) произведение двух рациональных, но соизмеримых только в степени величин $\sqrt{m}$ и $\sqrt{n}$ (т. е. $\sqrt{n}$ не имеет вида $k\sqrt{m}$, где k — рациональное число) есть иррациональная величина $\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}$. Первая из рассматриваемых Евклидом иррациональностей — медиаль — может быть выражена*, следовательно, как $\sqrt{\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}$ или как $\sqrt[4]{mn}$.

Предложение 22 — обратное по отношению к 21; в нем утверждается, что если площадь медиальна и одна из сторон прямоугольника рациональна, то вторая будет также рациональной, несоизмеримой с первой. Другими словами, частное от деления величины $\sqrt{A}$ на рациональную B есть величина C, рациональная в степени и несоизмеримая с $\sqrt{A}$ линейно.

Предложением 23, содержащим утверждение о том, что всякая прямая, соизмеримая с медиалью, есть медиаль, Евклид выделяет из множества всех иррациональных прямых подмножество медиалей.

---

* В данном случае ясен характер искажений, которым подвергается смысл предложений X книги в результате алгебраической интерпретации геометрических понятий: оказывается, что рациональная в степени величина $\sqrt{A}$ выражена так же, как и квадрат, построенный на медиали $\left(\sqrt[4]{B}\right)^2=\sqrt{B}$, т. е. медиальная площадь. Для Евклида же это существенно различные понятия.

Следующая группа предложений (24—26) аналогична предыдущим предложениям относительно площадей, построенных на рациональных прямых, с той разницей, что здесь речь идет о медиалях. Показано, что: 1) если две медиали соизмеримы линейно, то площадь прямоугольника, заключенного между ними, медиальна (предложение 24); 2) если медиали соизмеримы только в степени, то прямоугольник между ними может быть либо рациональным, либо медиальным (предложение 25). Это значит, что если $\sqrt[4]{m}=k\sqrt[4]{n}$, где k—рациональное число, то $\sqrt[4]{m}\cdot\sqrt[4]{n}=k\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt[4]{n}=k\sqrt{n}$. Если же $\sqrt[4]{m}=\sqrt{k}\cdot\sqrt[4]{n}$, то $\sqrt[4]{m}\cdot\sqrt[4]{n}=\sqrt{kn}$; тогда либо под корнем стоит квадратное число, либо нет; в зависимости от этого площадь либо рациональна, либо медиальна. Наконец, в предложении 26 показано, что разность между двумя медиальными площадями не является рациональной, т. е. что разность $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ не может быть равна рациональному числу.

На этом кончается второй раздел десятой книги «Начал».

В третьем разделе (предложения 27—35) дается построение пар соизмеримых и несоизмеримых прямых, которые удовлетворяют ряду условий, налагаемых на площади прямоугольников, заключенных между этими прямыми, квадратов, построенных на них, и т. д. Цель этого построения выясняется только при переходе к следующему разделу, где Евклид вводит шесть видов иррациональностей, получаемых с помощью сложения. Тогда становится понятным, что предложения 27—35 являются подготовительными для введения этих иррациональностей: построив их, Евклид тем самым доказывает их существование и после этого дает определения, теперь уже имеющие смысл. Евклид не излагает последовательно своего хода мысли, а сообщает результат, известный ему заранее. Эта особенность изложения составляет одну из трудностей, возникающих при чтении X книги.

Прежде всего (предложения 27 и 28) строятся две заключающие данную площадь, соизмеримые только в степени медиали (т. е. две величины вида $\sqrt[4]{A}$ и $\sqrt[4]{B}$, для которых не может быть выполнено соотношение $\sqrt[4]{A}=k\sqrt[4]{B}$ но выполняется соотношение $\left(\sqrt[4]{A}\right)^2=l\left(\sqrt[4]{B}\right)^2$ где k, l — рациональные числа). В первом случае эта площадь предполагается рациональной, а во втором — медиальной.

В двух следующих за этими предложениями леммах решаются задачи: 1) найти два таких квадратных числа, что и составленное из них будет квадратным числом, т. е. дать целочисленное решение неопределенного уравнения $x^2 + y^2 = z^2$; 2) найти два таких квадратных числа, что составленное из них число не будет квадратным. Решение первой задачи может быть представлено в виде $mnpq$ и $mnp^2 - mnq^2$, а второй — в виде $mnp^2 \cdot mnq^2$ и

$$\left[\frac{1}{2}(mnp^2 - mnq^2) - 1\right]^2$$

После этого Евклид приступает к построению пар иррациональных прямых, удовлетворяющих условиям, которые окажутся необходимыми в дальнейшем*

В предложениях 29 и 30 отыскиваются две рациональные соизмеримые только в степени прямые $A = \sqrt{a}$ и $B = \sqrt{b}$ такие, что величина $\sqrt{A^2 - B^2}$ будет: 1) соизмеримой с A и 2) несоизмеримой с A. В предложении 36, для которого X. 29 и X. 30 являются подготовительными, рассматривается иррациональная прямая, полученная сложением прямых указанного вида; эту прямую Евклид называет „биномиалью" (дословно: имеющая два имени) и доказывает ее иррациональность. В современных обозначениях биномиаль имеет вид $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. При этом биномиаль, удовлетворяющая условиям предложения 29, есть $\sqrt{a} + \sqrt{a} \times \sqrt{1 - k^2}$, где k — рациональное число, а биномиаль, удовлетворяющая условиям предложения 30, есть $\sqrt{a} + \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, где m и n — целые числа такие, что $m^2 + n^2 \neq$ квадрату.

В предложениях 31 и 32 находятся две соизмеримые только в степени медиали $A = \sqrt[4]{a}$ и $B = \sqrt[4]{b}$ такие, что величина $\sqrt{A^2 - B^2}$ линейно соизмерима с A и площадь, заключенная между ними, 1) рациональна и 2) медиальна. В предложениях 37 и 38 Евклид рассматривает прямые, представляющие собой суммы найденных прямых; он называет их, соответственно, первой и второй бимедиалью и доказывает иррациональность каждой из них. В современных обозначениях первая бимедиаль имеет вид $A + B =$

* При изображении евклидовых иррациональностей с помощью современной алгебраической символики мы будем строго придерживаться формы, введенной И. Н. Веселовским в соответствующих разделах комментариев к X книге «Начал» того издания, на которое мы постоянно ссылаемся. Такое единообразие необходимо для того, чтобы избавить читателя от лишних затруднений, связанных с обозначениями.

$= \sqrt{a}\left(\sqrt[4]{k} + \sqrt[4]{k^3}\right)$, где k — рациональное число, а вторая $A + B = \sqrt[4]{a}(1 + \sqrt{b})$.

В следующих трех предложениях (33—35) Евклид находит три пары прямых А и В, несоизмеримых в степени, удовлетворяющих, соответственно, условиям: 1) площадь A^2+B^2, составленная из их квадратов, рациональна, а заключенный между ними прямоугольник AB медиален; 2) площадь A^2+B^2 медиальна, а прямоугольник AB рационален; 3) как площадь A^2+B^2, так и прямоугольник AB медиальны и в то же время несоизмеримы между собой. Далее (предложения 39—41), как и раньше, рассматриваются три прямые, получающиеся сложением найденных прямых, и доказывается иррациональность каждой. Первую из них Евклид называет «большей» иррациональностью; ее алгебраическое выражение таково:

$$A + B = \sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}} + \sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}}\right).$$

Вторая названа «рационально и медиально квадрирующей» и может быть изображена как

$$\sqrt{\frac{a}{\sqrt{1 + k^2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}\right)}.$$

Наконец, третья названа «бимедиально квадрирующей»; алгебраически она выражается как

$$\sqrt{\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{1 + k^2}}\left(\sqrt{1 + k^2} + 1\right)} = \sqrt[4]{ab}\ \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}}$$

Таким образом, Евклид дал определения шести иррациональностей, получаемых с помощью сложения. В основе этой классификации лежит идея, которую легко проследить: на полученной сложением прямой $A+B$ строится квадрат $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$ и рассматриваются все значения, которые принимают площади A^2+B^2 и AB. Возможны следующие случаи:

I. A и B соизмеримы в степени:

1) A и B рациональны в смысле Евклида; тогда $A+B$ — биномиаль.

2) A и B медиальны; тогда

(а) если AB рационально, то $A+B$ — первая бимедиаль,

(б) если AB иррационально, то $A+B$ — вторая бимедиаль.

II. A и B несоизмеримы:

1) если A^2+B^2 рационально, AB медиально, то $A+B$ — «большая»;

2) если A^2+B^2 медиально, AB рационально, то $A+B$ «рационально и медиально квадрирующая»;

3) если A^2+B^2 медиально, AB медиально, то $A+B$ «бимедиально квадрирующая».

Затем (предложения 42—47) на основании X. 26 Евклид доказывает, что для определенных им иррациональностей первой гексады имеет место единственность разложения на составные части, т. е. если в пределах одного вида $A+B=$ $=A_1+B_1$, то $A=A_1$, $B=B_1$.

Наследующем этапе рассуждений Евклид вводит иррациональности второй гексады, а именно, шесть видов биномиалей. Пусть $A=\sqrt{a}$, $B=\sqrt{b}$, $A+B$ — биномиаль и $A>B$. Тогда в зависимости, во-первых, от того, будет ли выражение $\sqrt{A^2-B^2}$ соизмеримо или несоизмеримо с A, а во-вторых, от того, соизмеримы A или B с рациональной прямой, возможны следующие случаи:

I. $\sqrt{A^2-B^2}$ соизмерим с A:

1) если A соизмерима с данной рациональной прямой, т. е. если A рациональна, то $A+B$ — первая биномиаль;

2) если B рациональна, то $A+B$ — вторая биномиаль;

3) если ни A, ни B не рациональны, то $A+B$ — третья биномиаль;

II. $\sqrt{A^2-B^2}$ несоизмерим с A:

1) если A рациональна, то $A+B$ — четвертая биномиаль;

2) если B рациональна, то $A+B$ — пятая биномиаль;

3) если ни A, ни B не рациональны, то $A+B$ — шестая биномиаль.

В следующих предложениях (48—53) дано построение шести биномиалей, т. е. доказано их существование. Если прибегнуть к алгебраической записи, то биномиали B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 можно изобразить следующим образом: если r — заданная рациональная прямая, соизмеримостью с которой определяется рациональность A и B, то

$$B_1=mr+r\sqrt{m^2-n^2},$$

$$B_2=r\frac{m}{\sqrt{1-n^2}}+mr,$$

$$B_3=\sqrt{a}+\sqrt{1-n^2}\ \sqrt{a},$$

$$B_4=\sqrt{a}+\sqrt{b}=mr+\sqrt{m^2r^2-(a-b)},$$

$b\neq$ квадрату,

$$B_5 = \sqrt{m^2r^2 + c} + mr,$$

$B_6 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a - b \neq$ квадрату рационального числа; здесь m, n — рациональные числа.

После введения иррациональностей первой и второй гексад Евклид переходит к установлению зависимости между ними. Оказывается, что каждая иррациональность первой гексады связана с соответствующей ей иррациональностью второй гексады соотношением, которое в алгебраической форме может быть записано в виде

$$\sqrt{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{\sqrt{A} + \sqrt{A - B}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{A} - \sqrt{A-B}}{2}}. \qquad (*)$$

При указанных выше условиях, накладываемых на A, B, $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, данная формула содержит в себе все случаи, которые рассматриваются в предложениях 54—65. В левой части ее стоит выражение для биномиалей, а в правой — для иррациональностей первой гексады.

Если придерживаться геометрической терминологии, то в этих предложениях доказано, что площади, заключенные между рациональной прямой и каждой из шести биномиалей, могут быть представлены в виде квадрата на соответствующей иррациональной прямой из первой гексады.

Так, предложение 54, гласящее, что произведение первой биномиали на рациональную величину есть квадрат биномиали, формулируется следующим образом: «Если площадь заключается между рациональной прямой и первой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональной, так называемой биномиалью». Аналогично формулируются и предложения 55—59 для остальных иррациональностей первой и второй гексад. Если выразиться алгебраическим языком и принять, что заданная рациональная есть единица, то эти предложения показывают, что корень из каждой биномиали есть соответствующая ей иррациональность первой гексады.

В предложениях 60—65 доказаны обратные утверждения: квадрат на биномиали (соответственно на первой и второй бимедиалях, на «большей», на рационально и медиально квадрирующей и на бимедиально квадрирующей), будучи приложен к рациональной прямой, образует шириной первую (соответственно, вторую и т. д.) биномиаль. Другими словами: квадрат каждой иррациональности первой гексады есть соответствующая этой иррациональности биномиаль.

Далее, в предложениях 66—70 преследуется цель: доказать, что иррациональная прямая, соизмеримая с какой-либо из прямых первой гексады, относится к тому же виду. Например (предложение 70), «соизмеримая с бимедиально квадрирующей будет бимедиально квадрирующей».

В последних двух предложениях (71—72) этого раздела X книги показано, какой вид имеет прямая, квадрирующая площадь, возникшую в результате сложения рациональной площади с медиальной или двух медиальных площадей. Так, если складываются рациональная и медиальная площади, то квадрирующая их сумму $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ есть либо биномиаль, либо первая бимедиаль, либо „большая", либо рационально и медиально квадрирующая. Если же складываются две несоизмеримые медиальные площади, то эта квадрирующая $\left(\text{т. е. } \sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\right)$ есть либо вторая бимедиаль, либо бимедиально квадрирующая.

В заключении к этому разделу показано, что иррациональности первой гексады не будут тождественны ни с медиалью, ни между собой.

В следующей части X книги «Начал» (предложения 73—110) исследуются иррациональности, полученные вычитанием. Рассуждения проводятся так же, как в случае сложения; аналогично формулируются и предложения.

Рассматриваются шесть иррациональностей, аналогичных иррациональностям первой гексады, с той разницей, что сложение заменено вычитанием. Эти иррациональности следующие: 1) *вычет* (*апотома*), 2) *первый медиальный вычет*, 3) *второй медиальный вычет*, 4) *«меньшая» иррациональная*, 5) *образующая с рациональным целое медиальное*, 6) *образующая с медиальным целое медиальное*. Вводятся также (аналогично шести биномиалям) шесть *вычетов*. Затем между иррациональностями третьей и четвертой гексад *устанавливается* зависимость, которая может быть выражена формулой

$$\sqrt{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{A-B}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{A-B}}{2}},$$

аналогичной формуле (*).

Помимо утверждений, доказанных ранее для иррациональностей, полученных сложением, доказывается также предложение (111) о том, что биномиаль и вычет не могут быть тождественными, т. е. что они принадлежат к различным классам иррациональностей.

Таким образом, произведя классификацию рассмотренных выше иррациональностей, Евклид доказал, что, во-первых, к каждому классу принадлежит хотя бы одна иррациональность, во-вторых, эти классы различны, в-третьих, все иррациональности, принадлежащие к одному классу, соизмеримы между собой.

Завершающие предложения X книги (112—114) содержат утверждения, которые алгебраически можно записать так:

$$\frac{k(a-b)}{\sqrt{a}+\sqrt{в}} = k\left(\sqrt{a}-\sqrt{в}\right),$$

$$\frac{k(a-b)}{\sqrt{a}-\sqrt{в}} = k\left(\sqrt{a}+\sqrt{в}\right)$$

Исследователи вслед за Гейбергом [541] считают эти предложения неподлинными и вставленными в «Начала» значительно позднее Евклида [134, т. II, стр. 494], но, очевидно, до Паппа [618, стр. 17].

Наконец, последнее (115) предложение X книги показывает, что, хотя Евклид оперировал только (выражаясь современным языком) корнями вида $\sqrt{A}$ и $\sqrt[4]{A}$, он допускал рассмотрение корней $\sqrt[8]{A}$, $\sqrt[16]{A}$, $\sqrt[32]{A}$ и т. д.: «Из медиали возникают в бесконечном множестве иррациональные, и никакая никакой из предыдущих не тождественна».

О цели и значении книги X

Ввиду сложности X книги «Начал» основные усилия исследователей направляются обычно на разъяснение ее смысла с привлечением числовых иррациональностей. Так поступали не только средневековые издатели и комментаторы Евклида, о чем подробнее мы скажем ниже, но до сравнительно недавнего времени и современные историки математики (например, [85, 503, 719]). Анализ содержания X книги часто сводился к переводу ее предложений на современный алгебраический язык, а многие принципиально важные вопросы оставались незатронутыми. На это, например, обращает внимание К. Таэр, указывая, что если все содержание X книги сводится, как это делает М. Шаль [478], к формуле

$$\sqrt{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{A-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{A-B}}{2}},$$

то при этом упускается из виду, что Евклид для каждого выражения решает вопрос, может ли оно и при каких условиях быть сведено к более простому или однородному с ним: «Исследователи, — отмечает он, — почти забыли, что книга представляет собой классическую школу доказательства невозможности» [896, стр. 113].

В результате создалось несколько искаженное представление о месте этой книги в системе «Начал» и о роли, которую она сыграла в истории математики. Данная в ней классификация иррациональностей нередко рассматривалась как чрезвычайно остроумная, но несколько искусственно построенная теория, возникшая с единственной целью — обосновать учение о правильных многогранниках.

Предметом внимательного изучения X книга стала в конце XIX в. Г Цейтен, видевший в ней «правила для геометрического представления различных величин, иррациональность которых зависит — на нашем математическом языке — от квадратных корней» [350, стр. 404], указал на видимую связь классификации Евклида с последовательным решением квадратных уравнений. Эта связь подробно раскрыта С. Христенсеном [480], который выдвинул гипотезу о теории численных уравнений как источнике указанной классификации. По его мнению, если бы численные решения не были известны грекам, то трудно было бы выяснить, что явилось поводом для исследований, проведенных в X книге, так как при чисто геометрическом подходе любые отрезки, служащие решениями уравнений, равноценны между собой. Еще более основательный анализ X книги с точки зрения ее связи с квадратными и биквадратными уравнениями дал в 1908 г. Т. Хис [587, т. 3].

Следуя Хису, теорию X книги можно с помощью алгебраической символики изложить следующим образом.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 \pm 2\alpha x\cdot\rho \pm \beta\cdot\rho^2 = 0, \qquad (**)$$

где α, β — рациональные коэффициенты, а ρ — рациональная в смысле Евклида прямая линия, т. е. линия, которая может иметь вид a и $\sqrt{a}$. Исследуются только положительные корни этого уравнения, так как его решение представляет собой прямую линию. Корни даются формулой

$$x = \mp \alpha\rho \pm \sqrt{\alpha^2\beta^2 \pm \beta\rho^2}$$

Положительные корни могут иметь вид

$$x_1 = \rho\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right),$$
$$x_1 = \rho\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right),$$
$$x_2 = \rho\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \alpha\right),$$
$$x_2 = \rho\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta} - \alpha\right).$$

Евклидова классификация представляет собой классификацию этих корней уравнения (**) в зависимости от значений коэффициентов α, β и их отношения друг к другу. Возможны следующие случаи:

I. α, β — целые числа или рациональные дроби:

1) $\beta = \frac{m^2}{n^2}\alpha^2$, тогда $x_1 = \rho\alpha + \rho\sqrt{\alpha^2 - \beta}$ — первая биномиаль $\left(\text{так как } \rho\sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta)} = \rho\alpha\frac{m}{n} \text{ соизмерим с } \rho\alpha\right)$. x_1' — первый вычет;

2) $\beta \neq \frac{m^2}{n^2}\alpha^2$, тогда x_1 — четвертая биномиаль, x_1' — четвертый вычет;

3) $\beta = \frac{m^2}{n^2 - m^2}\alpha^2$, тогда x_2 — вторая биномиаль, x_2' — второй вычет;

4) $\beta \neq \frac{m^2}{n^2 - m^2}\alpha^2$, тогда x_2 — пятая биномиаль, а x_2' — пятый вычет.

II. α рационально только в степени, т. е. $\alpha = \sqrt{\frac{k}{l}}$, где k, l — целые; тогда если положить $\frac{k}{l} = \lambda$,

$$x_1 = \rho\left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - \beta}\right),\ x_1' = \rho\left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - \beta}\right),$$
$$x_2 = \rho\left(\sqrt{\lambda + \beta} + \sqrt{\lambda}\right),\ x_2' = \rho\left(\sqrt{\lambda + \beta} - \sqrt{\lambda}\right).$$

Произведя замену $\lambda + \beta = \gamma$, получим

$$x_2 = \rho\left(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma - \beta}\right),\ x_2' = \rho\left(\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma - \beta}\right).$$

Таким образом, x_2, x_2' имеют тот же вид, что и x_1, x_1'.

Если $\sqrt{\lambda - \beta}$ рационален, то приходим к уже рассмотренным видам. Поэтому остаются два случая:

1) $\beta=\frac{m^2}{n^2}\lambda$, тогда x_1 — третья биномиаль, а x_1' — третий вычет;

2) $\beta\neq\frac{m^2}{n^2}\lambda$, тогда x_1 — шестая биномиаль, а x_1' — шестой вычет.

Таким образом, корни уравнения ($*$ $*$) в соответствии с евклидовой классификацией составляют иррациональности второй и четвертой гексад. Если извлечь корень из каждой иррациональности, а вернее — из произведения каждой из них на длину заданного отрезка, то возникнут иррациональности первой и третьей гексад. В то же время они представляют собой корни уравнений

$$x^4 \pm 2\alpha x^2\rho^2 \pm \beta\rho^4 = 0.$$

Действительно:

1) для биномиали и вычета, получающихся в результате извлечения корня из первой биномиали и из первого вычета и имеющих вид $x=\rho\pm\sqrt{k}\cdot\rho$ (k — неквадратное рациональное число), находим

$$x^2=\rho^2(1\pm 2\sqrt{k}+k^2),$$

откуда ясно, что они суть корни уравнения

$$x^4-2(1+k)\rho^2x^2+(1-k)^2\rho^4=0;$$

2) аналогично, первая бимедиаль и первый медиальный вычет, имеющие вид $k^{\frac{1}{4}}\rho\pm k^{\frac{3}{4}}\rho$, суть корни уравнения

$$x^4-2x^2k^{\frac{1}{2}}(1+k)\rho^2+k(1-k)^2\rho^4=0;$$

3) вторая бимедиаль и второй медиальный вычет $k^{\frac{1}{4}}\rho\pm$ $\pm\frac{\sqrt{\lambda}}{k^{\frac{1}{4}}}$ (где k, λ — неквадратные рациональные числа) суть корни уравнения

$$x^4-2\frac{k+\lambda}{\sqrt{k}}\rho^2x^2+\frac{(k-\lambda)^2}{k}\rho^4=0;$$

4) бо́льшая и меньшая иррациональности

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\pm\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$$

— корни уравнения

$$x^4 - 2\rho^2 x^2 + \frac{k^2}{1+k^2}\rho^4 = 0;$$

5) рационально и медиально квадрирующая и образующая с рациональным целое медиальное

$$\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}$$

— корни уравнения

$$x^4 - \frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\rho^2 x^2 + \frac{k^2}{(1+k^2)^2}\rho^4 = 0;$$

6) бимедиально квадрирующая и образующая с медиальным целое медиальное

$$\frac{\lambda^{\frac{1}{4}}\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} \pm \frac{\lambda^{\frac{1}{4}}\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$$

— корни уравнения

$$x^4 - 2\sqrt{\lambda}\cdot x^2\rho^2 + \lambda\frac{k^2}{1+k^2}\rho^4 = 0.$$

Каждое из указанных биквадратных уравнений равносильно системе

$$u^2 + v^2 = A,$$
$$uv = B,$$

где на A и B налагаются соответствующие условия.

Таким образом, в X книге исследуются решения квадратных и биквадратных уравнений с рациональными коэффициентами. Геометрический подход послужил причиной тому, что теория уравнений приобрела вид, существенно отличный от того, в каком она предстает перед нами сейчас. Прежде всего, необходимо было классифицировать иррациональные прямые, являющиеся решениями: эта классификация призвана была восполнить отсутствие системы алгебраических обозначений и дать возможность различить отдельные частные случаи. По этому поводу Г Цейтен пишет: «Так как корни уравнений второй степени в случае несоизмеримости их с заданными величинами не могут быть выражены точным образом с помощью этих величин, то понятно, что греки в своих точных вычислениях не вводили никаких приближенных значений, а только продолжали действия с найденными количествами, изображаемыми отрезками, которые получались при построении, соответствовавшем решению задачи. По существу мы поступаем таким же образом, когда вместо вычисления корней довольствуемся выражением их с помощью знаков квадратного корня или других алгебраических символов». «Однако, — говорит далее Цейтен, — так как всякий отрезок похож на любой другой отрезок, то этим способом нельзя было достигнуть прозрачности нашей алгебраической символики, и пришлось предпринять классификацию иррациональных количеств, получаемых при последовательных решениях уравнений второй степени» [350, стр. 50].

Вопрос о цели написания X книги продолжает привлекать интерес исследователей и в настоящее время. С новой точки зрения к его решению подошел К. Рейдемейстер [739], который, сделав попытку показать ведущую роль арифметики в математической науке греков, заключает, что в X книге Евклид преследовал арифметические цели, и видит в ней венец арифметического учения «Начал». По его мнению, цель книги — «сделать выразимыми некоторые классы невыразимых отрезков», тем самым арифметически определить эти отрезки. Поэтому он считает неверным сводить ее смысл к решению определенных квадратных и биквадратных уравнений.

Столь же общий подход к проблеме характеризует работу А. Е. Раик [255], в которой подводится итог высказанным ранее мнениям и дается четкий ответ на вопрос о месте X книги в общей системе «Начал», о ее содержании и роли. Автор приходит к аналогичному выводу, что суть этой книги «заключается не только в проведенной в ней полной классификации решений квадратных и некоторых биквадратных уравнений с рациональными, в смысле Евклида, коэффициентами, а в «выразимости» классифицируемых величин с помощью натуральных чисел» [255, стр. 376]. При таком подходе «Начала», вместе с арифметическими книгами, представляются цельной и стройной системой, причем в X книге с помощью арифметики завершается построение геометрии. А. Е. Раик показала также, что евклидова классификация рассмотренных им иррациональных величин является полной.

Несколько иной мыслью руководствовался А. И. Маркушевич, поставив вопрос о возможном ходе идей, «который мог бы фактически привести Евклида именно к такому, а не к иному содержанию его труда»; этот ход идей, имеющий рекуррентный характер, автор называет «принципом Теэтета» и выделяет в нем три этапа: 1) переход от прямых исходного класса к классу построенных на них площадей, квадратов или прямоугольников; 2) выражение соотношений между получаемыми площадями и площадями ранее построенных классов и затем, если понадобится, расширение нового класса площадей до полного объема множества, соответствующего найденному характеристическому свойству; 3) получение класса (нового) прямых при помощи некоторого ограничения, наложенного на прямые (на стороны прямоугольника), производящие найденные площади.

Таким образом, в работах, содержащих анализ X книги «Начал», поставлен и разрешен ряд важных проблем истории греческой математики. Выводы, сделанные исследователями, в основном не противоречат один другому и с большинством из них трудно не согласиться.

Следует только подчеркнуть, что вопрос будет безосновательно упрощен, если считать, например, что весь смысл классификации иррациональностей сводился для греков к созданию некоторого эквивалента нащей алгебраической символики. Нельзя не присоединиться к мнению А. И. Маркушевича, предостерегающего от чрезмерной модернизации хода мыслей Евклида. С нашей точки зрения, прежде всего не следует упускать из виду, что различие между числом и величиной, признававшееся в греческой математике одним из ее важнейших принципов и носившее далеко не формальный характер, обусловило и специфический подход к решению многих вопросов. Исследование свойств непрерывной величины приобрело, в значительной мере, самостоятельное значение и рассматривалось не только как математическая, но и как философская проблема. Этим, на наш взгляд, объясняется именно такой ход развития идей Евклида при построении X книги. Действительно, с первого взгляда связь с теорией квадратных уравнений остается в тени, в то время как на поверхность выступает логически изложенное учение о соизмеримости и несоизмеримости некоторых классов непрерывных величин. Это отмечает и Д. Д. Мордухай-Болтовской: «В X книге мы встречаем цели, очень удаленные от числового решения уравнения — исследование рациональности и иррациональности геометрических величин (лучше сказать — соизмеримости и несоизмеримости с данной), определение которых приводит к квадратному и биквадратному уравнению» [134, т. II, стр. 385].

Мы считаем необходимым еще раз указать на это обстоятельство, так как только оно делает понятным дальнейшую историю X книги и объясняет, в частности, почему арифметизация изложенного в ней учения происходила с большими трудностями и почему эта книга вплоть до XVII в. составляла предмет специальных глав большинства математических сочинений.

Вопрос об истории X книги является важнейшей стороной общего вопроса о формировании понятия действительного числа.

Развитие теории иррациональных величин в греческой математике

В 1842 г. Нессельман [719, стр. 183] высказал мнение, что после Евклида ни один греческий математик не только не разрабатывал дальше теорию иррациональных величин, но и вообще не занимался ею. Несостоятельность этого суждения выяснилась впервые в 1856 г., когда Ф. Вепке [1017] по находящейся в Париже арабской рукописи (№ 2457, 5° 6°) изложил содержание сочинения ученого X в. ад-Димишки (см. гл. II), которое оказалось переводом греческого комментария к X книге. Имя автора комментария вызвало споры, так как его арабское написание в рукописи допускает разночтения. Вепке полагал, что это — Ветиус Валенс, астроном и астролог, современник Птолемея [461, 573], но позже И. Л. Гейберг привел доводы, опровергающие такое предположение [590, стр. 169—170].

Г Зутер прочел имя автора как Папп, и в настоящее время эта расшифровка общепризнана, тем более, что найдены исторические свидетельства в пользу того, что Папп действительно комментировал X книгу «Начал».

Арабский текст комментария был опубликован Вепке в 1855 г. в Париже, но это издание почти сразу превратилось в библиографическую редкость. Впоследствии (1923 г.) его перевел на немецкий язык Г Зутер [882] и на английский (1930 г.) — Г Юнге и В. Томсон [618, 422]. Английский перевод, сделанный непосредственно с рукописи, а потому более точный, издан вместе с арабским текстом. Обнаружен, кроме того, средневековый латинский перевод комментария Паппа с арабского языка, выполненный, вероятно, Герардо Кремонским (1114—1187 гг.). Этот перевод был исследован Г Юнге и опубликован им в 1936 г. [619].

В настоящее время имеются сведения и о других греческих комментаторах «Начал» — Героне [494], Порфирии [843], Симпликии [423, 494, 826, 843], Прокле [552], Теоне [587]. Однако по поводу развития теории квадратичных иррациональностей после Евклида более подробных данных, чем из комментария Паппа, пока не получено.

Комментарий* состоит из двух разделов, в первом из которых, носящем скорее философский, чем математический характер, содержится анализ основных понятий теории иррациональных величин (меры, соизмеримости, рациональности, иррациональности) и сообщаются некоторые важные исторические сведения: освещается роль Теэтета и Евклида в развитии этого учения, возникшего, по словам автора, в школе Пифагора, а главное — указано, что попытка выйти за пределы, установленные Евклидом, была сделана Аполлонием: этот ученый, «чей гений в математике был чрезвычайно велик», добавил несколько важных видов иррациональных величин, рассмотрев так называемые «неупорядоченные» иррациональности.

Из текста следует, что Аполлоний ввел, помимо биномиали $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, „триномиаль" $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ и „квадриномиаль" $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$; а для вычитания, аналогично вычету — иррациональности $\sqrt{A}-(\sqrt{B}-\sqrt{C})$ и $\sqrt{A}-(\sqrt{B}-(\sqrt{C}-\sqrt{D})$, а также рассмотрел $\sqrt[4]{A}$, $\sqrt[8]{A}$, $\sqrt[16]{A}$ и т. д. Расширение области иррациональных величин, изученных в X книге, по-прежнему происходило за счет тех иррациональностей, которые могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Об иррациональностях общего вида $\sqrt[n]{A}$, где, например, $n=3$, речь не шла, так как их нельзя построить этим способом. Как увидим ниже, попытка расширить рассматриваемую область введением величины вида $\sqrt[3]{A}$ была сделана позже математиками стран ислама, когда уже в достаточной мере ясно была осознана арифметическая природа иррациональности.

Обсуждая основные понятия учения Евклида, Папп подвергает критике определение величины, «рациональной в степени», и считает его недостаточно продуманным и порождающим путаницу. Впоследствии средневековые восточные математики величину вида $\sqrt{A}$ назвали «иррациональностью первой степени» (см. ниже).

Во второй части трактата Папп ввел ряд теорем, дополняющих X книгу.

Мы пользуемся как упомянутыми переводами, так и арабской рукописью, микрофильм которой любезно представил в наше распоряжение Б. А. Розенфельд.

§ 8. Учение о числе и величине в позднеэллинистический период

Общая характеристика

В позднеэллинистический период греческой истории значительно изменилось общее направление развития математики. Эти изменения настолько существенны, что многие историки науки видят основания для вывода об упадке и гибели античной математики. Однако сейчас гораздо более обоснованным, как было сказано выше, представляется взгляд, согласно которому следует говорить не об упадке, а о переключении внимания исследователей на новые вопросы, вставшие в этот период под воздействием требований практики. Такого рода требования касались в первую очередь разработки вычислительных приемов, а это, естественно, сказалось на общем характере математики, вызвав арифметизацию и алгебраизацию ее методов. Изменилась тематика исследований, примером чего может служить «Метрика» Герона, в которой рассматривались прикладные задачи, раньше считавшиеся предметом логистики, и излагались правила приближенного вычисления квадратных и кубических корней и численного решения квадратных уравнений.

В учении о числе в рассматриваемый период прослеживаются два направления: первое продолжает теоретико-числовую традицию пифагорейцев и представлено главным образом Никомахом Геразским, второе — арифметико-алгебраическое — представлено Диофантом. Общая для этих направлений черта, отличающая их от соответствующих направлений в классический период, заключается в том, что предметом исследований служило число уже без какой бы то ни было геометрической интерпретации. Эти направления продолжали интенсивно развиваться, как мы увидим, и позже, в средневековой математике стран Ближнего и Среднего Востока.

Никомах Геразский

Время жизни Никомаха ориентировочно определяется как конец I — начало II в. н. э. Его «Введение в арифметику» [509, 719, 731] долгое время пользовалось большой популярностью, современные же историки науки оценивают это произведение по-разному. Мы остановимся на его содержании, так как оно сыграло большую роль в развитии учения о числе на средневековом Востоке.

В первой из двух книг «Введения», менее значительной в научном отношении, изложены главным образом философские рассуждения неопифагорейского характера. Здесь дано определение числа как «ограниченного количества, или совокупности единиц», или «потока величины», и приведена классификация четных и нечетных чисел, несколько отличная от евклидовой. Согласно Никомаху, четные числа подразделяются на: 1) четно-четные вида 2^n, 2) четно-нечетные вида $2(2m+1)$ и 3) нечетно-четные вида $2^n(2m+1)$. Евклид же рассматривает только два класса — четно-четные и четно-нечетные. Число первого класса, по его определению, это «четным числом измеряемое четное число раз» [134, кн. VII, определение 8], а второго — это «четным числом измеряемое нечетное число раз» [134, кн. VII, определение 9]; тогда числа вида $2^n(2m+1)$ оказываются одновременно принадлежащими и к одному, и к другому классу [134, IX, 34]. Это несоответствие и устранил Никомах своим определением.

Кроме того, разбираются совершенные, недостаточные и избыточные числа. Здесь же сообщается способ выделения простых чисел из натурального ряда, известный сейчас под названием «решета Эратосфена».

Все величины, по Никомаху, могут рассматриваться либо сами по себе, либо в их отношении к другим, причем это отношение может быть либо отношением равенства, либо неравенства. В последнем случае выделяются шесть видов отношений: 1) кратное, 2) превосходящее на долю, 3) превосходящее на «доли», 4) кратное, превосходящее на долю, 5) кратное, превосходящее на «доли». Это подразделение впоследствии неизменно фигурировало и в средневековых восточных сочинениях по теоретической арифметике (см. гл. II).

Во второй книге «Введения» излагается теория фигурных чисел и теория пропорций; последняя «необходима для естествознания, для теории музыки, сферической тригонометрии и планиметрии, но более всего — для понимания древних писателей». Кроме известных ранее арифметического, геометрического и гармонического среднего, Никомах рассматривает еще семь средних и показывает, что все они порождаются геометрическим средним. Теория средних, по мнению Ван дер Вардена [82, стр. 318—322], ведет свое начало от Эратосфена.

В сочинении Никомаха дано полное изложение античной теоретической арифметики. Хотя на нем лежит печать мистического мировоззрения автора и стиль его с многословием и философскими отступлениями значительно уступает сжатому и точному стилю Евклида, оно сыграло немалую роль в истории науки о числе: здесь впервые эта наука полностью избавилась от сковывающих ее геометрических представлений. Никомах уже не применяет линий для обозначения чисел, а оперирует в своих рассуждениях самими числами.

«Введение в арифметику» вскоре приобрело огромную популярность и на продолжении всего средневековья в странах Востока и в Европе считалось столь же основополагающим сочинением в арифметике, как «Начала» Евклида в геометрии. Из многочисленных комментариев к нему наибольшую известность приобрел комментарий ученого IV в. Ямвлиха.

Диофант Александрийский

Замечательное явление позднеэллинистической математики представляет творчество Диофанта [39, 43, 182, 350, 585]. Его сочинение «Арифметика» ярко характеризует новое направление в греческой математике, в котором, по всей вероятности, нашли продолжение древневавилонские арифметико-алгебраические традиции [82, 726]. Те же традиции, очевидно, были источником и средневековой восточной алгебры, по своему характеру сходной с алгеброй Диофанта (см. гл. V нашей работы).

Алгебра Диофанта построена на чисто арифметической основе, и в этом отношении в Никомахе можно видеть его греческого предшественника. Хотя он применяет геометрическую терминологию (например, имея в виду произведение, говорит о прямоугольнике), но оперирует при этом числами, нарушая принцип однородности, принятый в геометрической алгебре (в частности, свободно складывает площадь со стороной) [350, стр. 168]. То же мы видим и в математике древних вавилонян [82, стр. 97]. Но «это был не простой возврат к примитивной алгебре вавилонян, а новый этап в развитии алгебры, характеризующийся первым введением символики и точной формулировкой правил алгебраических операций» [39, стр. 479].

Диофант дал особые названия и ввел сокращенные обозначения для неизвестной и ее степеней (квадрат, куб, биквадрат, квадрато-куб, кубо-куб), а также для обратных степеней. Слагаемые члены он записывал рядом, не обозначая действие сложения особым знаком; для действия вычитания и равенства такой знак вводится. Остальные действия выражены словесно. Сформулированы алгебраические правила: умножение и деление степеней неизвестного, умножение многочлеков, приведение подобных членов и перенос члена из одной части уравнения в другую. В частности, правило умножения отрицательных членов на отрицательные и положительные у Диофанта звучит так: «Вычитаемое число, будучи умножено на вычитаемое, дает прибавляемое; вычитаемое, умноженное на прибавляемое, дает вычитаемое».

Квадратные уравнения Диофант свел к шести каноническим видам; позднее таким же образом уравнения классифицировали и восточные алгебраисты. В этом разделе своего труда он, судя по всему, действовал согласно уже установившейся к его времени традиции, в которой сочетались элементы греческой и древневосточной науки.

Оригинальный вклад Диофанта в арифметику состоит также в решении неопределенных уравнений в рациональных числах [39]. Здесь он явился родоначальником той ветви теории чисел, носящей сейчас название «диофантова анализа», которая получила развитие в XVII в., когда его «Арифметика», изданная математиком Баше де-Мезириаком, привлекла внимание Ферма, а затем Эйлера, Лагранжа и других выдающихся ученых. Следует, однако, отметить, что они поставили вопрос не о рациональном, как у Диофанта, а о целочисленном решении неопределенных уравнений и систем этих уравнений.

Другое сочинение Диофанта, касающееся фигурных чисел, выдержано в пифагорейском стиле.

* *
*

Итак, после открытия иррациональности пифагорейская концепция числа как совокупности единиц привела к признанию принципиального различия между понятиями числа и величины. В результате стремления обойти возникшие при этом теоретические трудности были созданы: общая теория отношений величин (выполнявшая функции теории действительных чисел) в противоположность теории отношений целых чисел (заменявшей теорию дробей) и геометрическая алгебра как аппарат, применимый как к рациональным, так и иррациональным величинам.

Однако при всей строгости этих теорий применение их в практической математике оказалось затруднительным. В эллинистический период, когда решение прикладных вопросов стало насущной необходимостью, указанная особенность превратилась в недостаток, сковывающий дальнейшее развитие науки, что повлекло за собой отступления от классических геометрических теорий и развитие новых направлений в математике. Важное место заняли в это время численные методы, корни которых следует искать в математике древнего Востока.

Новые теории, нашедшие применение в практике, были не столь строго обоснованы, как теории классиков. Устранить же этот недостаток, исходя из прежней концепции числа и величины, было невозможно.

Возникшие теоретические затруднения были бы немедленно преодолены, если бы математики сразу сделали следующий шаг в развитии понятия числа, включив в это понятие не только рациональные, но и иррациональные числа, и введя, таким образом, понятие действительного числа. Однако этот естественный с нашей точки зрения переход от одного понятия к другому, более широкому, явился одной из наиболее трудных задач, которые знала история математики; решение ее растянулось на века и завершилось лишь в XIX в. созданием теории действительных чисел.

Каждый этап этого процесса отражал уровень математического мышления эпохи. Поэтому изучение развития понятия числа представляет важную историко-научную проблему. При ее исследовании долгое время оставался в тени средневековый период математики стран Востока. Сейчас благодаря многочисленным новым данным этот пробел постепенно заполняется.

В следующих главах мы рассмотрим развитие в странах ислама некоторых разделов учения о числе и покажем, как на основе, заложенной в позднеэллинистический период, происходила арифметизация греческой теории иррациональных величин.

Глава II. МАТЕМАТИКА НА БЛИЖНЕМ И СРЕДНЕМ ВОСТОКЕ В СРЕДНИЕ ВЕКА

§ 1. Вводные замечания

В VII в. в политической жизни стран Ближнего и Среднего Востока произошли важные изменения, связанные с завоевательными походами арабов и завершившиеся созданием нового государства — арабского халифата. Ослабление экономики и военной мощи Византийской империи и сасанидского Ирана в результате резкого обострения социально-экономических противоречий и затяжных войн, которые они вели между собой, позволило арабам в необычайно короткий срок покорить громадные территории, подчиненные раньше этим государствам. Менее чем через сто лет после начала походов халифат включал в себя, помимо Аравийского полуострова, государство Сасанидов, азиатские провинции Византии, Египет, Северную Африку, государства Средней Азии, часть Индии, а в Европе — Пиренейский полуостров.

Области, ставшие частями единого государства, были далеко не однородны как по этническому составу населения и уровню социального и культурного развития, так и по характеру традиций духовной жизни. С одной стороны, в халифат вошли районы эллинистической культуры, а с другой — восточные государства, где господствовали древние культурные традиции, уходившие своими корнями, вероятно, в древневавилонскую цивилизацию.

Греческое наследие в наиболее чистом виде сохранилось в Египте, Сирии, областях Малой Азии. Большой славой в первые века нашей эры пользовались естественно-научные школы Александрии и Эдессы, где были собраны огромные библиотеки и работали крупные ученые. После того как в IV в. в Византии начались гонения на «языческую» философию и науку, александрийская школа подверглась разгрому, а вслед за этим, когда в 431 г. христианство несторианского толка было объявлено еретическим учением, закрылась как очаг несторианства и школа в Эдессе. Многие ученые-несториане переселились на восток — в Иран и Среднюю Азию. В городе Нисибине ими была создана академия, в которой продолжалось изучение наук, в том числе естественных. Так же возникла и другая крупная научная школа, организованная по образцу александрийской, — в Гундешапуре, куда переехали ученые Афинской академии, закрытой в 529 г. [28, 29, 114].

Расцвету этих и других центров науки в Иране в период, предшествующий его завоеванию арабами, способствовал общий подъем экономики и культуры в государстве Сасанидов, вступившего на путь феодального развития.

Большой интерес у представителей научных школ вызывали медицина, астрономия, математика, география. Много внимания уделялось их популяризации. Были сделаны многочисленные переводы греческих сочинений на сирийский и персидский языки [28, 29, 114; 246, стр. 338—349; 730, стр. 47—72; 757, 1008].

Что касается традиций древней восточной культуры в Иране и Средней Азии, то к моменту арабского завоевания они насчитывали сотни лет.

Роль Средней Азии в истории цивилизации долгое время недооценивалась, но сейчас на основании сохранившихся письменных источников и данных археологии установлено, что среднеазиатские государства Согд, Хорезм, Маргиана, Парфия, Бактрия с древнейших времен являлись мощным очагом культуры на Востоке. Эти государства обладали развитой экономикой, основу которой составляло сельское хозяйство; здесь, как и в других странах Востока, «климатические условия и своеобразие почвы... сделали систему искусственных орошений при помощи каналов и ирригационных сооружений основой восточного земледелия» [224, стр 305]. Археологи обнаружили остатки грандиозных ирригационных систем на территории древних государств Хорезма [118, 321—323], Согда [115, 320], Ферганы [206] и др.

Высокого уровня в Средней Азии достигли горный и железообрабатывающий промыслы — добыча меди, золота, разработка месторождений ртути и ляпис-лазури [155]. Среднеазиатские государства поддерживали тесные торговые связи между собой, а также с Китаем, Индией, государствами Ближнего Востока, Кавказа, Восточной Европы, чему способствовало их выгодное положение на торговых путях [26, 29, 135, 158, 159, 266, 361]. Города Средней Азии — Самарканд, Ургенч, Мерв, Бухара, Пянджикент и другие — были крупными центрами развития ремесел: ткачества, керамического производства, ювелирного дела и т. д. Высокоразвитая экономика определила культурный уровень народов Средней Азии, их замечательные достижения в архитектуре и строительстве [73, 249—251, 322, 323, 362], живописи и скульптуре [158, 360, 362, 389].

Существование письменности на согдийском [304, 333] и хорезмийском [334] языках также говорит о высокой культуре этих народов. К сожалению, не сохранилось письменных документов о состоянии науки в Средней Азии в период до VIII в. Все они погибли при завоевании территории Средней Азии арабами, насаждавшими новую религию — ислам, как надежное оружие своей политической власти [132, 191, 309, 569]. Вместе с культурными ценностями, связанными со старыми религиями (зороастризм, буддизм, манихейство, христианство несторианского толка, различные языческие культы), уничтожались и памятники науки. Об этом писал великий хорезмиец Бируни, вспоминая о правлении арабского наместника в Средней Азии Кутейбы ибн Муслима: «И уничтожил Кутейба людей, которые хорошо знали хорезмийскую письменность, ведали их преданиями и обучали (наукам), существовавшим у хорезмийцев, и подверг их всяким терзаниям» [60, стр. 18]. Там же Бируни свидетельствовал, что Кутейба «погубил хорезмийских писцов, убил священнослужителей и сжег их книги и свитки»; после этого «хорезмийцы остались неграмотными и полагались в том, что им нужно, на память» [60, стр. 63].

По культурному развитию завоеватели стояли значительно ниже покоренных народов и при решении многих, возникших в новых условиях, общественных проблем вынуждены были обращаться к их опыту [24, 25, 28, 301, 323]. Так, была использована государственная машина Ирана и Византии, из римского права заимствованы правила дележа добычи и т. д. [25].

Возникновение централизованного государства в рамках халифата, объединение ранее разрозненных областей в единую хозяйственную систему на новой феодальной основе и вызванный этим быстрый рост экономики создали благоприятные условия для развития культуры и науки народов Ближнего и Среднего Востока. Объединенные политически и экономически, связанные одной религией (исламом) и одним государственным (арабским) языком, эти народы получили возможность непосредственного общения между собой и более свободного обмена духовными ценностями.

В результате этого необычайно ярко расцвела новая, имеющая свои специфические черты, культура, которую часто условно называют «арабской» или «мусульманской», хотя оба термина по существу неверны. Этому сложному историческому явлению посвящены многочисленные исследования [24, 30, 403, 405, 613, 676, 701, 742]. Указанный период называют еще «мусульманским ренессансом» [30, 194, 701], однако и этот термин далеко не точен, так как вызывает аналогию с ренессансом в Европе, наступившим после упадка в то время как на Востоке расцвету не предшествовал упадок [682].

Для осуществления государственных, торговых и военных планов требовалось развитие научных исследований, которые давали бы практические результаты.

За короткий промежуток времени возникло большое число научных центров, пользовавшихся покровительством правителей халифата, а после его гибели — правителей вновь образовавшихся феодальных государств. Повсеместно в городах Ближнего и Среднего Востока строились обсерватории; при дворцах, мечетях и медресе возникали библиотеки.

При дворах служили врачи, философы, астрологи, призванные предсказывать повелителю будущее, историки, которые должны были увековечить его славу. Однако, несмотря на преимущественно придворный характер науки, большинство ученых умели сохранить свою творческую независимость и заниматься чисто научными исследованиями. Об этом красноречиво говорят биографии Ибн Сины, ал-Бируни, Омара Хайяма. Им, как и многим другим ученым того времени, пришлось зависеть от произвола правителей и пережить много невзгод и лишений; в их сочинениях мы встречаем жалобы на «суровости судьбы», которые «препятствуют... отдаться совершенствованию и углублению своей науки» [339, стр. 16].

Первым крупным научным центром халифата стал основанный в 762 г. Багдад, где при калифе ал-Ма'муне (813—833 гг.) возникла знаменитая академия, так называемый «Дом мудрости». В Багдад из всех областей халифата были собраны выдающиеся ученые, многие из которых являлись уроженцами Средней Азии и Ирана [476, 757, 853]. Кроме Багдада, в разные периоды средневековой восточной истории пользовались славой важных центров интеллектуальной жизни города Дамаск, Рей, Бухара, Хорезм, Газна, Самарканд, Исфахан, Марага. С их названиями связаны имена замечательных деятелей науки, оставивших важный след в истории культуры человечества.

§ 2. Точные науки в странах Ближнего и Среднего Востока

История изучения вопроса* и источники

В настоящее время литература, посвященная математике и астрономии на Ближнем и Среднем Востоке в период средневековья, чрезвычайно обширна, хотя исследования в этом направлении развернулись сравнительно недавно. Еще в начале XIX в. сведения, которыми располагали историки науки, были предельно скудны и обрывочны, в результате чего сложился объективно неверный взгляд на роль ученых стран ислама в развитии точных наук: зачастую ее сводили только к сохранению и передаче в Европу достижений древнегреческой и индийской математики. Успехи арабистики в XIX в. вызвали постановку вопроса об изучении восточных рукописей астрономического и математического содержания [554].

Уже первые исследования, проведенные М. Кассири (M. Kassiri), Ж. Седийо (J. Sedillot, 1777—1832 гг.), Л.-А. Седийо (L.-Am. Sedillot, 1808—1875 гг.), а затем Ф. Розеном (F. Rosen, 1805—1837 гг.), дали замечательные результаты, усилившие интерес к истории точных наук на Востоке. Ее изучению посвятили свои труды многие ориенталисты-математики: Ф. Вёпке (F. Woepcke, 1826—1864 гг.), Г. Зутер (H. Suter, 1848—1922 гг.), М. Штейншнейдер (M. Steinschneider, 1816—1907 гг.), Э. Видеман (E. Wiedemann, 1852—1928 гг.), Ю. Рушка (J. Ruska, 1867—1949 гг.), К. Наллино (C. Nallino, 1872—1938 гг.), Г. Вилейтнер (H. Wieleitner, 1874—1931 гг.), К. Шой (C. Schoy, 1877—1925 гг.) и др.

Особенно широко работа в этом направлении развернулась за последние три десятилетия; большое участие в ней приняли советские ученые.

Среди недавних исследований по различным проблемам истории восточной математики и астрономии следует, в первую очередь, назвать работы П. Люкея, А. П. Юшкевича, Б. А. Розенфельда, Э. Кеннеди, Т. Н. Кары-Ниязова, Г Д. Мамедбейли и многие другие, сведения о которых будут приведены ниже.

Основными источниками изучения математики и астрономии Средневекового Востока служат находящиеся в хранилищах различных городов мира арабские и персидские руко-

---

* Более подробно см. [230].

писи, небольшая часть которых сейчас опубликована, а также латинские средневековые переводы и обработки трудов арабских авторов. В числе важных источников нужно упомянуть ряд арабских энциклопедий и сочинений биобиблиографического характера. К наиболее ранним из них относится энциклопедия «Ключи науки» (Мафāтӣх̣ ал-'улӯм), автором которой является ученый X в. Абу Абд-Аллах Мухаммад ибн Ахмад ибн Юсуф ал-Хорезми [853]; арабский текст ее, изданный в 1895 г. в Лондоне, дал материал для нескольких исследований по истории математики, физики и астрономии [794, 938, 942, 944, 955, 959, 968, 986]. Многократно использовались: «Указатель наук» (Китāб фихрист ал'улӯм), который составил Абу-л-Фарадж Мухаммад ибн Исхак (X в.), известный под именем Ибн Аби Якуб ан-Надим [546, 843]; «История мудрецов» (тā'рӣх ал-х̣укамā) Ибн ал-Кифти (1172—1227 гг.), содержащая биографии ученых и библиографические сведения о них [684]; энциклопедия автора XIV в. Мухаммада ибн Ибрагима ал-Ансари (ал-Афкани) [853, 950] «Правильное руководство для того, кто стремится к блестящей цели» (иршāд ал-к̣āс̣ид илā аснā ал-мак̣āсид»), изданная в Калькутте в 1839 г. [574]; библиографический словарь Хаджи Халифа, изданный в 1835—1858 гг. вместе с латинским переводом [545].

На основании этих и других источников была написана чрезвычайно важная работа Г. Зутера «Математики и астрономы арабов и их труды» [853, 856], содержащая биографические и библиографические данные о 528 математиках 750—1600 гг. Большой интерес представляют фундаментальный труд К. Брокельмана «История арабской литературы» [450], где сообщаются полные сведения о всех известных ученых и их трудах, а также о местонахождении рукописей, и «Введение в историю науки» Дж. Сартона [774].

В последние годы появились переводы восточных сочинений, позволившие сделать чрезвычайно важные выводы о математике рассматриваемого периода. Однако, несмотря на достигнутые успехи, остаются не разрешенными многие вопросы. Ответить на них удастся по мере изучения средневековых рукописей арабского Востока по математике и астрономии.

О характере математических наук

Особое значение в государствах халифов придавалось астрономии — науке, удовлетворявшей насущным потребностям морской и сухопутной торговли, орошаемого земледелия и т. д., а также составлявшей основу популярной тогда астрологии. В странах Ближнего и Среднего Востока астрономия, родившаяся в Древнем Вавилоне, имела многовековые традиции [726]. О состоянии этой науки в Иране и Средней Азии в доисламский период сведений сохранилось очень мало, но имеются все основания предполагать высокий уровень астрономических познаний народов этих стран. Об этом говорят данные археологии, например, обнаруженные недавно в Хорезме развалины здания, служившего обсерваторией, и обломки астрономических инструментов из керамики [97], а также согдийские и хорезмийские календари [60, 323, 333] и т. д.

Уже при Омейядах (660—750 гг.) в Дамаске была построена обсерватория, но особенно широко астрономические наблюдения развернулись после сооружения в 829 г. в Багдаде большой обсерватории. Помимо наблюдений и составления таблиц, багдадские астрономы занимались конструированием инструментов и достигли в этом значительного мастерства; усовершенствованные приборы вскоре позволили создать таблицы более точные, чем греческие [576, стр. 239; 781, 796, 803, 804, 939, 959, 964, 974, 989, 992, 995, 996, 1001].

При халифе ал-Ма'муне (813—833 гг.), когда астрономия багдадской школы достигла расцвета, впервые после Эратосфена виднейшие ученые того времени на равнине Синджар произвели измерение длины градуса земного меридиана [426, 476, 784].

Большое внимание в этот период уделялось также математической географии [193, 196, 596, 709, 715, 789], физике [663, 948, 962, 963, 965, 980, 1009], геодезии [411, 957], механике [472, 940, 942, 944, 952, 971, 977, 981, 1010], конструированию различных инструментов [699]. Эти науки, как и астрономия, базировались на математике, особенно вычислительной, что определяло основное направление математических исследований. Математику стран ислама определяют как «прежде всего вычислительную математику, совокупность расчетных алгоритмов для решения арифметических, алгебраических, геометрических задач, вначале более простых, затем значительно усложняющихся и стимулирующих теоретическую обработку и создание новых математических понятий; вначале — алгоритмов разрозненных, затем объединяемых в научные дисциплины» [383, стр. 352].

Как и астрономия, средневековая математика стран Ближнего и Среднего Востока базировалась на достижениях более раннего периода. Вопрос о ее корнях широко обсуждался в литературе [558, 560, 562, 757, 847, 1008]. Можно считать установленным, что развитие математических наук определялось, с одной стороны, традициями восточной математики (арифметико-алгебраическое направление), а с другой — чертами, унаследованными от греческой науки с ее строго логическими теориями, и интересом к отвлеченным проблемам [276, 375, 383, 384, 621, 622, 625, 726 и др.].

О математике Ближнего и Среднего Востока в период, предшествующий арабскому завоеванию, судят по косвенным данным, в частности, по материалам анализа ранних арабских математических сочинений. Так, еще в прошлом веке Г Ганкель, отмечая, что великий хорезмиец Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми (IX в.) при создании своей знаменитой «Алгебры», несомненно, следовал более ранней традиции, писал: «Я не вижу никакого другого выхода, кроме того, чтобы предположить такую традицию у тех культурных народов, которые были покорены арабами» [576, стр. 263]. К подобному выводу пришли и другие исследователи (например, А. Сайли [780], изучивший другое раннее алгебраическое сочинение — Ибн Турка ал-Хуттали (IX в.), — чрезвычайно сходное с трактатом ал-Хорезми). Однако, были ли эти традиции непосредственным продолжением вавилонских [558, 726], складывались ли под иным влиянием или носили вполне самобытный характер, сказать сейчас с достоверностью вряд ли возможно.

Мы располагаем более или менее точными свидетельствами воздействия на средневековую науку Среднего и Ближнего Востока высокоразвитой математики Индии и Древней Греции. На достижениях математиков этих стран основывалась математика стран ислама. Требования эпохи, определившие направление научного мышления, обусловили постановку новых вопросов и вызвали к жизни новые математические дисциплины, например, плоскую и сферическую тригонометрию, оформившуюся в самостоятельную науку. Для математики стран Ближнего и Среднего Востока характерно усиленное внимание к арифметике и алгебре, к разработке различных вычислительных приемов, к измерительной геометрии. Продолжая в этом отношении традиции, которые начали складываться еще в греческой науке эллинистического периода, ученые стран ислама достигли замечательных результатов, в большой мере определивших дальнейшее развитие математики.

Однако и в чисто теоретической области вклад их весьма велик, хотя он не всегда заслуживает должной оценки. На этом вопросе мы остановимся в дальнейшем.

В следующих параграфах содержатся краткие сведения о наиболее выдающихся математиках и астрономах этого периода и излагаются некоторые данные об индийском и греческом научном наследии и его влиянии на развитие математики на Ближнем и Среднем Востоке.

§ 3. Математики и астрономы восточного средневековья

1. **Абу Муса Джабир ибн Хайян** (ок. 776 г.) [396, 397, 450, 627, 760, 761, 763, 774, 809, 853] работал в Куфе. Знаменитый алхимик и астроном, известный в средневековой Европе под именем Гебера; написал трактат «О применении астролябии» и комментарии к «Началам» Евклида.

2. **Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми** [98, 174, 197, 263, 276, 302, 323, 330, 332, 349, 350, 376, 384, 411, 434, 440, 442, 450, 461, 469, 493, 500, 514, 556, 558, 560, 562, 563, 576, 579, 623, 625, 627, 630, 634, 535, 683, 694, 703, 709, 710, 715, 726, 727, 745, 749, 756, 758, 771, 774, 780, 810, 853, 871, 1004, 1005] — великий среднеазиатский ученый IX в., родился в Хорезме, значительный период своей жизни провел в Багдаде при дворе ал-Ма'муна. Автор фундаментальных трудов по математике, теоретической и практической астрономии, географии. Его «Книга картины земли» — первое географическое сочинение на арабском языке — оказала сильное влияние на развитие этой науки [193, 197, 710, 715].

Как астроном он принимал участие в измерении длины градуса земного меридиана [411]. Главная его заслуга в истории астрономии заключается в составлении тригонометрических и астрономических таблиц, которые (в переводе на латинский язык) послужили основой средневековых исследований в этой области. Известно также, что он написал сочинение об астролябии.

Наибольшую славу ал-Хорезми приобрел как автор двух математических сочинений: «Книга об индийском счете» и «Краткая книга алгебры и алмукабалы» (см. гл. IV и V).

3. **Хаджджадж ибн Юсуф ибн Матар** (жил между 786 и 833 гг.) [450, 627, 730, 774, 824, 829, 853] работал, очевидно, в Багдаде. Выдающийся переводчик трудов греков и, в частности, Евклида и Птолемея; составил два перевода «Начал».

4. **Абд-ал-Хамид ибн Турк ал-Хуттали** (IX в.) [98, 450, 780, 853] — известный ученый своего времени, автор нескольких сочинений по математике, в том числе алгебраического трактата (см. гл. V).

5. **Аббас ибн Саид ал-Джаухари** (IX в.) [279, 450, 627, 672, 774, 853] — астроном и математик, один из видных представителей багдадской школы. Производил наблюдения в Багдаде и Дамаске. Составил астрономические таблицы, известные под названием «ма'муновых», а также написал «Комментарий к книге Евклида», «Книга предложений, присоединенных к I книге Евклида», «Дополнения к V книге Евклида».

6. **Абу Юсуф Якуб ибн Исхак ибн Саббах ал-Кинди** (умер ок. 873 г.) [433, 450, 627, 753, 961, 966, 967] уроженец Басры, работал в Багдаде. Знаменитый философ и ученый, автор многочисленных сочинений по арифметике, геометрии, астрономии, музыке, оптике и т. д.; комментировал Евклида.

7. **Бану Муса** — сыновья Мусы ибн Шакира: Мухаммад (умер в 872 г.), Хасан и Ахмад [60, 119, 384, 411, 450, 486, 584, 603, 670, 730, 774, 825, 853, 857] — выдающиеся багдадские ученые, занимавшиеся математикой, астрономией, теорией музыки и механикой. Имеются сведения, что они собирали рукописи сочинений греческих авторов и построили обсерваторию, в которой проводили наблюдения в 850—870 гг. Ал-Бируни [60, стр. 166] отмечает преимущество их астрономических таблиц перед другими, так как «они не жалели усилий для достижения истины и стояли в свою эпоху одиноко по мастерству и остроте наблюдений». Сохранился трактат «Книга трех братьев по геометрии» в латинском переводе и в арабских рукописях; известен ряд других сочинений, пользовавшихся большой популярностью; одно из них вошло в число так называемых «средних» книг.

8. **Абу-л-Аббас Ахмад ибн Мухаммад ибн Катир ал-Фаргани** (IX в.) [98, 169, 174, 384, 449, 450, 547, 703, 774, 853, 987, 988] — уроженец Ферганы, современник ал-Хорезми, прославился прежде всего сочинениями по астрономии, из которых известны: энциклопедический труд «Начала астрономии», пользовавшийся впоследствии большой популярностью в Европе, комментарий к «Альмагесту» Птолемея, трактаты об астрономических инструментах и о конструировании солнечных часов. Ему принадлежит также географический трактат «О семи климатах».

9. **Ахмад ибн Абд-Аллах ал-Марвази** известен под именем Хабаш ал-Хасиб (умер ок. 864—867 гг.) [60, 169, 174, 222, 276, 384, 514, 576, 652, 778, 788, 853, 884]; уроженец Мерва, член багдадской научной школы. Занимался преимущественно астрономией (период его активной деятельности в этой области охватывал 825—835 гг.). Ему принадлежат три астрономические таблицы, из которых одна являлась обработкой

индийских таблиц, называемых в арабской литературе «синдхинд», а две другие составлены по данным его собственных наблюдений. Ввел в тригонометрию понятия тангенса и котангенса и составил таблицы этих функций, очевидно, самые ранние в истории науки. Ал-Марвази — автор работ об астролябии, о конструкции солнечных часов и др.

Его сын — Абу Джафар ибн Хабаш — был также известным астрономом и создателем астрономических инструментов.

10. **Абу Абд-Аллах Мухаммад ибн Иса ал-Махани** (умер ок. 874—884 гг.) [276, 339, 340, 384, 450, 627, 671, 774, 853] уроженец персидского города Махана, работал в Багдаде. Один из крупнейших математиков и астрономов IX в., оказавший большое влияние на развитие науки. Отличался искусством в проведении астрономических наблюдений и славился как знаток арифметики и геометрии. Написал трактат «Об отношении» (см. гл. VII), комментарий к X книге «Начал» Евклида (см. гл. VI), комментарий к «Сферикам» Менелая и др. Омар Хайям отмечает его ученость и превосходство в «искусстве алгебры и алмукабалы» и указывает на сделанную им попытку решения кубического уравнения.

11. **Сабит ибн Корра ал-Харрани ас-Саби** (умер ок. 830—901 гг.) [9, 90, 276, 283, 284, 292, 293, 297, 298, 383—385, 396, 397, 421, 436, 450, 453, 466, 624, 627, 675, 729, 730, 774, 777, 790, 793, 795, 798, 853, 876, 877, 895, 971, 983, 990, 991, 1012] уроженец Харрана в Месопотамии, работал в Багдаде. Ученик Бану Муса (по словам Ал-Бируни [60, стр. 67], он был их «творением»), знаменитый физик, математик, астроном, автор многочисленных работ (ок. 100 названий), в том числе и по математике. Среди них — исправленный перевод «Начал» Евклида (см. п. 13), комментарии к введению и к 14, 15 книгам этого сочинения, попытки доказательства V постулата, трактат о составных отношениях, перевод «Арифметики» Никомаха, трактат «О дружественных числах» (см. гл. III), «Об измерении параболоида», перевод трактата Архимеда «О делении круга на 7 равных частей» и т. д.

12. **Куста ибн Лукка ал-Баалбаки** (умер ок. 912 г.) [384, 450, 627, 730, 853, 867, 868] уроженец Гелиополиса (Баалбека) в Сирии, работал в Багдаде. Философ, математик, астроном, врач, знаток греческой науки. Собирал, переводил на арабский язык и комментировал труды античных писателей. Ему принадлежит, в частности, перевод 14-й и 15-й книг «Начал» и трактат «О трудных местах книги Евклида», переводы сочинений Гипсикла, Автолика, «Механики» Герона и др.

13. **Абу Якуб Исхак ибн Хунайн ан-Насрани** (умер в 910—911 гг.) [450, 627, 774, 853] — математик, физик, врач, работал в Багдаде. Славился как переводчик с греческого и сирийского языков. Автор известного перевода «Начал» Евклида, исправленного затем Сабитом ибн Коррой.

14. **Абу-л-Аббас ал-Фадл ибн Хатим ан-Найризи** (умер ок. 922/923 гг.) [384, 428, 492, 494, 627, 693, 774, 786, 849, 853, 856, 864] — видный математик и астроном, автор астрономических таблиц, составленных «по методу синдхинд», трактатов «О направлении киблы», «Об атмосферных явлениях», «Об инструменте, с помощью которого определяются расстояния между предметами», комментариев к трудам Птолемея и к «Началам» Евклида (последний был переведен на латинский язык Герардо Кремонским (1114—1187 гг.)), а также сочинения «О знаменитом постулате Евклида».

15. **Абу Камил Шуджа ибн Аслам ибн Мухаммад ал-Хасиб ал-Мисри** (ок. 850—930 гг.) [276, 383, 384, 450, 578, 631, 632, 679, 765, 774, 853, 863, 872, 873, 926] — египетский математик, автор нескольких сочинений, оказавших большое влияние на развитие математики. Из них известны «Книга об алгебре и алмукабале» (см. гл. V), «Книга об измерении», «Книга о редкостях искусства арифметики».

16. **Абу Исхак Ибрахим ибн Синан ибн Сабит ибн Корра** (908—946 гг.) [120, 187, 189, 190, 384, 612, 853, 878] — внук Сабита ибн Корры (см. п. 11), известный математик. Автор большого числа сочинений, в том числе «Книги о построении трех конических сечений», «Об измерении параболы» и др.

17. **Абу Усман Саид ибн Якуб ад-Димишки** (1-я четверть X в.) [450, 618, 627, 774, 824, 829, 843, 853, 878, 882, 939] — известный физик, математик и врач, работал в Багдаде. Занимался переводами и комментированием трудов греческих авторов по философии, медицине и математике. Перевел несколько книг «Начал» Евклида и комментарий Паппа к X книге этого сочинения.

18. **Абу Джафар Ахмад ибн Юсуф ал-Мисри** (ок. 912 г.) [431, 436, 450, 461, 774, 821] работал в Египте. Выдающийся математик, автор нескольких сочинений, в том числе «Об отношении и пропорциональности» (см. гл. VII), оказавших сильное влияние на развитие математики в Европе.

19. **Назиф ибн Юмн ал-Мутатаббиб,** т. е. занимающийся медициной (умер ок. 990 г.) [450, 627, 774, 853], — известный ученый греческого происхождения, автор ряда переводов классических сочинений, в том числе «Начал» Евклида (см. гл. VI).

20. **Мухаммад ибн Абд-ал-Азиз ал-Хашими** — ученый X в. [60, 450, 853], известный в литературе как автор астрономических таблиц, названных «совершенными» [60, стр. 344], и трактата «О вычислении иррациональных корней» (см. гл. V).

21. **Абу-л-Хасан Али ибн Аби Саид Абд-ар-Рахман ибн Юнис** (950—1009 гг.) [450, 461, 774, 853] работал в Каире. Знаменитый астроном-наблюдатель, автор астрономических таблиц «Зидж ал-Хакими». Его труды оказали большое влияние на развитие тригонометрии.

22. **Абу Абд-Аллах Хасан ибн Мухаммад ибн Хамла**, его называли также Ибн-ал-Багдади (X—XI вв.) [289, 672, 738] — малоизвестный до последнего времени, но, очевидно, плодотворно работавший математик и астроном (см. гл. VI). Автор комментария к X книге «Начал»: «О соизмеримых и несоизмеримых величинах», изданного в 1948 г. а также, судя по упоминаниям других арабских авторов, трактатов о составных отношениях и о «началах» астрономии.

23. **Абу Наср Мухаммад ибн Мухаммад ал-Фараби** (ок. 880—950 гг.) [98, 113, 114, 157, 169, 174, 331, 335-337, 384, 450, 474, 543, 703, 774, 823, 949] уроженец среднеазиатского города Фараба, работал в Багдаде, Алеппо, Дамаске. Крупнейший философ и ученый-энциклопедист восточного средневековья. Занимался философскими вопросами математики. Написал комментарии к «Началам» Евклида и «Альмагесту» Птолемея, а также сочинение по теории музыки.

24. **Ахмад ибн ал-Хусайн ал-Ахвази ал-Катиб** (жил ок. 940 г.) [450, 627, 774, 853, 880, 1017] уроженец персидского города Ахваза; согласно отзывам средневековых историков (например, Ибн ал-Кифти) — один из выдающихся ученых Багдада. Принадлежал к школе натурфилософов и отличался глубокими познаниями в естественных науках древних. Занимался астрономией и написал комментарий к X книге «Начал» Евклида. Выступил с критикой тригонометрических таблиц ал-Хорезми; ал-Бируни посвятил большой труд примирению точек зрения ал-Хорезми и ал-Ахвази.

25. **Абу Джафар ал-Хазин**, т. е. библиотекарь (умер между 961 и 971 гг.) [60, 327, 339, 450, 627, 774, 829, 853, 880], уроженец Хорасана, один из видных математиков и астрономов X в. Славился образованностью в области арифметики и геометрии, был известен также как автор ряда астрономических сочинений, о двух из которых упоминает ал-Бируни [60, стр. 369; 880, стр. 79], а о третьем — ат-Туси [327, стр. 157].

Из его математических трудов до нас дошел лишь комментарий к X книге «Начал» Евклида, сохранившийся в нескольких рукописях (см. гл. VI). Омар Хайям сообщает, что ал-Хазин занимался решением кубического уравнения, которое до него рассматривал ал-Махани: .Считалось, — пишет Хайям, — что это решение невозможно, пока не явился Абу Джафар ал-Хазин, решивший это уравнение при помощи конических сечений» [339, стр. 69]. Ибн ал-Кифти приписывает ему также «Книгу о числовых проблемах» [627].

26. **Юханна ибн Юсуф ибн Харис ибн ал-Батрик ал-Касс,** т. е. «священник» (умер ок. 980—981 гг.) [450, 627, 853, 1017], — известный ученый, чрезвычайно образованный геометр. Переводил на арабский язык труды греческих философов и математиков. Автор сочинений «О рациональных и иррациональных величинах» (см. гл. VI), «О доказательстве того, что если прямая линия пересекает две другие прямые, лежащие в одной плоскости, то два внутренних односторонних угла меньше, чем две прямые» и др.

27. **Абу-л-Вафа Мухаммад ибн Мухаммад ибн Яхья ибн Исмаил ибн Аббас ал-Бузджани** (940—998 гг.) [73, 98, 232-235, 276, 375, 383, 384, 441, 449, 450, 461, 467, 514, 576, 621, 625, 627, 690, 692, 703, 797, 844, 853, 885, 935, 1016, 1019] — один из величайших математиков средневекового Востока, был родом из Бузгана (Хорасан), работал в Багдаде. Его многочисленные труды по арифметике, геометрии, алгебре, тригонометрии и астрономии сыграли огромную роль в истории науки. Помимо комментариев к сочинениям Евклида, Диофанта, Птолемея и к алгебраическому трактату ал-Хорезми, ему принадлежат: «Книга о том, что нужно знать писцам, дельцам и другим в науке арифметики» (см. гл. IV), сочинение по практической геометрии «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений», «Введение в арифметику» (см. гл. III), «О том, чему следует научиться до изучения арифметики», «Книга доказательств предложений, которые установил Диофант в своем сочинении», «О применении шестидесятиричных таблиц», «Книга об определении ребра куба, квадрато-квадрата и того, что состоит из них обоих» и др. Многие сочинения Абу-л-Вафы утеряны.

28. **Абу Махмуд Хамид ибн Хазар ал-Ходжанди** (умер ок. 1000 г.) [83, 174, 276, 328, 384, 450, 479, 547, 621, 625, 774, 781, 793, 853, 964, 1000] уроженец Ходжента (теперь Ленинабад), работал в Рее. Ему принадлежит ряд работ по астрономии: «Об определении наклона эклиптики», «О конструкции и применении астролябии» и др. Наиболее важные результаты он

получил в сферической тригонометрии (оригинальное доказательство «теоремы синусов» для сферического треугольника) и в неопределенном анализе (попытка доказать утверждение, что сумма двух кубов не может быть кубом, т. е. частный случай великой теоремы Ферма)

29. **Кушьяр ибн Лаббан ал-Джили** (ок. 970—1029 гг.) [240, 276, 375, 383, 384, 450, 621, 625, 650, 672, 674а, 680, 690-692, 853, 988] уроженец Гиляна, автор сочинений по географии, астрономии и математике, в частности, трактата «О началах исчисления индийцев» (см. гл. IV), астрономических таблиц, трактата об астролябии и др.

30. **Абу Бакр Мухаммад ибн ал-Хусайн ал-Караджи,** или ал-Кархи (X—XI вв.) [234, 240, 276, 350, 383, 384, 397а, 450, 461, 576, 599, 621, 625, 681, 690, 692, 774, 853, 934, 1013], — выдающийся математик, автор трактата «Достаточное введение в арифметику» (см. гл. IV) и двух алгебраических сочинений (см. гл. V). Его труды сыграли важную роль в истории восточной математики и оказали непосредственное влияние на европейских ученых.

31. **Абу Наср Мансур ибн Ирак** (умер ок. 1035 г.) [328, 338, 384, 449, 450, 463, 576, 621, 625, 671, 774, 853, 871, 938] уроженец Хорезма, по словам Омара Хайяма, — «величайший из ученых, занимающихся математикой» [338]; учитель ал-Бируни. Автор ряда сочинений по астрологии и сферической тригонометрии; занимался также решением кубического уравнения. Написал известные комментарии к «Сферикам» Менелая, сочинение о вписанном в круг правильном семиугольнике и трактат «О разъяснении одного неясного места в 13 книге «Начал» Евклида».

32. **Абу Райхан Мухаммад ибн Ахмад ал-Бируни** (973—1048 гг.) [24, 44—50, 57—61, 74—76, 94, 98, 113, 114, 117, 125, 126, 139—144, 161, 167, 169, 174, 183, 192—197, 208, 229, 230, 263—265, 276, 278, 285—289, 300, 303, 305, 323—325, 341—344, 367, 383, 384, 403, 405, 411—413, 425, 427, 437, 438, 449, 450, 499, 514, 544, 547, 577, 596, 613, 621, 625, 646, 653, 654, 656, 662, 673, 674, 676, 678, 699, 709, 717, 733, 734, 738, 759, 766—768, 774, 781, 784, 785, 787—792, 795, 843, 858, 874, 880, 883, 956, 959, 969, 973, 974, 977, 982, 988, 995, 1027, 1037, 1038] — великий среднеазиатский ученый, смелый мыслитель, далеко опередивший свое время; автор многочисленных капитальных трудов по истории, географии, филологии и различным отраслям естественных наук (астрономии, математике, геодезии, минералогии, фармакологии, геофизике, геологии, гидрографии и т. д.). Астрономические проблемы он рассматривал

в своей знаменитой «Истории Индии», в «Памятниках минувших поколений», «Определении границ местностей для проверки расстояний между поселениями», «Книге вразумления в начатках искусства звездочетства» и т. д.; астрономии ал-Бируни посвятил свыше 45 сочинений, главное из которых «Канон Мас'уда». В нескольких трактатах излагаются методы конструирования астрономических инструментов.

Большое внимание ал-Бируни уделял математике: помимо значительной части «Канона Мас'уда», он посвятил ей сочинения: «Об определении хорд в круге при помощи свойств ломаной линии, вписанной в него», «Об индийских рашиках», первый раздел «Книги вразумления» и др. Особенно важен вклад ал-Бируни в развитие тригонометрии, но он касается также вопросов теории чисел (см. гл. III), алгебры (см. гл. IV) и геометрии.

33. **Абу-л-Джуд Мухаммад ибн Лайс** (X—XI вв.) [276, 288, 340, 384, 450, 774, 783, 853] современник Бируни. Занимался исследованием кубических уравнений, автор трактата «О вписывании семиугольника в круг».

34. **Абу Саид ибн Мухаммад ибн Абд-ал-Джалил ас-Сиджизи** (ок. 951—1024 гг.) [288, 450, 456, 618, 774, 790, 1011, 1026] уроженец Сиджистана, современник ал-Бируни, неоднократно упоминавшийся последним. Чрезвычайно плодотворно работавший ученый, автор ряда математических трактатов: «О построении вписанного семиугольника», «О трисекции угла», «О некоторых предложениях из «Книги лемм» Архимеда», «Об отношении гиперболы к ее асимптотам», «О конических сечениях» и др., а также нескольких сочинений по астрономии, в том числе об астрономических инструментах.

35. **Абу-л-Хасан Али ибн Ахмед ан-Насави** (умер ок. 1030 г.) [90, 240, 276, 350, 384, 450, 621, 625, 774, 781, 853, 865, 1021] — один из крупнейших математиков XI в. Родился в городе Наса (ныне Ашхабад), работал при дворах буидских султанов, а затем Махмуда Газневи; ученик Кушьяра ибн Лаббана ал-Джили. Ан-Насави принадлежит сочинение «Достаточное об индийской арифметике» (см. гл. IV), а также комментарии к сочинениям Менелая и Архимеда.

36. **Абу Али Хасан ибн ал-Хайсам ал-Басри** (965—1039 гг.) [154, 202, 203, 275, 276, 410, 450, 593, 594, 627, 667—669, 735, 774, 795, 843, 853, 856, 875, 936, 945—948, 951, 960, 968, 970, 979, 980, 993, 1009] — великий физик и математик средневековья, уроженец Басри, работал в Каире. Написал знаменитую «Книгу оптики», трактаты «О параболическом вогнутом

зеркале», «О сферическом вогнутом зеркале», «О вычислении параболоида», «Квадратура круга», ряд сочинений по астрономии и физике, а также комментарии к «Началам» Евклида (см. гл. VI).

37. **Абу Сахл Вайджан ибн Рустам ал-Кухи** (X—XI вв.) [187—190, 276, 383, 384, 450, 627, 770, 877, 1026] уроженец г. Куха в Табаристане, работал в Багдаде. Выдающийся математик, переводчик Евклида и Архимеда и автор ряда оригинальных сочинений, в том числе «О совершенном циркуле», «О нахождении стороны семиугольника в круге», «О конструировании астролябии», «Об измерении параболоида» и т. д. Занимался решением кубических уравнений.

38. **Абу Али Ибн Сина** (980—1037 гг.) [10—12, 56, 64, 68. 113, 114, 137,—141, 149—153, 157, 165, 166, 171, 174, 194, 229, 239, 263, 276, 316, 347, 388, 390, 391, 395, 400, 403—409, 412, 450, 473, 474, 621, 625, 627, 682, 685, 703, 762, 774, 843, 976, 992, 995, 996, 998, 1021]—великий среднеазиатский ученый-энциклопедист, один из наиболее выдающихся мыслителей средневековья. Его сочинения оставили неизгладимый след в истории философии, медицины, химии и других наук. «Канон врачебной науки» Ибн Сины приобрел всемирную славу и долгое время служил основным руководством по медицине на Востоке и в Европе. Ибн Сина проявлял интерес к физико-математическим наукам и посвятил им большие разделы в своих энциклопедиях «Книга исцеления», «Книга спасения» и «Книга знания». Около двадцати его работ касались вопросов астрономии; он сконструировал оригинальный и отличающийся большой точностью астрономический инструмент. Специальный трактат Ибн Сина посвятил механике.

39. **Гияс ад-Дин Абу-л-Фатх ʻОмар ибн Ибрагим ал-Хайям** (1048—1131 гг.) [98, 174, 184, 229, 238, 269—271, 274, 276, 277, 290, 307, 338—340, 345—348, 374, 383, 384, 398, 399, 507, 535, 536, 542, 614, 621, 625, 638, 663, 703, 705, 706, 750—752, 764, 802, 816, 835, 853, 943, 1007, 1011]—гениальный среднеазиатский ученый, философ и поэт, автор замечательных сочинений по математике, физике, астрономии, философии и истории. Он проводил астрономические наблюдения, составил «Маликшахские астрономические таблицы» и разработал реформу календаря. В математике Омар Хайям обращал внимание прежде всего на принципиальные вопросы (учение о параллельных линиях, теорию отношений, теорию кубических уравнений), которым посвятил трактаты «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» (см. гл. VII) и «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы» (см. гл V).

Хайям написал также сочинение об арифметике (сейчас утерянное) и трактат «Об искусстве определения количества золота и серебра в состоящем из них теле».

40. **Абу-л-Фатх Абд-ар-Рахман ал-Мансур ал-Хазини** (XII в.) [98, 290, 338, 339, 663, 779, 943, 953, 954, 963, 982] — видный физик и астроном первой половины XII в., уроженец Мерва, ученик Омара Хайяма. Он оставил астрономические таблицы и целый ряд других сочинений, в том числе трактат «Весы мудрости», представляющий собой одно из наиболее значительных сочинений по механике, гидростатике и физике в средние века.

41. **Абу-л-Футух Ахмад ибн Мухаммад ас-Сури** известен под именем ас-Салах (умер после 1145 г.) [450, 672, 827, 853, 867], уроженец Хамадана, работал в Дамаске. Философ, математик, врач. Написал «Об ошибках в таблицах VII и VIII книг Альмагеста», «Сочинение для объяснения ошибки Ибн ал-Хайсама в «Началах» Евклида (см. гл. VI).

42. **Абу Абд-Аллах Мухаммад ибн Юсуф ал-Джайяни** (жил ок. 1080 г.) [384, 450, 625, 627, 735, 774, 846, 853, 856, 1029] — математик, астроном и законовед, работал в Севилье. Автор комментария к V книге «Начал» Евклида, трактатов «О нахождении поверхности шарового сегмента» и «Таблицы лет»; последний был переведен на латинский язык Герардо Кремонским.

43. **Абу Закарийя Мухаммад ибн Абд-Аллах ал-Хассар** (XII в.) [383, 384, 450, 625, 852, 854] — западноарабский математик, автор арифметического трактата (см. гл. IV).

44. **Шараф ад-Дин Музаффар ибн Мухаммад ат-Туси** (ок. 1209) [450, 853, 867] уроженец Туса, автор сочинений «Алгебра и алмукабала», «Книга о познании астролябии», «Об астролябии».

45. **Махмуд ибн Мухаммад ибн Умар ал-Джагмини** (XIII в.) [98, 316, 450, 510, 754, 845, 850, 853] — среднеазиатский астроном и врач; сведений о его биографии почти не сохранилось. Автор чрезвычайно популярного и много раз комментировавшегося сочинения «Краткое изложение астрономии»; в нем впервые подробно рассматривается система координат, основой которой является горизонтальная плоскость наблюдения.

46. **Шамс ад-Дин Мухаммед ибн Ашраф ал-Хусайн ас-Самарканди** (ок. 1276 г.) [276, 283, 384,450, 508, 625, 672, 774, 853] известен как философ, астроном и математик. Написал комментарии к «Началам» Евклида, «Трактат о циркуле для проведения конических сечений» несколько сочинений

по астрономии, в частности, трактат «Построение таблицы звезд», составил звездный календарь.

47 **Абу Джафар Мухаммад ибн Мухаммад Насир ад-Дин ат-Туси** (умер в 1274 г.) [13, 98, 176, 177, 184, 198—201, 218—223, 229, 267, 268, 271, 276, 277, 279, 280, 291, 316, 319, 327—329, 347, 348, 383, 384, 448—450, 468, 500, 506, 537, 620, 621, 625, 751, 752, 774, 781, 827, 842—844, 848, 853, 897, 908, 948, 975, 994, 999, 1003, 1030] уроженец г. Туса в Хорасане, крупнейший математик и астроном XIII в., чрезвычайно разносторонний ученый, автор сочинений по философии, географии, музыке, оптике, медицине, минералогии. Был знатоком греческой науки, комментировал труды Евклида, Архимеда, Птолемея, Аполлония и др. Руководил обсерваторией в Мараге, где возглавил плодотворно работавшую научную школу; здесь были составлены «Ильханские» астрономические таблицы, пользовавшиеся огромной популярностью. Среди математических трудов ат-Туси особенно значительны работы по плоской и сферической тригонометрии и прежде всего «Трактат о полном четырехстороннике». Большой вклад он внес в развитие теории отношений (см. гл. VII) и учение о параллельных. Ему принадлежит также арифметический трактат «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли» и другие сочинения по алгебре, теории чисел и т. д.

48. **Али ибн 'Омар ибн Али Наджм ад-Дин ал-Казвини** (умер в 1277 г.) [223, 231, 450, 853, 939] — сотрудник обсерватории в Мараге, ученик ат-Туси. Философ и астроном, автор ряда сочинений, в том числе трактатов об астролябии, календаре, астрономического каталога, а также комментария к «Альмагесту» Птолемея и энциклопедии «Ключи наук».

49. **Махмуд ибн Мас'уд Кутб ад-Дин аш-Ширази** (1236—1311 гг.) [223, 315, 450, 672, 774, 853, 997] — астроном, математик, философ, врач, сотрудник обсерватории в Мараге, ученик ат-Туси. Жил также в Египте. Написал несколько астрономических и математических трактатов, в том числе: «Граница познания», «Полнейшее представление о науке сфер», энциклопедию «Драгоценности короны», а также комментарий к «Канону» Ибн Сины и комментарий к «Введению в арифметику» Никомаха [315].

50. **Мухи ад-Дин Яхья ибн Мухаммад ал-Магриби** [223, 627, 450, 774, 853] — сотрудник ат-Туси, автор сочинений по астрономии и математике, в том числе комментариев к «Началам» Евклида.

51. **Хасан ибн Мухаммад ибн Хусайн ан-Найсабури** (XIII в.) [223, 231, 316, 450, 774, 853] уроженец Нишапура, астроном и математик. Написал популярное в свое время

сочинение «Солнечный трактат об арифметике», а также комментарии к нескольким сочинениям ат-Туси, в том числе к «Ильханским таблицам».

52. **Абу-л-Аббас Ахмад ибн Мухаммад ал-Азади,** известный как Ибн ал-Банна ал-Гарнати, т. е. сын строителя из Гренады (ок. 1256—1321 гг.) [384, 625, 696, 853], — западноарабский ученый, автор арифметического трактата «Краткое изложение арифметических действий» (см. гл. IV).

53. **Абу Тахир Мухаммад ибн 'Омар Сирадж ад-Дин ас-Сиджаванди** (XII—XIII вв.) [5, 231, 316, 450] — законовед и математик, труды которого о делении наследства, по арифметике и алгебре были чрезвычайно популярны в Средней Азии и многократно комментировались.

54. **Ибн аш-Шатир** (1304—1375/1376 гг.) [450, 657, 744, 774, 853, 1002] — выдающийся астроном XIV в.

55. **Абу-л-Аббас Ахмад ибн Мухаммад Шихаб ад-Дин,** известный под именем Ибн ал-Хаим (ок. 1355—1412 гг.) [13, 231, 450, 471, 853], родился в Каире, работал в Иерусалиме. Автор популярных сочинений по арифметике и делению наследства.

56. **Али ибн Мухаммад ал-Саид аш-Шариф ал-Джурджани** (1339—1413 гг.) [98, 223, 231, 316, 450, 627, 754, 853] работал в Герате, Карамане, Ширазе, посетил Египет и Константинополь, при Тимуре жил в Самарканде. Разносторонний ученый, философ и законовед. Написал комментарии к астрономическому трактату ал-Джагмини, к «Воспоминанию об астрономии» ат-Туси, трактату о делении наследства ас-Сиджаванди и к «Изложению Евклида» ат-Туси.

57. **Мас'уд ибн 'Омар Са'д ад-Дин ат-Тафтазани** (XIV в.) [231, 316, 450] — ученый-энциклопедист, работал при дворе Тимура в Самарканде. Помимо многочисленных сочинений по логике, праву и т. д., написал комментарий к «Солнечному трактату» Ан-Найсабури.

58. **Улугбек** (1394—1449 гг.) [14, 20—25, 29, 98, 105, 106, 124, 127—130, 156, 168—170, 173—175, 178, 209, 210, 226, 242, 243, 249—251, 276, 306; 308, 347, 359, 363, 366, 368, 394, 449—450, 461, 637, 801, 853] — выдающийся среднеазиатский ученый, основатель и глава Самаркандской астрономической и математической школы.

59. **Джамшид ибн Мас'уд ибн Махмуд Гияс ад-Дин ал-Каши** (умер ок. 1430 г.) [98, 124, 127—130, 156, 169, 147, 178, 209, 210, 226, 272, 273, 276, 281, 294, 308, 347, 375, 378, 380—384, 394, 449, 450, 461, 621, 622, 625, 626, 647—651, 658—661, 690—692а, 774, 802, 853, 1015, 1023] — крупнейший математик и астроном XV в., сотрудник Улугбека. Один из руководи-

телей Самаркандской обсерватории, автор многочисленных трудов по астрономии, в том числе «Хаканских астрономических таблиц», «Лестницы небес», сочинений об астрономических инструментах, изобретателем одного из которых был он сам («Прогулка по садам», «Объяснение астрономических инструментов»). Математике ал-Каши посвятил замечательные произведения: «Трактат об окружности», «Ключ арифметики» (см. гл. IV), «О хорде и синусе». Он проявил себя как выдающийся мастер приближенных вычислений; впервые в истории науки изложил и применил теорию десятичных дробей.

60. **Салах ад-Дин Муса ибн Мухаммад ибн Махмуд**, известный под именем Кади-заде ар-Руми (ок. 1360—1437 гг.) [98, 156, 169, 178, 281, 282, 294, 394, 802, 853], уроженец г. Бруссы (Малая Азия) творческий период научной деятельности провел в Самарканде, принимая активное участие в астрономических работах, организованных Улугбеком. Вместе с ал-Каши он руководил постройкой Самаркандской обсерватории и участвовал в составлении «Гурганских астрономических таблиц».

В сочинении «Об определении синуса одного градуса» он изложил интересный метод определения $\sin 1°$, предложенный ал-Каши, и сделал свои замечания. Является также автором сочинения «Трактат об арифметике» и комментариев к астрономическому трактату ал-Джагмини, к геометрическому сочинению ас-Самарканди, к «Ключу наук» ат-Тафтазани.

61. **Ала ад-Дин Али ибн Мухаммад ал-Кушчи** (умер в 1474/1475 г.) [98, 156, 169, 178, 276, 291, 308, 310, 311, 313, 314, 394, 450, 774, 853] — еще один талантливый ученый самаркандской школы; родился в Самарканде. Ученик Улугбека и Кади-заде ар-Руми. После смерти Кади-заде он руководил обсерваторией, участвовал в завершении «Гурганских таблиц». После гибели Улугбека уехал в Персию, а оттуда — в Турцию, где поступил на службу к султану Мухаммаду II и написал ряд работ по астрономии и математике. Автор комментариев к таблицам Улугбека (не дошедших до нашего времени), «Трактата по астрономии», «Трактата Фатхия» и «Трактата Мухаммедия» об арифметике, алгебре и геометрии, и др.

62. **Махмуд ибн Мухаммад Мирам Челеби** (умер в 1524—1525 гг.) [98, 156, 169, 174, 178, 308, 353, 394, 450, 802, 853] — математик и астроном, также принадлежавший к школе Улугбека; внук и ученик Кади-заде ар-Руми. Переехав после смерти Улугбека, как и ал-Кушчи, в Турцию, продолжал

развивать научные традиции самаркандских ученых. Среди его сочинений наиболее важными являются трактат «Правила действий и исправление таблиц», содержащий комментарии к «Гурганским таблицам», и «Трактат о хорде и синусе». Ему принадлежат также комментарии к «Трактату Фатхия» ал-Кушчи, «Трактат по исследованию азимута Киблы», «Трактат об алмукантарате» и др.

63. **Абд-ал-Али ибн Мухаммад ибн Хусайн ал-Бирджанди** (XV в.) [169, 175, 178, 853] принадлежал к самаркандской научной школе, автор обстоятельных комментариев к «Гурганским таблицам», трудам Насир-ад-Дина ат-Туси и к астрономическому сочинению Кади-заде ар-Руми.

64. **Абу Абд-Аллах Мухаммад ибн Ахмад,** известный как Сибт ал-Маридини (XV в.). [231, 316, 450, 471, 853], — египетский астроном и математик, автор сочинений об астрономических инструментах и комментария к арифметическому трактату Ибн ал-Хаима.

65. **Абу-л-Хасан Али ибн Мухаммад ал-Каласади** (умер в 1486 г.) [384, 450, 625, 853, 1018] работал в Гренаде, автор трактата «Снятие покрывала с науки губар» (см. гл. IV).

66. **Беха ад-Дин ал-Амили** (1547—1622 гг.) [312, 384, 450, 625, 695, 720, 755, 853] — математик и астроном, автор многочисленных сочинений, из которых «Сущность арифметики» (см. гл. IV) стала наиболее популярным учебным пособием в странах Востока в XVII—XIX вв.

§ 4. Об индийской математике

В следующем ниже кратком обзоре математики Индии мы приведем лишь самые общие сведения, отсылая читателя к многочисленным исследованиям, посвященным этой теме [31, 32, 61, 63, 86, 95, 96, 204, 205, 317, 350, 364, 383, 384, 449, 455, 457, 461, 462, 481, 482, 497, 498, 502, 565, 566, 576, 609, 613, 621, 633, 640—645, 707, 736, 737, 745—748, 774, 805—808, 811—814, 860, 870, 898—901, 919].

В литературе широко обсуждался вопрос об истоках индийской математики, причем, с одной стороны, высказывалось мнение о зависимости ее от греческой науки [364, 461, 640], а с другой — доказывалась ее полная самостоятельность [566, 812, 901, 919]. Торговые и культурные связи между Индией и другими странами, в том числе Китаем, обусловливали и обмен научными достижениями [379, 383, 384, 622], однако сведений на этот счет почти не сохранилось.

История индийской математики начинается задолго до нашей эры. До нас дошли некоторые сочинения, относящиеся к раннему ее периоду. Это, прежде всего, «Правила веревки» («сульва-сутра») [86, 384, 457, 497, 502, 707, 898, 899], составленные, вероятнее всего, между VII и V вв. до н. э. и содержащие некоторые правила геометрических построений и ряд вычислений. Здесь решаются задачи на построение прямоугольных треугольников со сторонами, выраженными целыми числами, квадрата, площадь которого больше площади данного квадрата в целое число раз или равно разности площадей двух данных квадратов, даются правила квадратуры круга и т. п. При решении широко используется теорема Пифагора [384, 919]. Особый интерес в «Правилах веревки» вызывает приближенное значение

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34},$$

вычисленное, очевидно, посредством метода поочередных приближений с избытком и недостатком — известного и древним вавилонянам (см. выше).

К сочинениям, по которым историки науки судят о состоянии математики в разные периоды истории Индии, относятся астрономические трактаты «Сурья сиддханта» [455, 807], «Пулисы Сиддханта», «Панча сиддханта» [455, 900], из которых второй, утерянный теперь, был составлен александрийским ученым IV в. Паулосом [61, 384]; сочинение «Ариабхаттиам» математика и астронома Ариабхатты (V—VI вв.) [481]; труды Брахмагупты (родился в 598 г.) [482, 746, 805, 806, 811], Магавиры (XI в.) [737, 814], Шриддхары (XI в.) [95, 96, 736, 808], Бхаскары (XII в.) [805, 806] и некоторые анонимные рукописи [502].

Наиболее важные результаты индийские математики получили в IV—XII вв., но развитие точных наук продолжалось и позже [31, 32, 205, 384].

Наибольшим достижением индийцев является десятичная позиционная система счисления с применением нуля, введение которой сыграло громадную роль в развитии науки [34, 384, 317, 815, 1021, 1022]. Первые сведения о записи чисел с помощью этой системы относятся к VI в. В VII в. она стала известна в Двуречье и вскоре широко распространилась на Востоке, а позднее и в Европе.

Практическая арифметика индийцев в более ранние времена была основана на вычислениях с помощью счетной доски — абака, позже числа записывались на доске, покрытой пылью. Промежуточные результаты, полученные при выкладках, стирались.

Успехи, достигнутые индийскими математиками в различных областях науки, весьма значительны. Прежде всего это относится к арифметике и алгебре. Ими были разработаны различные упрощенные способы умножения, применялся алгоритм извлечения квадратного и кубического корней (см. ниже), заимствованный у китайцев, но значительно измененный [384, 609, 812]; широко использовались некоторые приемы решения арифметических задач: правило «ложного положения», «тройное правило» («трайрашика») и др.

В противоположность грекам индийцы свободно оперировали иррациональностями, обращаясь с ними как с числами. Хотя логического обоснования этим действиям не давалось, это явилось чрезвычайно важным шагом вперед в развитии арифметики. Например, Бхаскара (XII в.) извлекает корень из двучлена по формулам

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

и

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Последнее соотношение в геометрической форме было установлено в X книге «Начал» Евклида. В арифметической форме его применяли в X—XI вв. математики Ближнего и Среднего Востока (см. гл. VI).

Не менее замечательным достижением явилось введение понятия отрицательного числа, которое обозначалось словом «долг» и противопоставлялось положительному числу — «имуществу». Были сформулированы (Брахмагупта) правила сложения и вычитания этих чисел, а позднее — их умножения и деления.

Значительного прогресса достигли индийские математики и в решении числовых линейных и квадратных уравнений, часто применяя при этом остроумные приемы. Им было известно существование двух корней квадратного уравнения, правило нахождения которых в общем виде словесно формулировалось для уравнения

$$ax^2+bx=c, \text{ где } a>0;$$

оно может быть выражено формулой

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}.$$

Отрицательное решение, а иногда, в зависимости от условий, и одно из положительных отбрасывалось.

Особое значение в развитии алгебры имела символика, применявшаяся индийцами, в частности, Брахмагуптой. Многие из обозначений представляли собой сокращения слов, соответствующих понятиям и операциям.

Чрезвычайно велики успехи индийцев в учении о целых числах, которое было тесно связано с решением календарных и других астрономических задач. Им принадлежат изящные приемы целочисленного решения неопределенных уравнений 1-й и 2-й степеней. Так, применялся метод решения в целых числах уравнения $ax + by = c$, основанный на сведении его к уравнению с меньшими коэффициентами (так называемый метод «рассеивания» или «размельчения»); в Европе он был открыт в XVII в. В целых числах решались также неопределенные уравнения 2-й степени вида $ax^2 + b = cy^2$ и $xy = ax + by + c$. Частный случай первого из них, когда $b = 1$, $c = 1$, рассматривался в Европе многими математиками и был назван «уравнением Пелля».

В индийских сочинениях встречаются интересные примеры суммирования числовых рядов — прогрессий, треугольных чисел, квадратов, кубов.

Исходя из достижений греческой астрономии эллинистического периода, индийские математики продвинулись далеко вперед в области тригонометрии; в частности, вместо хорд, применявшихся Птолемеем, они рассматривали синусы. Это привело к введению тригонометрических функций и установлению некоторых соотношений между ними. Были составлены многочисленные таблицы синусов и синусов-верзусов, т. е. обращенных синусов.

Древняя индийская наука сильно повлияла на развитие науки средневекового Среднего и Ближнего Востока, особенно на астрономию и математику. Взаимное воздействие культуры народов Востока происходило постоянно и в более ранние времена, несомненно, накладывая отпечаток на характер каждой из них. Математики стран ислама признавали факт заимствования ими из Индии десятичной позиционной системы счисления и астрономических таблиц. Первое письменное сообщение об этом касается истории перевода на арабский язык индийских астрономических таблиц [383, 449, 576], осуществленного астрономом Мухаммадом ибн Ибрагимом ал-Фазари (умер ок. 800 г.) (он написал впоследствии сочинение «Большой синдхинд», которое долго служило основным пособием для астрономов).

Впоследствии великий среднеазиатский ученый Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми составил таблицы, в которых он, помимо данных Птолемея, использовал и синдхинд. Другой уроженец Средней Азии — Ахмад ибн Абд-Аллах Хабаш ал-Хасиб (IX в.) — составил три астрономические таблицы: «Одну — по арабским наблюдениям, одну — по учению персов и одну — по методу индийцев» [576, стр. 230—231].

Индийское влияние сказалось на многих областях математики стран ислама, особенно на учении о числе.

§ 5. Греческое наследие

Переводы комментарии

Внимание ученых багдадской школы было направлено на вопросы, ответа на которые требовала повседневная практика; первостепенное значение поэтому получили исследования, связанные с астрономией. Однако неверно было бы считать, что ученые средневекового Востока интересовались только сугубо прикладными задачами. Их внимание к отвлеченным проблемам выразилось уже на раннем этапе в огромном интересе к древнегреческой науке. Широко развернувшаяся при первых Аббасидах деятельность по собиранию рукописей сочинений классиков античности и переводу их на арабский язык показывает, что с самого начала значение теории было воспринято как определяющее в математической науке. При всей практической направленности математические исследования восточных ученых проникнуты духом строгого логического построения, унаследованного от греков. Именно это отличало математику и астрономию средневекового Ближнего и Среднего Востока от их предшественниц в Китае и Индии, хотя во многом они имеют много общего (главным образом в стремлении получить точные вычислительные алгоритмы).

В течение IX и X вв. ученые Багдадской школы перевели и прокомментировали сохранившиеся к тому времени все значительные греческие сочинения: «Начала», «Оптику» и «Данные» Евклида, «Альмагест» Птолемея, «Сферики» Менелая, «О шаре и цилиндре», «Квадратура круга» и другие труды Архимеда, «Конические сечения» Аполлония, сочинения Гипсикла, Евтокия, Теона, Паппа, Герона, Гиппарха, Диофанта, Никомаха [461, 576, 671, 730, 821, 822, 824, 827, 829, 882, 1024].

Переводчиками являлись крупные ученые, многие из которых были в то же время авторами оригинальных сочинений.

Среди них — Хадджадж ибн Юсуф ибн Матар, Хунайн ибн Исхак, Юханна ибн Юсуф ибн ал-Батрик, Куста ибн Лукка, замечательные математики братья Мухаммад, Ахмад, Хусайн — сыновья Мусы (Бану Муса), и великий ученый Сабит ибн Корра ал-Харрани. Переводы делались как с греческого, так и с сирийского языков, ибо большинство античных сочинений классиков по астрономии, математике, философии и медицине к этому времени имелось в сирийских переводах.

Известно, что при халифах ал-Мансуре (754—755 гг.) и ал-Ма'муне (813—833 гг.) в Византию направлялись специальные посольства за сбором рукописей; в них принимали участие Куста ибн Лукка, а затем Хунайн ибн Исхак, владевшие греческим, сирийским и арабским языками [627, 730, 847, 853].

Большое значение для освоения греческого научного наследия имела комментаторская деятельность восточных астрономов и математиков. Почти к каждому из классических сочинений было написано по нескольку комментариев [829]. В них разъяснялись теории древних, но под названием «комментарий» часто скрывались оригинальные сочинения, в которых обсуждаемый вопрос рассматривался с совершенно новой точки зрения. Нередко комментарии писались с педагогической целью и представляли собой учебники, где изложение велось более упрощенно.

Высокую оценку труда комментаторов дал ал-Хорезми: «Ученые прошлых времен и ушедших народов не переставали писать книги по различным разделам науки и отраслям философии, имея в виду тех, кто будет после них, рассчитывая на награду соразмерно своим силам и надеясь, что они будут вознаграждены славой и памятью и им достанется из правдивых уст похвала, по сравнению с которой ничтожны взятые ими на себя труды и тяготы, принятые ими для раскрытия сокровенных тайн науки. Один из них опередил других в том, что не разрабатывалось до него, и оставил это в наследие тем, кто придет после него. Другой комментирует труды его предшественников и этим облегчает трудности, открывает закрытое, освещает путь и делает это более доступным. Или же это человек, который находит в некоторых книгах изъяны и соединяет разъединенное, думая хорошо о своем предшественнике, не заносясь перед ним и не гордясь тем, что сделал» [349, стр. 25].

Свыше двадцати арабских обработок насчитывает «Альмагест» Птолемея; авторами их были такие крупные ученые, как ал-Фаргани, Сабит ибн Корра, Ибн Сина, ал-Бируни, Ибн ал-Хайсам, Насир ад-Дин ат-Туси и др. [827].

Уже в IX в. появились комментированные переводы трудов Диофанта. Они упоминаются среди сочинений Кусты ибн Луки под названиями «Книга, касающаяся перевода Диофанта об алгебре и ал-мукабале» и «Комментарий к трем главам и одному отрывку из книги Диофанта о числовых вопросах» [822]. Позднее обработкой «Арифметики» занимался один из великих средневековых математиков Абу-л-Вафа ал-Бузджани [627, 853].

Комментирование «Начал» Евклида и критический подход к некоторым моментам его учения часто рождало новые идеи, чрезвычайно плодотворные. Это касается, например, развития теории отношений в трудах средневековых восточных математиков (см. гл. VII).

Труды классиков греческой науки были положены в основу математического образования. Первым сочинением, которое следовало познать начинающему, считались «Начала» Евклида, а конечной целью являлось усвоение «Альмагеста» Птолемея. Для достижения этой цели учащийся должен был изучить так называемые «средние» книги [821]. К ним относились: «Оптика», «Данные» и «Феномены» Евклида, «Сферики» Теодосия и Менелая, «О вращающейся сфере» и «О выходе и заходе звезд» Автолика, «О сфере и цилиндре», «Квадратура круга» и «Леммы» Архимеда, «О расстояниях Солнца и Луны» Аристарха, «О днях и ночах» Теодосия, «Анафорик» Гипсикла. В состав «средних» книг были включены и некоторые сочинения восточных авторов: Сабита ибн Корры [456, 627], Мухаммада ибн Мусы (IX в.) «Об измерении фигур» [857] и трактат Насир ад-Дина ат-Туси «О полном четырехстороннике» [328, 463]. «Средние» книги неоднократно комментировались. Автором одного из этих комментариев был ат-Туси.

Более подробно остановимся на судьбе «Начал» Евклида в средневековой восточной математике.

Переводы «Начал» Евклида и комментарии к ним

Среди первых математических трудов древних, переведенных на арабский язык, были «Начала» Евклида. Имеются сведения, что рукописи «Начал» впервые привезены из Византии в VIII—IX вв. [730].

Первым известным арабским переводчиком «Начал» был Хадджадж ибн Юсуф ибн Матар. Историки сообщают о двух версиях его перевода: согласно данным биобиблиографического словаря «Фихрист» ан-Надима [843], первая из них [очевидно, теперь утерянная] называлась «гаруновой» в честь халифа Гаруна ар-Рашида, а вторая, посвященная ал-Ма'му-ну, — «ма'муновой» и, по всей вероятности, была лишь вариантом первой [824]. Шесть первых книг второй версии, сохранившиеся в лейденской рукописи (№ 399, 1) с комментариями ан-Найризи, сейчас опубликованы [424].

В «Фихристе» упоминается перевод «Начал», который выполнил известный ученый и плодотворный переводчик Абу Якуб Исхак ибн Хунайн ал-Ибади. Этот перевод был впоследствии улучшен Сабитом ибн Коррой ал-Харрани.

Перевод книги XIV и книги XV «Начал», составленных Гипсиклом, осуществил Куста ибн Лукка.

Судя по сведениям, сообщаемым в «Фихристе» и в «Истории мудрецов» Ибн ал-Кифти [684], «Начала» комментировали не менее пятидесяти геометров и алгебраистов этого периода [450, 587, 590, 735, 774, 824, 829, 843, 853]. В этом сочинении они видели ключ к пониманию науки прошлого и черпали из него новые идеи. Одни авторы только разъясняли предложения «Начал», другие подвергали учение Евклида критике в наиболее существенных моментах и творчески пересматривали его. Комментарии к «Началам» сыграли, таким образом, весьма важную роль в развитии математики на средневековом Востоке.

Историки математики стали изучать арабские комментарии «Начал» в XIX в. Первоначально сведения о них черпались лишь из каталогов хранилищ восточных рукописей, из латинских средневековых переводов с арабских версий «Начал», из перевода Дж. Кампано (XIII в.), изданного в 1482 г. в Венеции [461, 536а], а также из опубликованного в 1594 г. в Риме арабского текста сочинения «Изложение Евклида», автором которого считается Насир ад-Дин ат-Туси [537]. Затем были исследованы средневековые арабские энциклопедии, в которых сообщались данные о переводах и комментариях к «Началам» и, наконец, сами переводы и комментарии.

Впервые обзор арабских сочинений о «Началах» дал в 1823 г. Гартц в работе «Об арабских переводчиках и толкователях Евклида» [567], а в 1842 г. Венрих в исследовании «О сирийских, арабских и др. версиях и комментариях греческих авторов» [931].

В 1881 г. М. Кламрот опубликовал статью «Об арабском Евклиде» [664], которая основана на исследовании: 1) I—VI книг «Начал» в переводе Хадджаджа по лейденской (399, 1) рукописи и XI—XIII книг в его же переводе по копенгагенской (№ XXXI) рукописи; 2) перевода I—XIII книг, выполненного Исхаком ибн Хунайном (улучшенного Сабитом ибн Коррой) по оксфордской (№ 279) рукописи, и

V—X книг этой версии — по копенгагенской (№ XXXI); 3) XIV—XV книг «Начал», принадлежащих Гипсиклу, в переводе Кусты ибн Лукки по упомянутым оксфордской и копенгагенской рукописям. Автор пришел к выводу, что перевод Хадджаджа менее точен, так как он стремился дать скорее учебник, чем верное отражение оригинала. Оказалось, что латинский текст Кампано не совпадает ни с одной из арабских версий и представляет собой не перевод, а обработку «Начал». То же касается и римского издания «Изложения Евклида» ат-Туси.

Исследование Кламрота имело большое значение для выявления подлинного текста «Начал», что особенно интересовало в то время издателей сочинений Евклида и, в первую очередь, И. Л. Гейберга. Последний уделил внимание и арабским версиям «Начал». В работе «Литературно-исторические исследования об Евклиде» [590], написанной до появления статьи Кламрота, он подчеркнул особое значение этих переводов для критического воссоздания текста «Начал», так как «арабам были доступны более ранние греческие рукописи». В то же время он отметил, что многие сведения, сообщаемые ими (например, о жизни и деятельности Евклида), не заслуживают никакого доверия. Он пришел к заключению, что «полностью и точно арабская традиция может быть выявлена лишь тогда, когда будут исследованы рукописи арабских переводов, установлена зависимость между различными версиями и изданы наиболее важные из них» [590, стр. 21].

В работе «Арабская традиция «Начал» Евклида» [591] Гейберг, отмечая важность исследования Кламрота, полемизировал с ним по ряду вопросов, связанных с историей текста «Начал» у арабских и европейских авторов.

В 1887 г. П. Таннери обратил внимание на содержащийся в лейденской рукописи № 399 арабский текст комментария ан-Найризи к I—VI книгам «Начал» Евклида в переводе Хадджаджа (он был издан, как уже упомянуто, вместе с латинским переводом в нескольких выпусках Р. Бестгорном и И. Гейбергом [424]). В 1896 г. М. Курце обнаружил полный латинский перевод этого комментария, выполненный во второй половине XII в. Герардо Кремонским, и опубликовал его в 1899 г. в приложении к изданию собрания сочинений Евклида, осуществленному Гейбергом [494]. Это позволило заполнить лакуны арабского текста и получить некоторые сведения о греческих комментаторах Евклида — Гемине, Симпликии, Героне, Аганисе [693, 890]. К переводу ан-Найризи был присоединен находящийся в той же рукописи комментарий к

X книге, принадлежащий другому автору (подробнее о нем см. в гл. VI).

Особый интерес историков математики вызвало «Изложение Евклида» Насир ад-Дина ат-Туси, которое известно в двух изданиях — римском (1594 г.) [537] и тегеранском (1881 г.) [908], значительно отличающихся друг от друга.

Исследованием римского издания занимались Г Зутер [842], Э. Видеман [994] и К. Таэр [897]. Зутер в 1892 г. рассмотрел доказательство теоремы Пифагора, данное ат-Туси, и выразил несогласие с мнением Гейберга, который обвинил ат-Туси в стремлении сделать Евклида своим соотечественником, т. е. уроженцем г. Туса. Зутер отметил, что в действительности в тексте значится «уроженец Тира» (сириец), и заключил, что последнее вполне возможно («Разве не происходили из Азии Аполлоний Пергский, Никомах Геразский и Теон Смирнский?» [842, стр. 6]). Видеман в 1927 г. дал перевод предисловия и введения к первой книге «Изложения Евклида», на основании которого заключил, что ат-Туси ставил задачу не просто комментировать «Начала», а переработать первоначальный текст и его арабские комментарии с целью составить учебник геометрии. Основательно исследовал сочинение ат-Туси в 1935 г. К. Таэр [897], признававший необходимость заново рассмотреть вопрос об арабской традиции «Начал», которая, по его мнению, заслуживает гораздо большего внимания, чем ей до сих пор уделялось.

Недавно Б. А. Розенфельдом, А. К. Кубесовым и Г С. Собировым высказано вполне обоснованное предположение, что автором римского издания «Изложение Евклида» является не ат-Туси, а кто-то из восточных математиков более позднего времени, вероятнее всего, один из представителей Самаркандской школы Улугбека [291].

Тегеранское издание «Изложения Евклида» было исследовано Г Д. Мамедбейли [222, 223].

Большой популярностью на Востоке пользовался в свое время комментарий к «Началам», составленный самаркандским математиком Шамс ад-Дином ас-Самарканди (XIII в.); впоследствии (XV в.) он был, в свою очередь, прокомментирован другим самаркандским ученым Кади-заде ар-Руми. Сейчас на русском [283] и французском [508] языках опубликован отрывок из сочинения ас-Самарканди; имеется также турецкий перевод этого сочинения [283]. Полный русский перевод обоих трактатов выполнен аспирантом Ташкентского университета А. Ахмедовым. Как видно из этого перевода, комментарий ас-Самарканди является в значительной мере обработкой «Изложения Евклида» ат-Туси.

Интересные данные о других арабских обработках «Начал» и их авторах были почерпнуты из трудов ан-Надима [843], ал-Кифти [684], ал-Я'куби [665]. На сведениях из этих трудов основывались списки комментаторов Евклида на средневековом Востоке, приведенные М. Штейншнейдером [821, 824, 828, 829], Г Зутером [853], А. Каппом [627] и Э. Плуэем [735]. Помимо названных авторов, обзор арабских переводов «Начал» дают Т Хис [587], Дж. Сартон [774] и др.

Имеется много работ, касающихся отдельных вопросов из «Начал» Евклида в трактовке арабских авторов.

Большое внимание исследователей привлекает теория параллельных линий на средневековом Востоке (Смит, Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич), широко освещенная в последние годы благодаря переводу (Б. А. Розенфельд) ряда неизвестных до сих пор трактатов, содержащих попытки доказать V постулат [184, 222, 223, 267—271, 274—277, 279, 280, 283, 290, 298, 328, 338, 339, 345—348, 381—384, 508, 751, 752, 816].

Не меньший интерес ученых (Э. Плуэй, А. П. Юшкевич, Б. А. Розенфельд, Г Д. Мамедбейли, Ф. А. Касумханов и др.) вызвала теория отношений Евклида в сочинениях восточных математиков и критика, которой они подвергли эту теорию [176, 177, 222, 223, 290, 338, 339, 381—384, 621, 625, 735] (см. гл. VII).

Среди других исследований арабских обработок «Начал» Евклида следует упомянуть работы К. Локоча [685], Х. М. Мухамедиева [239], М. А. Ахадовой [10—12] и др.

§ 6. Классификация наук

Из всех наук, развивавшихся в классической древности, наибольший интерес на средневековом Востоке наряду с медициной и философией вызывали астрономия и математика. Точные науки в соответствии с традицией подразделялись на четыре класса: 1) математика, куда относились арифметика, геометрия, астрономия и музыка; 2) логика; 3) физика, содержание и объем которой ограничивались «Физикой» Аристотеля; 4) метафизика. Прикладные науки входили в эту схему; так, механика, оптика и т. д. относились обычно к первому, а медицина — к четвертому классу.

Имелась и более подробная классификация наук. Сохранившиеся сочинения помогают яснее понять, как в то время определялись отдельные математические дисциплины и какова была цель научных исследований.

Мы остановимся на отрывках из трактатов «Перечисление наук» ал-Фараби, «Части философских наук» Ибн Сины и из энциклопедий «Книга исцеления» (китаб аш-шифа) Ибн Сины и «Правильное руководство для стремящегося к блестящей цели» ал-Ансари. Подразделения математических наук, данные этими авторами, во многом совпадают, но имеют и значительные отличия.

Ал-Фараби

Выдающийся мыслитель средневекового Востока Абу Наср Мухаммад ибн Мухаммад ал-Фараби, известный прежде всего своими философскими сочинениями, проявил большой интерес и к специальным вопросам математики и астрономии, особенно к принципиальным положениям, на которых строятся точные науки, — так называемым «началам» (ʻусул) этих наук. Целью его комментария к «Началам» Евклида было разъяснение определений основных понятий геометрии [331].

Краткое энциклопедическое описание наук ал-Фараби сохранилось в нескольких рукописях в арабском оригинале (текст издан в Каире в 1950 г.) [543] и в двух латинских переводах. Первый из них, выполненный Герардо Кремонским, известен под названием „Liber Alfarabii de scientiis, translatus a magistro Girardo Cremonesi in toleto de arabico in latinum" [430], второй, принадлежащий Г Камерарио, был опубликован в 1588 г. в Париже. Оба перевода в основных чертах совпадают. Мы пользуемся немецким переводом с латинского (Э. Видеман) раздела, касающегося классификации математических наук [949].

Ал-Фараби так формулирует цель трактата: «Мы решили представить в этом сочинении известные науки и каждую из них в отдельности, изложить основное содержание и разделы каждой, если она таковые имеет, и наиболее существенное, что содержится в каждом разделе.

Польза, которую можно извлечь из этой книги, состоит в том, что если кто-нибудь хочет изучить какую-либо науку и размышляет об этом, то он будет знать, за какую он должен приняться, а о какой следует размыслить; далее, чего он достигнет при ее рассмотрении, какую пользу она приносит и какая выгода достигается при ее посредстве. Он примется за науку, основываясь на правильном предвидении и знании, а не на незнании и случайности. Руководствуясь этим сочинением, можно провести сравнение между науками и узнать, какая является лучшей, более полезной, более точной, более обоснованной и более сильной, а какая — худшей, более слабой и бессильной. Благодаря этой книге получают средство для разоблачения того, кто хвастает знанием одной из этих наук, чего нет на самом деле. Если вы потребуете от него изложить содержание, которое она охватывает, ее разделы и содержание каждого из них, а он этого не сможет, то выяснится лживость его хвастовства, и его обман раскроется» [949, стр. 80—81].

Книга делится на пять глав. В первой речь идет о риторике и ее разделах, во второй — о диалектике и ее разделах, в третьей — о математических науках, в четвертой — о естественной науке, в пятой — о гражданских науках, т. е. этике, экономике, политике.

Все математические науки ал-Фараби подразделяет на семь разделов: арифметика, геометрия, оптика, наука о звездах, наука о музыке, наука о предметах, имеющих вес (механика), и наука «об искусных приемах» (Ingenium).

В арифметике он, в противоположность грекам, видит две науки: прикладную арифметику и теоретическую. «Прикладная исследует числа, поскольку речь идет о числах пересчитываемых предметов, количество которых потребуется определить, например, число тел, людей, лошадей, монет и других вещей, которым присуще число. Этой наукой люди пользуются в торговле и в гражданских делах. Теоретическая исследует числа только в абсолютном смысле, в представлении лишенные тел и всего того, что с их помощью считается».

Кратко охарактеризовав геометрию, оптику и другие разделы математики, ал-Фараби останавливается на «науке об искусных приемах» — разделе, который включает математические дисциплины, получившие наибольшее развитие в трудах средневековых восточных ученых, и представляет для нас особый интерес. «Наука об искусных приемах, — пишет ал-Фараби, — учит, как поступать, чтобы все то, свойства чего в отношении содержания и доказательства объяснены в рассмотренных выше теориях, выступило в действительности в естественных телах. Эта специальная наука необходима, так как другие науки ведут рассуждения с линиями, поверхностями, телами и прочими вещами, которые рассматриваются лишь постольку, поскольку их представляют себе и освобождают от действительных тел. Мы применяем эти учения только тогда, когда в силу наших желаний и с помощью нашего искусства даем им возможность проявиться в действительных телах, для чего нужно иметь в наличии как вышеуказанные свойства, так и сами тела. Сделать это и является задачей науки об искусных приемах.

К этой науке относятся искусные приемы с числами, имеющие много видов, например, вид, к которому принадлежит учение, в наше время называемое алгеброй и алмукабалой, и ему подобное, хотя это является общим как науке о числе, так и геометрии. Оно само содержит в себе метод нахождения чисел, прилагающихся к тем вещам, основу которых для рациональных и иррациональных величин дал Евклид в своей десятой книге о началах...

Сюда, далее, относятся геометрические искусные приемы, которые очень многочисленны. Часть из них составляет основу архитектуры. Сюда относятся также измерения различных тел и методы создания инструментов, служащих для подъема, далее музыкальных инструментов, а также инструментов многих практических искусств, например, луков и других видов оружия. Сюда принадлежат приемы, касающиеся зрения (ingenium aspectuale) и относящиеся к искусству, которое дает возможность глазу познать действительные свойства удаленных предметов, к искусству создания зеркал и к науке о зеркалах, где речь идет о местах, которые отражают лучи, возвращают их или ломают, и где определяются места, которые пересылают солнечные лучи к другим телам. Отсюда возникает искусство зажигательных зеркал и его приемы. Сюда относятся также приемы искусства создания весов и приемы очень многих искусств, касающихся употребления инструментов.

По причинам, вышеупомянутым и играющим при этом роль, возникают науки искусных приемов, которые являются основами практических гражданских искусств, находящих приложение к телам, фигурам, порядку, положению и измерению; сюда относятся архитектура, плотничье дело и т. д.» [949, стр. 96—98].

Таким образом, согласно классификации ал-Фараби, каждая наука наряду с теоретическим включает в себя и практический раздел. Это касается как геометрии, оптики и т. д., так и науки о числах, на которой мы остановимся ниже.

Ибн Сина

Несколько иначе классифицирует математические науки Ибн Сина, посвятивший этому вопросу сочинение «О частях философских наук» и раздел энциклопедии «Книга знания» (китаб аш-шифа).

В нашем распоряжении имеется рукопись (из собрания Института востоковедения АН УзССР, № 2947—III, л. 16) «Части философских наук, Извлечение из книги главы шейхов (шайх ар-раис)», содержащая первый из упомянутых трактатов в сокращенном виде. В том же собрании находятся и две полные рукописи этого сочинения (№ 2385, лл. 134б — 136б; № 2213, лл. 20а — 23а).

Классификация наук по Ибн Сине рассматривалась У. И. Каримовым [166].

Философские науки Ибн Сина подразделяет на теоретические (назари) и практические ('амали). Среди теоретических он выделяет науки физические ('улӯм ал-таби) и математические ('улӯм ал-рийяди). Ибн Сина считает, что математическая наука имеет четыре раздела: наука о числах, геометрия, астрономия и наука о музыке; а также шесть ветвей (фуру'): наука о сложении (джам') и вычитании (тафрик), наука алгебры и алмукабалы, наука об измерении, наука механика (джар ал-аскал), наука об астрономических таблицах и календаре (таквим) и наука о музыкальных инструментах.

Подробную характеристику указанных «разделов» и «ветвей» математических наук мы находим и в «Книге знания» (отрывки переведены на немецкий язык Э. Видеманом [938, стр. 425—427]).

«Учение о числе, — говорит Ибн Сина, — рассматривает виды чисел, особенности каждого вида самого по себе и способ получения одного из другого.

Геометрия рассматривает отношения линий, виды поверхностей и тел, далее отношения их к измерениям (в смысле длины, ширины и высоты), но лишь постольку, поскольку они являются свойствами образов и фигур. Это охватывают «Начала» — сочинение Евклида.

Астрономия рассматривает свойства частей мира в их образах, положения относительно друг друга, их величины, расстояния между ними, движения, присущие сферам и присущие звездам, измерения шара, сечения и круги, по которым совершаются движения. Это охватывает книга «Альмагест».

Музыка рассматривает свойства мелодий и причину их гармонии и дисгармонии, вплоть до познания музыкальных инструментов, причем все с доказательствами».

К «ветвям» наук Ибн Сина относит дисциплины, которые ал-Фараби назвал «наукой об искусных приемах», добавляя к ней практическую арифметику: «К ветвям арифметики принадлежит применение сложения и вычитания по индийскому способу, применение алгебры и алмукабалы. К ветвям геометрии принадлежит учение об измерении, о движущихся приспособлениях, о движении грузов, тяжестях и повозках, далее об оптике, о зеркалах и учение о движении вод.

К ветвям астрономии принадлежит построение таблиц и календаря. К ветвям музыки относится изготовление редких чужих инструментов, таких, как орган (organ) и ему подобное».

Ал-Ансари

Более подробное подразделение арифметики и геометрии дает ал-Ансари в своей энциклопедии, соответствующие отрывки из которой в немецком переводе опубликовал Э. Видеман [938, 950].

Арифметику ал-Ансари делит на теоретическую и практическую. К последней он относит прежде всего искусство вычислений, которое называет «открытым (мафтух) счетом» и пользу которого видит в применении к астрономии, геодезии, медицине, делению наследства и т. д. «Говорят, — пишет он, — что в ней нуждаются во всех науках и вообще. Ни властитель, ни ученый, ни обыкновенные люди не могут обойтись без нее». Сюда же он относит «счет с помощью доски и пыли», который учит методам счета «с применением девяти знаков», заимствованных у индийцев. Очевидно, в первом случае ал-Ансари имеет в виду методы староарабской арифметики, о которых мы будем говорить ниже. К практической арифметике относятся также «алгебра и алмукабала», «вычисления с помощью правила двух ложных положений», учение о делении наследства и «учение о вычислениях с помощью диргема и динара» (под которым подразумевается решение неопределенных уравнений).

Общие замечания

Таким образом, в подразделении математических наук, данном учеными средневекового Востока, воспроизводится в основных чертах греческая классификация, однако имеется та существенно новая особенность, что наряду с теоретическими дисциплинами учитываются и практические. Уже в эллинистический период греки (например, Гемин Родосский (I в. до н. э.), судя по сообщению Прокла [552]) выделяли математические дисциплины, связанные с абстрактными объектами, и отличали их от наук, рассматривающих объекты, чувственно ощутимые; к первым относили арифметику и геометрию, а ко вторым — механику, астрономию, геодезию, оптику, музыку и даже прикладную арифметику (логистику). В науке стран ислама с ее вниманием к прикладным вопросам был воспринят именно такой подход к классификации математики, узаконивший прикладные дисциплины, что для античной науки классического периода было немыслимо [627].

Итак, из сказанного выше можно заключить, что учение о числе охватывало:

1) теоретическую арифметику;

2) практические разделы учения о числе:

а) практическую арифметику (методы вычислений; некоторые приемы решения арифметических задач, например, «правило двух ложных положений» и т. д.; методы решения неопределенных уравнений и пр.),

б) алгебру и алмукабалу, в том числе теорию квадратичных иррациональностей, изложенную в книге X «Начал».

Дальнейшее изложение будет построено согласно этому плану. Мы рассмотрим также вопрос о расширении понятия числа в математике Среднего и Ближнего Востока (гл. VII).

Глава III. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА НА СРЕДНЕВЕКОВОМ ВОСТОКЕ

§ 1. Предмет теоретической арифметики и источники ее изучения

Теоретическая арифметика, согласно классификации, принятой математиками восточного средневековья, является первым разделом учения о числе; количество сочинений о ней сравнительно невелико. Очевидно, обращаясь к теоретической арифметике, ученые прежде всего отдавали дань греческой традиции, но, несомненно, наличие такой традиции свидетельствует о значительном интересе к абстрактным разделам учения о числе.

Содержание теоретической арифметики составляли вопросы, рассмотренные в VII—IX книгах «Начал» Евклида и главным образом во «Введении в арифметику» Никомаха.

Ал-Ансари в энциклопедии «Правильное руководство для того, кто стремится к блестящей цели» так мотивирует необходимость изучения теоретической арифметики: «Польза ее состоит в упражнении ума при рассмотрении абстрактного, которое освобождено от материи, и того, что с ней связано. Польза ее проявляется, далее, в том, что из нее следует, например, дружественные числа и удивительные свойства магических квадратов, а также в науках, которые от нее ответвляются» [950, стр. 30—31].

Теоретическая арифметика обозначалась либо термином „х̣исаб ан-наз̣а̄рӣ“ (в противоположность „х̣исаб ал-а̄ма̄лӣ“, принятому для практической арифметики), либо термином „ал-арис̱матӣкӣ“ (греческое название этой науки в арабской транскрипции)

Сочинение Никомаха «Введение в арифметику», по образцу которого строилось изложение теоретической арифметики, было известно в арабских переводах. Из них до настоящего времени сохранился перевод Сабита ибн Корры. Текст его перевода по рукописи Британского музея издан в 1959 г. в Бейруте [675]; вторая рукопись хранится в Эскуриале в Мадриде [477, т. 1, стр. 390]. Имеются сведения и о другом популярном на Востоке переводе труда Никомаха с сирийского текста. Его выполнил в IX в. несторианец Хабиб ибн Бахриз [853]. Этот перевод пересмотрел ал-Кинди; его замечания были использованы более поздними авторами [829, стр. 352] (существование арабских версий «Введения в арифметику» долго оставалось неизвестным историкам науки, и это отразилось, например, в «Очерках по истории математики в древности и в средние века» Г Ганкеля [576], который вообще сомневался, были ли на средневековом Востоке знакомы с учением Никомаха).

Теоретическая арифметика включалась во все сочинения учебного характера, в частности, в «Книгу исцеления» [кита̄б аш-шифа̄) и «Книгу знания» (даниш-намэ) Ибн Сины [11, 12, 685, 1021], «Книгу вразумления в начатках искусства звездочетства» (кита̄б ат-тафхим) Абу Райхана ал-Бируни [982, 1027] *

Главы о теоретической арифметике занимали важное место в восточных энциклопедиях. Так, «Трактат о теории чисел» (опубликован в английском переводе в 1964 г. [570]) составляет первый раздел энциклопедии X в. «Послания братьев чистоты» (риса̄ла ихва̄н ас-сафа), арабский текст которой издан в Бейруте в 1957 г. Много внимания уделено вопросам теоретической арифметики в энциклопедиях «Ключи наук» Абу Абд-Аллаха Мухаммада ал-Хорезми и «Правильное руководство для того, кто стремится к блестящей цели» Мухаммада ибн Ибрагима ал-Ансари (соответствующие отрывки из названных сочинений переведены на немецкий язык Э. Видеманом [950]), а также в трактате ал-Фараби «О подразделении наук» [949] и в «Книге стран» (кита̄б ал-булда̄н) ал-Я'куби, изданной в 1861 г в Лейдене (немецкий перевод отрывков опубликован Кламротом [665]) и др.

Ученые средневекового Востока внесли значительный вклад в развитие теоретической арифметики. Это прежде всего касается замечательного трактата Сабита ибн Корры о дружественных числах [см. § 4]. Согласно ал-Кифти [774, стр. 41—56], выдающийся ученый Якуб ибн Исхак ибн ас-Саббах ал-Кинди был автором десяти сочинений по различным проблемам теоретической арифметики. Трактаты такого рода написаны также Ибн ал-Хайсамом, ал-Бируни [880], Али ибн Ахмадом ал-Моджтаби, прозванным ал-Антаки [853, стр. 63—64], и многими другими.

* С русским переводом этого трактата, выполненным Б. А. Розенфельдом и еще неопубликованным, мы имели возможность познакомиться в рукописи.

Перейдем к обзору основных вопросов, которые затрагивались в сочинениях по теоретической арифметике.

Помимо названных источников, мы ссылаемся на две рукописи Института востоковедения АН УзССР в Ташкенте. Одна из них (1750 — VIII) — «Трактат об арифметике» (рисāла фӣ-л-арис̱матики*) Абӯ-л-Вафы ан-Бузджани [231], — упоминавшаяся в средневековых восточных энциклопедиях, например, у ал-Ḳифти [627], до сих пор, судя по литературе, не была обнаружена. Трактат содержит основные определения теоретической арифметики; примеров и предложений нет; стиль его сжатый, немногословный, в чем автор следует скорее Евклиду, чем Никомаху.

Вторая рукопись (5513 — I) представляет собой отрывок из «Солнечного трактата по арифметике» (шамсӣйя ал-х̣исāб) ан-Найсабури.

Еще одна рукопись ИВ АН УзССР (816), содержащая трактат по теоретической арифметике аш-Ширази и озаглавленная «Жемчужина короны» (дурра ал-тадж), описана Г. Собировым [315].

Кроме того, мы рассмотрели введение к седьмой книге «Изложения Евклида» Насир ад-Дина ат-Туси, изданного на арабском языке в Риме в 1594 г. [537].

§ 2. Основные определения

Определение теоретической арифметики, данное ал-Фараби (см. выше), противопоставляет ее прикладной арифметике, т. е. науке, которой пользуются «в торговле и в гражданских делах». Предмет теоретической арифметики состоит в изучении чисел «в абсолютном смысле». Ал-Фараби пишет: «С ними производят исследование только тогда, когда они лишены всего, что пересчитывается с их помощью при чувственном ощущении, имея в виду, что все числа являются общими как для чувственно ощутимых, так и для чувственно неощутимых вещей. Теоретическое учение о числах исследует абсолютным образом все, что относится к их существенным свойствам, как если они рассматриваются сами по себе, так и если они сравниваются в их взаимоотношении» [949, стр. 82].

Объект теоретической арифметики — число — характеризуется в пифагорейском духе: число есть совокупность единиц.

Ибн Сина [150] и ат-Туси [537] при определении числа исходят из аристотелевского понятия «количество», которое

* В рукописи ошибочно рисāла-фи-л-ис̱матикӣ.

может быть либо непрерывным, либо дискретным. К непрерывному количеству относятся линия, плоскость, тело, к дискретному («между частями которого нет ничего промежуточного» [6, стр. 124]) — число.

Число рассматривается как множество единиц, но сама единица, в соответствии с пифагорейской традицией, к числам не относится. Так, согласно «Ключам наук» [950, стр. 12], «единица является не числом, а элементом числа»; Абу-л-Вафа определяет единицу как «то, что входит составной частью в каждое существующее число».

В трактате ал-Кинди «О первой философии» [157, стр. 57—106] приводится несколько доказательств того, что единица не является числом; одно из них следующее: «Если мы скажем, что единица — число, то мы впадем в весьма неприятное противоречие. В самом деле, если бы единица была числом, то она была бы некоторым количеством. А если она была бы некоторым количеством, тогда то, что свойственно количеству, имело бы касательство и необходимое отношение и к ней, то есть она должна была бы быть чему-то равной или не равной. Если же наряду с данной единицей были бы другие единицы, из коих одни были бы равны ей, а другие — нет, то единица была бы делима, ибо меньшей единицей исчислялась бы большая единица, поскольку она имела бы части. Но ведь единица неделима. Стало быть делимость ее есть и сущее, и не сущее, а это противоречие. Следовательно, единица не есть число».

Большинство восточных авторов, как и греки, в понятие теоретической арифметики не вводят дробь. Об этом говорит, например, ал-Бируни: «Истинная единица неделима, но единица, применяемая в конкретных вопросах, называется единицей условно. При взвешивании и измерении объемов, площадей и длин единица подразделяется на большое число частей при помощи деления; такая единица состоит из более мелких единиц» («Книга вразумления», перевод Б. А. Розенфельда); другими словами, понятие дроби является достоянием практической арифметики. Взамен дробей, как и у Евклида, обычно вводятся понятия «части» («доли») и «частей» («долей»), которые соответствуют дробям вида $\frac{1}{n}$ и $\frac{m}{n}$ но по существу эквивалентны понятию целого числа при выборе более мелкой единицы измерения. Исключение составляет трактат о теории чисел из энциклопедии «Послания братьев чистоты», в которой дроби отнесены к числам: «Числа бывают двух видов, целые числа и дробные. Единица, которая предшествует двум, является источником и причиной всех чисел, и от нее происходят все числа, как целые, так и дробные, и они снова могут быть сведены к ним. Целые числа возникают путем приращения, а дробные числа — посредством деления» [570, стр. 136]. Это свидетельствует о том, что в математике средневекового Востока, несмотря на стремление следовать грекам, под воздействием требований практики происходило расширение понятия числа и прежде всего за счет включения в него дроби.

Теоретическая арифметика включала следующие разделы:

1) учение об «отдельном количестве» (камийя-ал-муфрада), куда, в частности, относится теория четных и нечетных, совершенных, дружественных, плоских и телесных чисел;

2) учение о «зависимом количестве» (камийя ал-мудафа), где числа рассматриваются в их взаимной зависимости;

3) учение о числовых отношениях и пропорциях.

§ 3. Учение об отдельном количестве. Четные и нечетные, простые и составные числа

В основных определениях теории четных и нечетных чисел восточные авторы следовали чаще всего за Никомахом [509, стр. 190, 201]. Так, согласно Абу-л-Вафе, «четное число — это число, делящееся на две половины, между которыми нет единицы; нечетное число — это число, которое не делится на две половины, так как между ними имеется единица».

Что касается классификации четных чисел, то одни математики придерживались точки зрения Никомаха, а другие повторяли определения Евклида. Уже было сказано, что Никомах внес поправку в евклидову классификацию, согласно которой существуют два класса четных чисел: четно-четные вида 2 и четно-нечетные вида $2^n (2m+1)$, где $n > 1$. Как доказано в 34-м предложении IX книги «Начал», эти два класса пересекаются. Никомах же разделил второй класс на два: четно-нечетными он назвал числа вида $2(2m+1)$, а нечетно-четными — числа вида $2^n (2m+1)$, где $n > 1$.

Восточные математики числа $2^n (2m+1)$ называли четно-четно-нечетными (завдж ал-завдж ал-фард).

Классификации Никомаха придерживались Ибн Сина, ал-Бируни и автор энциклопедии «Ключи наук» Абу Абд-Аллах ал-Хорезми. Последний сопровождает свои определения числовыми примерами: «Четное число может быть разделено на две равные части, таковы 4 и 6. Четно-четное можно последовательно делить пополам, пока не достигнешь единицы; например, 64, половина которого 32, половина 32 есть 16, половина 16 есть 8, половина 8 есть 4, половина 4 есть 2, половина 2 есть 1. Четно-нечетное может быть один раз разделено на две равные части, являющиеся целыми числами, но эти части суть нечетные числа, например, у 10. Четно-четно-нечетное число — это число, половина которого четная; оно может быть, однако, разделено на две равные части, являющиеся целыми числами, больше, чем один раз, так что при этом единица не достигается, как у 12, которое может быть разделено пополам, причем сначала получается 6, а затем 3» [955, стр. 12—13].

В то же время Абу-л-Вафа рассматривает, как и Евклид, только два вида четных чисел: четно-четные и четно-четно-нечетные.

Ибн Сина [11, стр. 265—268] большое внимание уделяет свойствам различных видов четных чисел; он формулирует, например, предложения: «Каждый делитель четно-четного числа также является четно-четным числом», «Сумма последовательных четно-четных чисел от единицы меньше следующего четно-четного числа на единицу» (т. е. $1+2+2^2+\cdots 2^n = 2^{n+1}-1$), «Между двумя соседними последовательными четно-нечетными числами всегда имеется разность, равная четырем» и т. д.

Ал-Бируни использовал свойства четно-четных чисел при обосновании правил, которые он применил для решения шахматной задачи в «Памятниках минувших поколений» [60, стр. 79].

Классифицируя нечетные числа, Абу-л-Вафа, ал-Бируни, Ибн Сина и другие вслед за Евклидом и Никомахом рассматривают нечетно-нечетные, простые, взаимно простые и взаимно составные числа. Согласно Абу-л-Вафе, «первое (простое) число — это число, которое измеряется только единицей. Составное — это число, которое измеряется числом, отличным от единицы. Нечетно-нечетное число — это число, которое измеряется только нечетным числом».

Ибн Сина определяет простые числа как «числа, которые несоизмеримы ни с какими другими числами, за исключением единицы, например, три, пять, семь, одиннадцать и так далее. Эти числа являются элементами и дают начало всем другим числам; при разложении всех чисел всегда приходят к первым числам. Все другие числа состоят из них, в то время как сами они не сводятся ни к каким другим числам» [11, стр. 269].

Примечательно раъяснение, которое дает определению простого (или первого) числа автор «Ключей наук»: «К нечетным числам относится первое число. Оно не является составным, и никакое число, кроме единицы, не пересчитывает его, например 3, 5, 7. Значение выражения «его не пересчитывает никакое число» состоит в том, что оно не делится ни на какое число, т. е. что оно не имеет никакой дробной части, кроме той, которая носит его собственное имя; например, $\frac{1}{3}$ для 3 и $\frac{1}{5}$ для 5». Отсюда видно, что для ал-Хорезми понятие дроби уже не казалось противоречащим учению об абстрактном числе.

Для нахождения последовательных простых чисел применяется «таблица решета» (Ибн Сина), т. е. так называемое «решето Эратосфена».

Для взаимно-простых чисел (или, согласно принятой со времени Евклида терминологии, взаимно-первых) Абу-л-Вафа и другие авторы применяют термин «несоизмеримые», а для взаимно-составных — «соизмеримые» числа. Абу-л-Вафа говорит: «Соизмеримые числа суть те, для которых имеется какое-либо общее число, измеряющее их одновременно. Несоизмеримые — те, которые не имеют общей части и для которых нет никакого числа, измеряющего их одновременно».

Вопрос о критерии соизмеримости и несоизмеримости чисел и об отыскании общей меры решается с помощью алгоритма Евклида [134, т. II, кн. VII, 1, 2].

В арифметических трактатах этому обычно отводится специальный раздел. Так, в «Главе об арифметике дробей» из «Солнечного трактата об арифметике» ан-Найсабури рассматриваются два числа, из которых одно больше другого, и выделяются два случая: 1) одно из чисел является кратным другого, например, 20 и 4; 2) одно не есть кратное другого. Во втором случае «либо найдется третье, отличное от единицы, либо нет. Если найдется, то числа будут соизмеримыми, а если нет, то они несоизмеримы. Пример соизмеримых: двадцать и шесть. Меньшее, будучи отнято от большего три раза, дает в остатке два, что меньше, чем шесть. При этом шесть не измеряет двадцати, а два измеряет. Два измеряет каждое из них. Пример несоизмеримых: одиннадцать и пятьдесят. Меньшее, будучи отнято от большего некоторое число раз, дает в остатке шесть. Если мы отнимем шесть от одиннадцати, останется пять. Далее, если отнять пять от шести, то останется единица. Следовательно, мы знаем, что они несоизмеримы».

§ 4. Совершенные и дружественные числа

В разделе о совершенных числах восточные математики, как правило, выходят за пределы, определенные «Началами» Евклида: помимо совершенных чисел $\sigma(n) = n$, рассматриваются введенные Никомахом избыточные $\sigma(n) > n$ и недостаточные $\sigma(n) < n$ числа. По определению Абу-л-Вафы: «Совершенное (ат-тамм) число — это число, доли которого, будучи сложены, равны ему самому. Избыточное (ал-за'ид) — это число, доли которого, будучи сложены, окажутся больше, чем само число, а недостаточное (ан-накис) — это число, доли которого, будучи сложены, окажутся меньше, чем само число».

В «Ключах наук» говорится [950, стр. 13—14]: «Совершенное число относится к четным числам; сумма его долей равняется его собственному значению, например, у 6 его половина, его треть и его шестая есть 6. Избыточное число относится к четным числам, у него сумма частей больше его собственного значения, как например, у 12 его половина, его треть, его четверть, его шестая и его двенадцатая есть 16. У недостаточного числа сумма частей меньше, чем его собственное значение, например, у 10 его половина, одна пятая и десятая есть 8».

Большой интерес у восточных математиков вызывали дружественные числа. Правило их нахождения впервые дал Сабит ибн Корра, сделав тем самым значительный шаг вперед в развитии средневековой теоретической арифметики. Рукопись его «Трактата о нахождении дружественных чисел легким методом» находится среди других математических трактатов в рукописном томе, переписанном ас-Сиджизи и хранящемся в Парижской Национальной библиотеке (№ 2457, лл. 170 об. — 180 об.). В 1852 г. Ф. Вёпке [1012] опубликовал частичный перевод этого сочинения: он перевел введение и формулировки теорем, но опустил доказательства вспомогательных предложений и правила*.

Во введении Сабит ибн Корра говорит о широком применении учения о числе в философских теориях пифагорейцев и выделяет два вида чисел — совершенные и дружественные — как те, «которые им особенно нужно было находить».

Дружественные числа Сабит ибн Корра определяет как «такие два числа, что если сложить все доли одного из них, эта сумма равна другому числу, которое связано с тем, у которого складывались доли». Он отмечает, далее, что если теория совершенных чисел была разработана греками, то этого нельзя сказать о дружественных числах: «Из этих двух видов, которые мы упомянули, для совершенных чисел Никомах описал метод их нахождений, не дав, однако, доказатель-

* Мы пользовались арабским текстом трактата по микрофильму рукописи, любезно предоставленному в наше распоряжение Б. А. Розенфельдом.

ства. Евклид, напротив, описал метод, который служит для их нахождения, и позаботился дать также доказательство в арифметических книгах своего трактата «Начала». Он поместил эту теорию в конце своих исследований, как наиболее высокую ступень того, что он воздвиг, так что некоторые люди полагают, что эта теория была его наиболее возвышенной целью и последней ступенью его исследований, содержащихся в этих книгах. Что касается дружественных чисел, то я не нашел, чтобы хоть один из двух авторов упомянул о них и обратил на них внимание» (рукопись, л. 171).

Прежде чем изложить правило нахождения двух дружественных чисел, Сабит ибн Корра доказывает ряд предложений (предложения 1—3) и основную теорему теории делимости — о единственности разложения числа на простые сомножители. Евклид [134, IX, 14] доказал эту теорему только для случая, когда простые сомножители входят в первой степени, Сабит ибн Корра рассмотрел общий случай.

В предложении 4 доказано, что если дана последовательность

$$a,\ 2a,\ 4a, \qquad 2^n a,$$

то

$$2^n a-(a+2a+4a+\qquad 2^{n-1} a)=a.$$

Опираясь на этот результат, Сабит ибн Корра доказывает (предложение 5) теорему о способе построения совершенного, избыточного и недостаточного чисел. Пусть имеется последовательность $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$, сумма членов которой $m=2^{n-1}-1$. Пусть p — простое число. Тогда $2^n p$ — совершенное число, если $p=m$, избыточное, если $p<m$, и недостаточное, если $p>m$.

Евклид рассматривал только совершенное число.

В предложении 6 доказывается следующее: если дана последовательность $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$, то число $2^n\ p_1 p_2$, где p_1 и p_2 — простые, будет либо избыточным, либо недостаточным.

В предложениях 7 и 8 Сабит ибн Корра доказывает, что если даны числа $A=a$, $B=2a$, $C=4a$, $D=8a$, то верны тождества

$$C(C+D)(B+C)=C(A+D)D,$$
$$C(B+D+2C)=D(A+D).$$

Используя их, он доказывает (предложение 9), что

$$D(A+D-1)=C\left[D(A+D)-1-\right.$$
$$\left.-(C+D-1)(B+C-1)\right].$$

Наконец, в предложении 10 формулируется и доказывается правило нахождения пары дружественных чисел. Оно состоит в следующем. Рассмотрим последовательность

$$A = 1,\ B = 2, \qquad C = 2^{n-2},\ D = 2^{n-1},$$
$$E = 2^n, \qquad F = 2^{n+1}$$

Пусть

$$A + B + \quad + C + D + E = G,$$
$$G + E = H,$$
$$C - D = \Theta.$$

Выберем числа $A, B, \quad C, D, E$ так, чтобы H и Θ были простыми числами.

Пусть

$$H\Theta = K,\ KE = L,\ F + C = M,\ MF = N,\ N - 1 = X.$$

Ясно, что

$$G = 2^{n+1} - 1,$$
$$H = 2^{n+1} - 1 + 2^n,$$
$$\Theta = 2^{n+1} - 1 - 2^{n-1},$$
$$L = 2^n\left(2^{n+1} - 1 + 2^n\right)\left(2^{n+1} - 1 - 2^{n-1}\right).$$

Выберем числа $A, B, \ldots, C, D, E$ так, чтобы X также было простым числом. Положим $XE = O$, т. е.

$$O = \left[2^{n+1}\left(2^{n+1} + 2^{n-2}\right) - 1\right] 2^n$$

Утверждается, что L и O — дружественные числа.

Доказательство.

1. Согласно предложению 5, число O — недостаточное и недостаток

$$O - \sigma(O) = X - G.$$

Пусть $X - G = P$. Тогда $P + G = X$ и, следовательно,

$$P + G = N - 1,\ P + G + 1 = N,$$
$$P + G + 1 = F(F + C).$$

Но $G + 1 = F$, следовательно, $P = F(G + C)$.

2. Согласно приложению 6, число L — избыточное, так как $K < G(H + \Theta) + G$, и избыток

$$Z = G(H + \Theta) + G - K = \Theta G + H(G - \Theta) + G.$$

Но $G - \Theta = D$, $H = G + E$. Следовательно,

$$Z = GG + ED + G.$$

Так как

$$\frac{C}{D}=\frac{D}{E}=\frac{E}{F},$$

то

$$ED=FC;$$

отсюда

$$Z=GG+FC+G=G\,(G+1)+FC=GF+FC=F\,(G+C).$$

Таким образом,

$$Z=\sigma\,(L)-L=F\,(G+C).$$

3. Обозначим $Q=O-L$.

Тогда

$$Q=E\,(X-K)=E\left[(F+C)\,F-1-(G+E)\,(G-D)\right]=$$

$$=E\left[(F+C)\,F-1-(F-1+E)\,(F-1-D)\right].$$

Но $F-1-D=D+E-1$, следовательно,

$$Q=E\left[F(F+C)-1-(E+F-1)\,(D+E-1)\right].$$

Так как $\frac{C}{D}=\frac{D}{E}=\frac{E}{F}=\frac{1}{2}$, то на основании предложения 9

$$Q=F\,(F+C-1)=F\,(G+C).$$

4. Таким образом, получено

$$P=Z=Q=F\,(G+C);$$

отсюда

$$O-\sigma\,(O)=O-L,$$

$$\sigma\,(L)-L=O-L;$$

тогда

$$L=\sigma\,(O),\ \ O=\sigma\,(L).$$

Следовательно, L и O — дружественные числа.

Правило Сабита ибн Корры для нахождения двух дружественных чисел впоследствии в несколько иной форме без доказательства привел Джамшид Гияс ад-Дин ал-Каши в „Ключе арифметики“ [178, стр. 212—214]: числа $2^n p_1 p_2$ и $2^n\left(p_1 p_2+p_1+p_2\right)$, где $p_1=2^n\cdot\frac{3}{2}-1$ и $p_2=2^n\ 3-1$ — простые числа, являются дружественными. Он дал также два примера дружественных чисел: 220, 284 и 2024, 2296, соответствующих $n=2$ и $n=3$.

§ 5. Фигурные числа

В разделе о фигурных числах восточные математики вслед за Никомахом рассматривают различные виды плоских и телесных чисел. Так, в «Ключах наук» Абу Абд-Аллах ал-Хорезми так определяет плоские фигурные числа: «К ним относятся треугольные числа, например, 1, 3, 6, 10; они получаются из сложения натуральных чисел. Квадратные числа, например, 1, 4, 9. Они получаются от сложения треугольных чисел, и два последовательных треугольных числа дают в сумме квадратное число. Они получаются, далее, от сложения нечетных натуральных чисел, тех, из которых каждое превышает предшествующее на 2. Пятиугольные числа, например, 1, 5, 12, получаются из всех чисел, которые отличаются друг от друга в натуральном ряду на 3. Шестиугольные числа получаются из тех, которые отличаются друг от друга на 4. По тому же принципу строятся и другие числа, соответствующие плоскостям, когда от числа из сторон отнимается 2» [950, стр. 16].

К плоским числам относятся также так называемые прямоугольные числа вида $n(n+1)$ и продолговатые вида $n(n+m)$, где $m>1$.

Среди телесных чисел рассматривались не только кубические, как у Евклида, но и «кирпичеобразные» числа вида n^2m, где $m<n$, «балкообразные» вида $n^2(n+m)$, где $m>1$, «круговые» числа (обладающие тем свойством, что каждое из их «измерений» оканчивается на одну и ту же цифру, например, 5^3 и 6^3) и др. По аналогии с многоугольными вводились пространственные «пирамидальные» числа. В «Ключах наук» они определяются следующим образом: «1) кеглеобразные* числа — они называются также хвостатыми (ал-музаннаб) — возникают из плоских чисел, когда одно наслаивается на другое. Сюда относятся числа с треугольным основанием: 1, 4, 10, 20; они получаются посредством соединения треугольных чисел. Далее, сюда относятся числа с квадратным основанием: 1, 5, 14, 30; они получаются посредством соединения квадратных чисел. По этому принципу получают и другие, относящиеся сюда числа; 2) усеченные от этих кеглеобразных чисел суть числа, которые, будучи получены из плоских чисел путем их наслоения, не начинаются с единицы; 3) числа, соответствующие телам с параллельными и равными между собой сторонами. Сюда относятся треугольные числа такого рода: 1, 6, 18, 40; квадратные:

* Или конические числа.

1, 8, 27, 65; пятиугольные числа: 1, 10, 36, 48. Телесные треугольные числа выводятся из плоских треугольных чисел, так как 6 есть удвоение 3, 18 — утроенное от 6, а 40 — учетверенное от 10. Таким же образом обстоит дело и с другими телесными числами» [950, стр. 17].

Ал-Бируни фигурным числам дает индийские названия: треугольные числа он называет «санкалита» (сложение), а пирамидальные — «санкалита санкалита» (сложение сложений).

Теорией фигурных чисел завершается раздел теоретической арифметики о так называемом «отдельном количестве», в котором числа рассматриваются «сами по себе».

§ 6. Учение о „зависимом количестве". Числовые отношения и пропорции

«Зависимое количество» — это то, что «происходит, когда числа находятся в отношении друг к другу». Согласно Абу-л-Вафе, отношение — это «сопоставление одного числа другому». В «Ключах наук» дано более подробное определение: «Отношение состоит в том, что мы относим одно число к другому, сказав, что оно есть его половина, его треть, его удвоение и тому подобное» [950, стр. 18].

Отношение, взаимозависимость двух количеств может быть, по Никомаху, двояким: отношением равенства и отношением неравенства.

«Отношение равенства, — говорит Абу-л-Вафа, — имеет место, когда числу сопоставляют то же самое число». В «Ключах наук» это определение сопровождается числовыми примерами (5 и 5, 10 и 10) и отмечается, что этот вид не подразделяется на подвиды [950, стр. 14].

Отношение неравенства «имеет место, когда к числу относят число, отличное от него», и распадается на неравенства «большее» и «меньшее». «Большее» имеет место, когда к числу относят число, меньшее, чем оно, а «меньшее» — в противном случае».

«Большее» неравенство имеет пять подвидов, которые Абу-л-Вафа определяет следующим образом (числовые примеры взяты из «Ключей наук»):

1) кратное получается, когда к числу относят число, причем то, к которому относят, больше отнесенного к нему, и отнесенное является его частью (4 есть кратное 2, а 6 — кратное 3);

2) превышающее на долю получается, когда к числу относят число так, что то, к которому относят, больше отне-

сенного к нему на долю последнего (3 по отношению к 2; оно превосходит 2 на половину 2);

3) превышающее на доли получается, когда к числу относят число так, что то, к которому относят, превышает то, которое отнесено к нему, на «доли» последнего» (5 по отношению к 3; оно превышает 3 на $\frac{2}{3}$ от 3);

5) кратное, превышающее на доли, получается, когда к числу относят число так, что то, к которому относят, превышает кратное того, которое отнесено к нему, на долю последнего (7 по отношению к 3; оно содержит кратное 3 и $\frac{1}{3}$ этого числа);

5) кратное, превышающее на доли, получается, когда к числу относят число так, что то, к которому относят, превышает кратное того, которое отнесено к нему, на «доли» последнего (8 по отношению к 3; оно содержит кратное 3 и еще $\frac{2}{3}$ от 3).

Таким образом, рассмотрены следующие зависимости между числами:

$$A = kB,\ A = B + \frac{B}{n},\ A = B + \frac{m}{n}B,$$

$$A = kB + \frac{B}{n},\ A = kB + \frac{m}{n}B.$$

Аналогичным образом подразделяется и «меньшее» неравенство. В «Ключах наук», а особенно в трудах Ибн Сины [11, стр. 270—272] можно заметить, как происходит сближение понятия отношения с дробью. Так, Ибн Сина, рассматривая «меньшее» (недостаточное) отношение, говорит: «Иногда его называют по названию кратного, например, треть, четверть, или одна двенадцатая. Иногда его называют с помощью двух отношений, например, половина одной шестой и одна пятая одной десятой» [11, стр. 271].

Новым, по сравнению с теориями Евклида и Никомаха, в учении средневековых восточных математиков о числовом отношении является теория составных отношений, которая сыграла чрезвычайно важную роль в процессе создания понятия положительного действительного числа (см. главу VII). В этой теории фактически обосновывались правила умножения отношений, что полностью противоречит духу математики классической древности, где умножение применялось только к целым числам.

Сабит ибн Корра в «Книге о составлении отношений» [292, 293] рассматривает числовые отношения как частный вид отношений величин: «В определение, которым Евклид определил отношения, не входят отношения чисел, так как он образовывал эти отношения из величин, а название «величина» у него не относилось к числам. Евклид относил одну из двух величин к другой путем измерения, а числа не обладали измерением... Мы хотим изложить здесь отношения величин таким образом, чтобы все, относящееся ко всем величинам, выполнялось в виде примеров на числах. Я хочу подчеркнуть это. Поэтому величина у нас понимается или как величина в старом смысле слова или как число». Исходя из этого, Сабит ибн Корра строит теорию составных отношений общую для чисел и величин (см. главу VII).

Составлению числовых отношений Ибн Сина отводит специальный раздел „Книги знания" [11, стр. 272—276]. Составное отношение определяется у него следующим образом: „Если имеются отношения A к B и B к C, то отношение A к C составлено из этих двух отношений; если отношение A к B равно отношению C к D, а отношение B к C равно отношению E к K, то отношение A к C составлено из отношения C к D и отношения E к K" На ряде числовых примеров Ибн Сина показывает свойства составных отношений. Первое из них состоит в следующем: пусть даны изображающиеся отрезками числа $AB=4$, $AC=2$, $AD=3$, тогда отношение AB к AD есть отношение, превышающее на треть, т. е. $\frac{AB}{AD}=\left(1+\frac{1}{3}\right):1$; отношение AD к AC — отношение, превышающее на половину, т. е. $\frac{AD}{AC}=\left(1+\frac{1}{2}\right):1$, а отношение AB к AC — двукратное отношение, т. е.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AD}\times\frac{AD}{AC}=\left[\left(1+\frac{1}{3}\right):1\right]\times\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\ 1\right]=2\ \ 1.$$

Верно и обратное: всякое двукратное отношение можно разложить на отношение, превышающее на треть, и на отношение, превышающее на половину, т. е.

$$2:1=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\ 1\right]\times\left[\left(1+\frac{1}{3}\right):1\right]$$

Таким же образом Ибн Сина рассуждает и далее: «При составлении двукратного отношения и отношения, превышающего на половину, получается трехкратное отношение»; «Если отношение AC к AB является отношением, превышающим на половину, а отношение AD к AC является отношением, превышающим на треть, то отношение AD к AB является двукратным»; «Если отношение AC к AB является отношением, превышающим на треть, а отношение BD к BC является отношением, превышающим на половину, то отношение AD к AB является отношением, превышающим на половину» и т. д.

Ибн ал-Хайсам, продолживший разработку теории составных отношений, дает примеры составления более чем двух числовых отношений: «Если мы имеем четыре величины и отношение первой ко второй — двукратное отношение, отношение второй к третьей — отношение одной пятой, отношение третьей к четвертой — трехкратное отношение, тогда первая — двукратная одной пятой трехкратной четвертой; но одна пятая трехкратной — три пятых, поэтому первая — двукратная трех пятых четвертой. Но двукратная трех пятых превышает величину на ее одну пятую. Следовательно, первая превышает четвертую на ее одну пятую. Таким образом, отношение, превышающее на одну пятую, составлено из двукратного отношения, из отношения одной пятой и из трехкратного отношения» [203, стр. 86], т. е.

$$\left(1+\frac{1}{5}\right):1=\frac{2}{1}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{1}.$$

Пропорция, в частности числовая, определялась как равенство двух отношений. Существенным моментом теоретической арифметики была классификация числовых пропорций, которая приводится в трактате Абу-л-Вафы, в «Ключах наук» Абу Абд-Аллаха ал-Хорезми, в «Книге знания» Ибн Сины и др. Эта классификация, отсутствующая у Евклида и приписываемая Эратосфену [82, стр. 318—322], воспроизводится затем Никомахом и другими учеными более позднего времени. Помимо трех, известных еще Пифагору, Платону и Аристотелю, пропорций — арифметической:

$$a-b=b-c,$$

геометрической

$$a:b=b:c$$

и гармонической

$$(a-b):(b-c)=a:c,$$

вводятся следующие семь пропорций:

$$(a-b)\quad(b-c)=c-a,$$
$$(a-b)\quad(b-c)=c\quad b,$$
$$(a-b)\quad(b-c)=b\quad a,$$
$$(a-c)\quad(a-b)=b\quad c,$$

§ 7. Другие вопросы теоретической арифметики

С задачами теоретической арифметики была тесно связана задача суммирования числовых рядов [382, 383]. Если греки умели находить сумму последовательных натуральных чисел, их квадратов и кубов, то восточные математики ввели формулу для суммирования четвертых степеней. Наряду с другими результатами она дается Ибн ал-Хайсамом в трактате «Об измерении параболического тела» [624, 875]. Приведем (в современных обозначениях) некоторые формулы Ибн ал-Хайсама:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{n}{3}\right)n\right]\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{4}\right)n\right](n+1)\,n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\left\{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{n}{5}\right)n\right]\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}\times\left[\Big((n+1)\Big)n-\frac{1}{3}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2+\frac{n}{3}=\frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right]2n$$

и др. С помощью этих формул, как показал недавно А. П. Юшкевич [385, 624], Ибн ал-Хайсам проводит вычисление, равносильное вычислению определенного интеграла

$$\int_0^a \sqrt{x}\,dx.$$

Формулы для суммы натуральных квадратов и кубов предложил ал-Караджи [1013]. Суммируя квадраты, он дает (словесно) выражение

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=(1+2+\qquad+n)\left(\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}\right),$$

но сообщает, что доказать его правильность не может. Для суммы кубов

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \quad + n)^2$$

он проводит доказательство с помощью остроумного геометрического метода.

В несколько иной форме, чем Ибн ал-Хайсам, правило суммирования четвертых степеней дал ал-Каши в «Ключе арифметики»: «Если мы хотим сложить квадрато-квадраты последовательных чисел от единицы, вычтем единицу от суммы этих чисел, возьмем одну пятую остатка и прибавим ее к сумме этих чисел, а то, что получится, умножим на сумму квадратов этих чисел» [178, стр. 205], т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \left[\frac{(1 + 2 + \quad + n) - 1}{5} + \right.$$

$$\left. + (1 + 2 + \quad n)\right](1^2 + 2^2 + \quad + n^2).$$

Формулы для суммы натуральных чисел, их квадратов и кубов приводятся и в арифметическом трактате ал-Хассара [854], но общие правила отсутствуют.

Мы рассмотрели лишь основные вопросы средневековой теоретической арифметики, не останавливаясь на задачах, связанных с составлением так называемых «магических квадратов» (т. е. нахождением таких целых чисел, что если их расположить по клеткам квадратной таблицы, то суммы чисел по строкам, столбцам и диагоналям будут равны). Эти задачи пользовались в свое время большой популярностью [83, 396, 397], в чем можно убедиться не только по высказываниям восточных авторов, но и при просмотре рукописей математического (а часто и нематематического) содержания: многие страницы в них испещрены изображениями магических квадратов и других магических фигур. Широкое распространение их объясняется тем, что им придавалось (как и позже в Европе) мистическое значение.

Пользу теоретической арифметики ученые средневекового Востока видели прежде всего в тех ее результатах, которые находили применение в прикладных разделах арифметики. К рассмотрению практической арифметики этого периода мы и переходим.

Глава IV. ПРАКТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА

§ 1. Вводные замечания

Вторым разделом учения о числе, согласно классификации ал-Фараби, является практическая арифметика. Вклад ученых Ближнего и Среднего Востока в ее развитие чрезвычайно велик. Благодаря им распространилась возникшая в Индии позиционная десятичная система счисления с применением нуля, которая обеспечила быстрый прогресс в области вычислительной математики. Они усовершенствовали также шестидесятиричную позиционную систему счисления и превратили ее в абсолютную систему для целых и дробных чисел, открыли десятичные дроби, разработали приемы извлечения корней, применили формулы бинома Ньютона для любого натурального показателя и т. д. [375, 383, 384, 690].

Совершенствованием методов счета занимались почти все выдающиеся математики восточного средневековья: Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми, Абу-л-Вафа ал-Бузджани, Абу Райхан ал-Бируни, Кушьяр ибн Лаббан ал-Джили, Абу Бакр Мухаммад ибн ал-Хасан ал-Караджи, Абу-л-Хасан Али ибн Ахмад ан-Насави, Омар Хайям, Насир ад-Дин ат-Туси, Джамшид Гияс ад-Дин ал-Каши и многие другие (см. гл. II, (3)). О практической арифметике написаны многочисленные трактаты, часть которых сохранилась до нашего времени, часть же либо погибла, либо до сих пор не обнаружена. О содержании многих из них можно составить некоторое представление по названиям, упоминающимся в других сочинениях и в средневековых списках трудов различных ученых [450, 627, 774, 853]. К их числу относятся арифметические трактаты Абу-л-Вафы [691, стр. 218], ал-Бируни [880] и Омара Хайяма [339, стр. 14—75].

Практическая арифметика, по сравнению с другими разделами восточной средневековой математики, наиболее изучена благодаря работам Ф. Вёпке [1013, 1021, 1022, 1025], Г. Зутера [854, 865, 868], Э. Видемана [936, 950, 955, 993] и исследованиям последних десятилетий (П. Люкей [690—692], А. П. Юшкевич [272, 276, 376, 378, 380, 383, 384, 621, 623, 625], Б. А. Розенфельд [272, 273, 276, 287, 289, 380, 383, 621], М. И. Медовой [232—235], С. А. Ахмедов [13, 15], Г Собиров [310—313] и др.).

Чтобы дать общую характеристику состояния практической арифметики рассматриваемого периода, остановимся на некоторых основных моментах.

§ 2. Сочинения по практической арифметике

Ал-Хорезми «Об индийском счете»

Среди первых средневековых сочинений по практической арифметике наибольшее влияние на развитие науки оказал трактат великого среднеазиатского ученого Махаммада ибн Мусы «Об индийском счете». Это произведение сыграло важнейшую роль в распространении позиционной десятичной системы счисления с применением нуля, которая быстро завоевала популярность среди математиков благодаря преимуществам перед другими системами нумерации [34]. Трактат ал-Хорезми положил начало применению этой системы не только на Ближнем и Среднем Востоке, но и в Европе: латинский перевод его был, начиная с XII в., основным сочинением по практической арифметике.

Арифметику чисел, записанных в позиционной десятичной системе, называли «индийской арифметикой» или «индийским счетом» (хиса̄б ал-хинд). Арифметические операции производились обычно (до XIV в.) при помощи счетной доски, покрытой песком или пылью, причем в процессе вычисления промежуточные результаты стирались; поэтому иногда «индийскую арифметику» называли также «счетом с помощью доски и пыли». Характеризуя этот счет, ал-Ансари пишет в своей энциклопедии: «Счет с помощью доски и пыли учит методам вычислений посредством девяти знаков... Эти девять знаков приписываются индийцам. Польза их состоит в облегчении и ускорении вычислительных операций, прежде всего астрономических» [950, стр. 33]. Позднее (например, у ал-Каши) вычисления производились уже на бумаге.

До последнего времени арифметический трактат ал-Хорезми, в противоположность его сочинениям по алгебре и астрономии, не привлекал должного внимания ученых и нередко получал незаслуженно низкую оценку. Это объясняется прежде всего тем, что исследователи не располагают арабским текстом (сейчас утерян). Трактат известен только в латинском переводе (очевидно, Аделарда из Бата), опубликованном в 1857 г. Б. Бонкомпаньи [440, I] по единственной, имеющей многие недостатки рукописи, которая хранится в Кембридже. Русский перевод трактата ал-Хорезми, выполненный по фотокопии кембриджской рукописи, издан в 1964 г. [349 стр. 9—24].

В результате основательного исследования трактата „Об индийском счете" А. П. Юшкевич [376, 623] выяснил истинную роль этого сочинения в истории математики. Чтобы заполнить лакуны в указанной рукописи, он изучил два латинских средневековых сочинения, по содержанию близких к ней. Одно из них называется „Liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam a magistro A. compositus" (приписывается Аделарду из Бата) и известно в двух рукописях: первая написана в 1143 г., хранится в Вене, частично была опубликована А. Наглем [711]; вторая, несколько более поздняя, находится в Мюнхене, опубликована частично в 1898 г. М. Курце [493]. Второе сочинение (автор — ученый XII в. Иоанн Севильский) начинается словами: „Incipt prologus in libro algoarismi de practica arismetrice. Qui editus est a magistro Johanne yspalensi" Оно было опубликовано Б. Бонкомпаньи вместе с латинским текстом трактата ал-Хорезми [440, II].

В первом разделе сочинения ал-Хорезми подробно разъясняется принцип записи чисел с помощью девяти знаков, принимающих значение в зависимости от того, в каком разряде они находятся. Пустой разряд изображается «маленьким кружочком, наподобие о» [349, стр. 10]; в другом месте [349, стр. 13] говорится о «кружке, который есть ничто». Позднее вместо кружка для обозначения пустого разряда стали применять точку.

В последующих разделах излагаются правила вычислений с помощью индийских цифр. Помимо действия сложения, вычитания, умножения и деления чисел, рассматриваются действия «удвоения» и «раздвоения», которые вводились, очевидно, для облегчения процедуры извлечения квадратного корня [384, стр. 181]. Вероятнее всего, эти действия заимствованы из египетской арифметики. Впоследствии они приводились и в средневековых европейских учебниках.

В специальных разделах описывались действия с дробями и извлечение квадратного корня. Раздел об извлечении корня не сохранился в тексте латинского перевода, но имеется в трактате Иоанна Севильского.

Сочинение ал-Хорезми на долгое время предопределило форму написания арифметических трактатов, схема построения которых стала в значительной мере традиционной и воспроизводилась многими средневековыми восточными и европейскими математиками. По этому образцу составлены, в частности, трактаты ан-Насави, Насир ад-Дина ат-Туси, ал-Каши, ал-Кушчи.

Однако сочинения, написанные в традиции ал-Хорезми, образуют лишь одну группу арифметических трактатов, распространенных на средневековом Востоке. Ко второй группе относятся сочинения, в которых излагались методы нумерации и вычислений, вошедшие в обиход в арабоязычных странах задолго до проникновения сюда индийской арифметики. Числа и выкладки в этих трактатах записывались не с помощью «индийских знаков», как у ал-Хорезми, а словами. Специфика староарабских вычислительных методов особенно проявилась в учении о дробях (см. ниже). К этой группе сочинений относятся арифметические трактаты Абу-л-Вафы, Абу Бакра ал-Караджи, а также западноарабских математиков ал-Хассара и ал-Каласади.

Наличие двух указанных групп сочинений породило среди историков математики предположение о существовании на средневековом Востоке двух враждовавших между собой математических школ — греческой и индийской [461, т. I, стр. 763—5; 350, стр. 203]. Но более подробное изучение сочинений ан-Насави, Абу-л-Вафы и ал-Караджи [234, 235; 384, стр. 221] позволило сделать вывод о необоснованности такого предположения. Это подтверждается прежде всего тем, что в тех и в других сочинениях легко обнаруживается как индийское, так и греческое влияние, а также указанием ал-Караджи—самого яркого представителя «греческого» направления—на то, что он написал трактат об «индийском счете», очевидно, теперь утерянный [681]. Вероятнее всего, индийская арифметика далеко не сразу стала достоянием широких масс вычислителей и вытеснила традиционные способы счета; поэтому в сочинениях, предназначенных для практиков, встречаются староарабские арифметические методы [233—235].

Абу-л-Вафа «О том, что нужно знать из арифметики писцам, деловым людям и прочим лицам»

Сочинение «О том, что нужно знать из арифметики писцам, деловым людям и прочим лицам» (кита̄б фӣ ма̄ йаҳтадж илайхи ал-кутта̄б ва ал-ʻуммал минʻилм ал-хиса̄б) представляет собой, насколько можно судить по имеющимся сейчас данным, наиболее ранний образец изложения староарабских вычислительных методов. Уже из названия ясно, что оно предназначалось для обучения способам счета, выработанным и применявшимся в практике повседневной жизни.

Впервые трактат Абу-л-Вафы описан Ф. Вёпке, который дал перевод оглавления и отметил, что сочинение заслуживает подробного исследования [1016, стр. 246—250]. Затем его рассматривал П. Люкей [692], но основательный анализ произвел лишь недавно М. И. Медовой [232—235]; изучив две дополняющие друг друга рукописи — одна из них хранится в Лейдене (Cod. or., 103), а другая — в Египетской национальной библиотеке в Каире (№ 8681) — он сделал подробный обзор первого, теоретического, раздела трактата. На примере трактата Абу-л-Вафы М. И. Медовой рассмотрел вопрос о характере староарабских вычислительных методов и о связи их с методами введенной в странах ислама в IX в. индийской арифметики.

Сочинение разбито на семь «ступеней», каждая из которых подразделяется на семь глав. Теоретическую часть составляют первые три «ступени»; в остальных речь идет о решении различных прикладных задач. Цель автора — дать практическое руководство для вычислителей — определила и форму написания трактата: формулируются только правила, сопровождающиеся примерами; какие бы то ни было доказательства отсутствуют.

Помимо теории дробей (см. § 3), в трактате Абу-л-Вафы внимание М. И. Медового привлек интересный пример использования отрицательных чисел — первый пример такого рода в арабоязычной математической литературе, известный в настоящее время [232]. Для отрицательного числа Абу-л-Вафа применяет термин «долг» (дайн), как это делалось в индийской математике [384, стр. 139—140]. Излагая частный случай

$$ab = (10 - a)(10 - b) + [b - (10 - a)] \cdot 10$$

правила сокращенного умножения, встречающегося впоследствии в арифметических трактатах ал-Кушчи и Беха ад-Дина Амили, он пишет: «Если хотим умножить три на пять, вычтем избыток десяти над одним из этих чисел из другого, получится долг два. Возьмем каждую единицу за десять, а затем умножим избыток десяти над пятью на избыток десяти над тремя, получится тридцать пять. Когда вычтем из них долг, т. е. двадцать, получится в остатке пятнадцать, и это — результат умножения пяти на три» [232, стр. 596].

Специальные термины для обозначения положительного и отрицательного чисел встречаются один раз и в арифметическом сочинении ал-Кушчи (см. ниже), который назвал их, соответственно, «правильным» (мусбат) и «ложным» (манфӣ) [314].

Кушьяр ибн Лаббан ал-Джили «О началах индийской арифметики»

В трактате «О началах индийской арифметики» (фӣ‘усӯл хисāб ал-хинд) впервые встречается описание чистой шестидесятиричной системы счисления (см. ниже), разработка которой составляет одну из важных заслуг математиков Ближнего и Среднего Востока. Это сочинение рассмотрел П. Люкей [690]. По его мнению, здесь мы имеем дело не с открытием, хотя до сих пор не известны более ранние примеры описания этой системы, а с переработкой другого произведения. По-видимому, таким произведением был утерянный сейчас трактат Абу-л-Вафы «О вычислении с шестидесятиричными таблицами».

Английский перевод трактата Ибн Лаббана по имеющейся арабской рукописи (Стамбул, Ая София, № 4857, лл. 267в—282в) и по средневековому еврейскому переводу вместе с арабским текстом опубликовали в 1965 г. М. Леви и М. Петрук [674а, 680].

В первой части трактата ал-Джили рассматриваются арифметические действия с обычными десятичными числами, во второй — с числами, записанными в чистой шестидесятиричной системе. Приводятся соответствующая таблица умножения и таблицы для определения поместного значения произведений и частных. Подробно разбирается извлечение корней в шестидесятиричной системе.

Ал-Караджи «Достаточная книга об арифметике»

Сочинение «Достаточная книга об арифметике» (ал-кафӣ фӣ-л-хисāб) написано в том же стиле, что и арифметическое руководство Абу-л-Вафы: Ал-Караджи также не применяет индийской нумерации и выражает числа словами.

Трактат имеется в немецком переводе, который опубликовал в 1831 г. А. Хохгейм [384, стр. 217—218; 599]. Обзор его содержания и сравнение с трактатом Абу-л-Вафы произвели Р. Люкей [692] и М. И. Медовой [234, стр. 320—323], выявившие большое сходство между этими сочинениями: и там, и здесь дается словесная запись чисел, отсутствует описание действий удвоения и раздвоения, а главное — основное внимание уделяется учению о дробях в его традиционной староарабской форме; построены трактаты по единому плану и примеры решаются сходными методами.

Ан-Насави «Достаточное об индийской арифметике»

Два века спустя после ал-Хорезми появился трактат Абу-л-Хасана Али ибн Ахмада ан-Насави «Достаточное об индийской арифметике» (ал-мукнӣ фӣ-л-хисāб ал-хинд), выдержанный в традиции трактата Ал-Хорезми и досконально изученный в настоящее время.

Первоначально трактат был написан на персидском языке, а затем (очевидно, самим автором) переведен на арабский; он известен сейчас в арабской рукописи, хранящейся в Лейдене (№ 5566, лл. 68—79). Ф. Вёпке перевел названия глав и часть предисловия, а также разъяснил ряд применявшихся автором специальных терминов [1022]. Более подробно исследовал этот трактат Г Зутер, обративший особое внимание на приемы извлечения квадратных и кубических корней [865]. Недавно опубликован полный русский перевод трактата, выполненный М. И. Медовым, с предисловием переводчика и примечаниями переводчика и Б. А. Розенфельда [240]; это издание позволяет правильно оценить значение труда ан-Насави и сделать некоторые выводы о ходе развития математики на средневековом Востоке (в частности, о характере староарабской арифметики дробей и о процессе внедрения индийской системы нумерации).

В предисловии ан-Насави приводит имена своих предшественников — авторов арифметических руководств, — которых подвергает критике, и указывает, что при написании трактата он строго придерживался предмета и избегал «скучных длиннот и недостаточной краткости». О цели своего сочинения он пишет: «Я расположил материал так, чтобы он был полезен людям в различных практических вопросах и в астрономии» [240, стр. 383].

Сочинение состоит из четырех книг: 1) о действиях с целыми числами, 2) о действиях с дробями, 3) о смешанных дробях («О целых с дробями»), 4) о шестидесятиричных дробях («О градусах и минутах»).

Как ал-Хорезми и Кушьяр ибн Лаббан, ан-Насави сначала разъясняет индийский способ изображения чисел, а затем излагает правила сложения, удвоения, вычитания, раздвоения, умножения, деления.

Особый интерес представляет небольшой по объему раздел об извлечении квадратных и кубических корней. Краткость его Зутер [865] объясняет практическими соображениями, а именно тем, что финансовая служба того времени лишь изредка сталкивалась с этими арифметическими действиями. Метод, использованный ан-Насави, сейчас называется «схемой Руффини-Горнера» (см. ниже).

Насир ад-Дин ат-Туси «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли»

Сочинение «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли» (джāми‘ ал-хисāб би-л-тахт ва-л-тураб), упоминающееся в энциклопедии ал-Ансари [950, стр. 33] в числе крупных сочинений на данную тему, известно в настоящее время в нескольких рукописях. Одна из них, хранящаяся в Институте востоковедения АН УзССР в Ташкенте (№ 8990/6, лл. 123—158 об.), исследована С. А. Ахмедовым [13].

Раздел трактата об извлечении корня и формуле бинома был опубликован в русском переводе, выполненном С. А. Ахмедовым и Б. А. Розенфельдом [329]. Сочинение состоит из трех глав: «Об арифметике целых чисел», «Об арифметике дробей по способу вычислителей», «Об арифметике дробей по способу астрономов», т. е. по построению сходно с трактатами ал-Хорезми и ан-Насави. Однако существенное различие состоит в том, что ат-Туси подробно излагает правило извлечения корня любой степени, тогда как ан-Насави ограничивается только квадратным и кубическим корнями.

Ат-Туси формулирует также правило разложения двучлена $(a+b)^n$ (где n — натуральное число), называемое сейчас правилом «бинома Ньютона», и приводит таблицу биномиальных коэффициентов, которые он называет «элементами показателя степени». Трактат ат-Туси является первым известным сочинением, где применяются эти правила. Имеется обоснованное предположение [691, стр. 244—254; 290, стр. 28—31], что они заимствованы из арифметического трактата Омара Хайяма. Этот трактат пока не обнаружен, но упоминается самим Хайямом в его алгебраическом сочинении: «У индийцев имеются методы нахождения сторон квадратов и ребер кубов, основанные на небольшом последовательном подборе и на знании квадратов девяти цифр, т. е. квадрата одного, двух, трех и т. д., а также произведений одной из них на другую, т. е. произведения двух на три и т. д. Нам принадлежит трактат о доказательстве правильности этих методов и того, что они действительно приводят к цели. Кроме того, мы увеличили число видов, т. е. мы показали, как определять основания квадрато-квадратов, квадрато-кубов, кубо-кубов и так далее сколько угодно, чего раньше не было» [339, стр. 74—75].

Возможно также, что многое в этом отношении было сделано еще раньше Абу-л-Вафой в утерянном сочинении об извлечении корней третьих, четвертых и седьмых степеней [690].

Джамшид Гияс ад-Дин ал-Каши «Ключ арифметики»

Замечательный энциклопедический труд «Ключ арифметики» (мифта̄х̣ ал-х̣иса̄б), написанный в 1427 г., стал широко известен недавно благодаря работам П. Люкея [691—692], который при исследовании арифметического раздела этого трактата особое внимание обратил на применяемые ал-Каши методы извлечения корня с произвольным натуральным показателем и на теорему о биноме, а также перевел некоторые отрывки. Большое значение для изучения сочинения ал-Каши имел перевод его на русский язык, осуществленный Б. А. Розенфельдом (под редакцией В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича) и снабженный комментариями Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича [178].

Арифметическая часть трактата (другие разделы касаются вопросов практической геометрии и алгебры) состоит из трех книг: в первой рассматривается арифметика целых чисел, во второй — арифметика дробей, а в третьей книге — «способ исчисления астрономов», т. е. шестидесятиричная система счисления.

Во введении, названном «Об определении арифметики, о числе и о его видах», ал-Каши пишет: «Арифметика — это наука о правилах нахождения числовых неизвестных с помощью соответствующих им известных. Предмет арифметики есть число, т. е. то, что происходит при счете и охватывает как единицу, так и то, что состоит из единиц. Число, если рассматривать самостоятельное количество, т. е. не отнесенное к какому-либо количеству, называется целым, как, например, единица, два, десять, пятнадцать, сто; если же рассматривать количество, отнесенное к другому количеству, то оно называется дробью, а то, к чему оно отнесено, называется знаменателем, таковы, например, единица из двух, называемая половиной, три из пяти, т. е. три пятых единицы» [178, стр. 13].

Таким образом, у ал-Каши понятия «самостоятельного» («отдельного») и «зависимого» количеств, заимствованные из теоретической арифметики (см. выше), становятся понятиями практической арифметики, соответствующими целому числу и дроби.

Десятичные дроби [178, книга 3], введенные в VI главе сочинения, по словам ал-Каши, являются его открытием. Здесь даются правила преобразования целых и дробных чисел, записанных в шестидесятиричной системе, в целые десятичные числа и десятичные дроби и обратно, а также производятся вычисления с десятичными дробями.

Ал-Каши первый теоретически обосновал исчисление десятичных дробей и практически оперировал ими. Известно, что идея о десятичных дробях была высказана несколько раньше ал-Каши в Европе Бонфисом из Тараскона [561], однако ал-Каши пришел к ней независимо и построил теорию, от чего европейский автор был далек.

В «Ключе арифметики» подробно излагаются правило извлечения корней с любым показателем и правило «бинома Ньютона». Отличительная особенность трактата состоит в том, что в нем ал-Каши, в противоположность своим предшественникам, производит арифметические операции не на счетной доске, покрытой пылью, а на бумаге.

Арифметические трактаты Ала ад-Дина ал-Кушчи

Ал-Кушчи — одному из видных представителей школы Улугбека — принадлежит ряд сочинений по арифметике («Трактат по арифметике», «Трактат о дробях», «Трактат ал-Мухаммадия»). Г Собиров установил [310, 311, 313, 314], что эти трактаты играли заметную роль в преподавании математики в странах Среднего и Ближнего Востока в XVI—XVII вв. В изложении арифметики ал-Кушчи следует своим предшественникам, главным образом ал-Каши, используя, например, введенные им десятичные дроби. Имеются следы и более раннего влияния: так, ал-Кушчи дает правило сокращенного умножения, сформулированное Абу-л-Вафой.

Другие арифметические сочинения

Перечисленные выше трактаты по практической арифметике составляют лишь незначительную часть сочинений такого рода, пользовавшихся популярностью на средневековом Востоке; из рукописей, сохранившихся до настоящего времени, еще не все изучены.

К сочинениям, сыгравшим большую роль в развитии арифметики, следует отнести исследованный и частично переведенный на немецкий язык Г. Зутером трактат западноарабского математика XII в. Абу Закарии Мухаммада ибн Абд-Аллаха ал-Хассара (см. гл. II, § 3, п. 43) [852, 854]. Трактат состоит из двух глав, в одной из которых даются операции с целыми числами, а во второй — операции с дробями. Здесь мы снова встречаемся со староарабской арифметикой дробей, основанной на представлении обыкновенной дроби в виде суммы или произведения долей единицы.

К известным арифметическим сочинениям принадлежит также «Краткое изложение арифметических действий» (талхӣс фӣ а'мал ал-хиса̄б) западноарабского ученого XIII в. Ибн ал-Банны (см. гл. II, § 3, п. 52). Этот трактат, переведенный на французский язык А. Марром [696], возможно, является изложением сочинения ал-Хассара [854, стр. 197]. Он состоит из трех разделов: о целых числах, о дробях и о корнях. Особый интерес представляет последний раздел, где, помимо правил приближенного извлечения квадратного корня из числа, даются правила сложения, вычитания, умножения и деления корней. Обычно они включались в разделы, касающиеся алгебры; Ибн ал-Банна рассматривает их как арифметические правила.

Сочинение Ибн ал-Банны комментировали многие ученые. Комментарий Абу-л-Хасана Али ибн Мухаммада ал-Каласади (см. гл. II, § 3, п. 65) замечателен тем, что в нем имеются примеры развитой алгебраической символики (см. гл. V); этот комментарий переведен на французский язык Ф. Вёпке [1018].

Имеются сведения об арифметическом трактате Хасана ибн ал-Хусайна ал-Марвази, написанном в 1216 г. [747, 748]. В нем дана формула приближенного извлечения квадратного и кубического корней.

Недавно обнаружено и исследовано [16, 17] сочинение Махмуда ибн ал-Вусуди «Сердцевина счета» (луба̄б ал-хиса̄б), написанное в 1228 г.

Заслуживает внимания популярный в свое время «Солнечный трактат об арифметике» ан-Найсабури; до нас дошли его многочисленные рукописи [223, 231, 316].

Следует упомянуть также «Трактат об арифметике» (риса̄ла фӣ-л-хиса̄б) Ибн ал-Хаима (см. гл. II, § 3, п. 55) и комментарий к нему («О шестидесятиричном счислении») Сибта ал-Маридини (см. гл. II, § 3, п. 64); трактат Ибн ал-Хаима имеется в рукописях [13, 231], сочинение же ал-Маридини частично переведено Ф. Вёпке и исследовано Б. Карра де-Во [471].

В трактате Беха ад-Дина Амили (см. гл. II, § 3, п. 66) «Краткое изложение арифметики» (хулосат ал-хиса̄б), помимо арифметических правил, изложены геометрические и алгебраические. Это сочинение до XIX в. было основным учебным пособием в Средней Азии, Индии и в других странах. В 1812 г. оно было издано в Калькутте [755] на арабском языке вместе с персидским переводом; в 1843 г. Нессельман переиздал арабский текст калькутского издания, внес исправления и перевел на немецкий [720]; в 1846 г. А. Марр сделал французский перевод трактата [695]; обзор его содержания на русском языке дал Г. Собиров [312].

На основе сочинения Беха ад-Дина и отчасти на трудах его предшественников составлялись и другие учебные пособия по арифметике, использовавшиеся в период XVIII—XIX вв. в учебных заведениях стран Востока и, в частности, Средней Азии.

§ 3. Правила арифметических действий

Не излагая подробно содержание указанных выше трактатов, мы ограничимся кратким описанием основных правил арифметики, данных в этих сочинениях.

Изображение чисел

В средневековой математике Среднего и Ближнего Востока (как и раньше в греческой) наряду с «индийским» способом изображения чисел применялось буквенное, носившее название «джумал», или «абджад». Каждой букве арабского алфавита придавалось числовое значение:

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ى	ك	ل	م	ن	س
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60

ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000.

При записи чисел соответствующие буквы ставились рядом, справа налево (как обычно в арабском письме); например, число записывалось так: 48 مح.

Что касается «индийского» способа, т. е. изображения чисел с помощью десятичной позиционной системы счисления, то знаки, введенные для этой цели, по форме значительно отличались от наших:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Западноарабские цифры по сравнению с указанными восточноарабскими также имели иной вид [370, 384, 815].

После разъяснения способа изображения чисел с помощью индийских цифр в арифметических трактатах обычно излагаются правила действия над целыми числами.

Сложение и вычитание. При сложении на доске, покрытой пылью, числа записываются одно под другим, причем поразрядно. Складываются последовательно цифры каждого разряда, начиная с наивысшего; результат записывается на месте соответствующей цифры в верхнем слагаемом, которая при этом стирается. Если результат оказывается равным или большим десяти, то вверху ставится, соответственно, ноль или избыток над десятью, а единица прибавляется к соседнему разряду.

Правила сопровождаются примерами. Так, ан-Насави иллюстрирует сложение примером 5482+654; воспроизведем промежуточные результаты:

5482	6082	6132	6136
654	654	654	654

сумма составляет 6136.

Вычитание производится аналогично; ан-Насави разъясняет его на примере 65274—2462; промежуточные результаты таковы:

65274	63274	62874	62814	62812
2462	2462	2462	2462	2462;

получается 62 812.

Умножение. Умножение в древнегреческой традиции определяется как повторение одного числа по количеству единиц другого. Описано несколько способов умножения. Ан-Насави, имевший в виду действия с помощью доски и пыли, рекомендует располагать числа одно под другим так, чтобы первый разряд (т. е. единицы) множителя оказался под последним разрядом множимого. Последний разряд множимого умножается сначала на последний, а затем на остальные разряды множителя; результат помещается над нижними разрядами на продолжении верхних. Затем нижние разряды переносятся на один разряд вправо и производится умножение того разряда вверху, который оказался над первым нижним разрядом, на нижние разряды.

Пример: умножить 324 на 753. Ход действия следующий:

324	21 324	225324	225924
753	753	753	753.

Переносим нижние разряды на один разряд вправо: 225924
753

и умножаем 2 последовательно на нижние разряды:

239924	240924	240964
753	753	753.

Еще раз перенесем множитель на разряд вправо: 240964
753

и умножим 4 на разряды внизу:

243764	243972
753	753.

Итак, $324\times753=243972$.

Авторы, производившие вычисления на бумаге, вслед за ал-Каши рассматривали случай, когда один из сомножителей является однозначным числом (умножение записывалось по существу так же, как это делаем мы), а также случай, когда сомножители представляют собой многозначные числа. При этом пользовались правилом умножения с помощью сетки. Этот способ, ранее известный в Индии [384, стр. 126], широко распространился в странах Востока: чертили прямоугольник, одну его сторону делили на равные части по числу разрядов одного сомножителя, а вторую — по числу разрядов другого сомножителя. Точки деления соединяли вертикальными и горизонтальными прямыми, получая таким образом сетку: в малых прямоугольниках проводили параллельные диагонали. Над каждой стороной записывался соответствующий сомножитель и производилось умножение чисел, стоящих над сторонами малых прямоугольников, причем единицы промежуточных произведений записывались под диагональю, а десятки — над ней. Затем складывались результаты, полученные в каждой косой строке. Это правило ал-Каши [178, стр. 20] иллюстрирует примером $7806\times175=1366050$ (рис. 11), а ал-Кушчи — примером $7806\times254=1799844$. Ал-Каши излагает также прием умножения с помощью косой сетки и иллюстрирует его примером: 358×624 (рис. 12).

Существовали и другие приемы, облегчающие умножение. Среди них — упомянутое правило Абу-л-Вафы [232] для умножения двух чисел с одинаковым числом десятков, которое может быть записано в наших обозначениях так:

$$(10a+b)(10a+c)=\left[10a+b-\{10(a+1)-\right.$$
$$\left.-(10a+c)\}\right]10(a+1)+\left[10(a+1)-(10a+b)\right]\times$$
$$\times\left[10(a+1)-(10a+c)\right].$$

Показывая, что оно пригодно и для единиц, Абу-л-Вафа пользуется понятием отрицательного числа (см. выше).

Ал-Каши излагает также правило умножения, которое производится по схеме:

$$(a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \quad)(b_0 + 10b_1 + 10^2b_2 + \quad) =$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,10 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)10^2 +$$

это правило применялось ранее в Индии.

Деление. Оно определялось как действие, обратное умножению, и представляло собой, по ан-Насави, «разделение одного числа по количеству единиц другого» [240, стр. 393] или, по ал-Каши, «равночисленное разложение делимого по единицам делителя для определения доли каждой единицы делителя» [178, стр. 23]. Ан-Насави добавляет, что «это так-

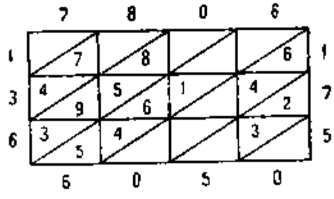


Рис. 11.

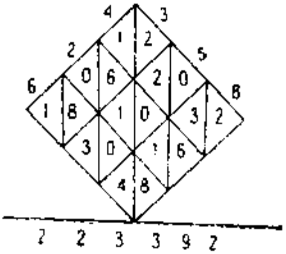


Рис. 12.

же нахождение того, что соответствует целой единице», а ал-Каши разъясняет более подробно: «Эта доля называется частным, а ее полное отыскание сводится к нахождению числа, относящегося к единице, как делимое к делителю». Следовательно, частное $x = a:b$ рассматривается как член пропорции $\frac{x}{1} = \frac{a}{в}$.

Правило деления на доске, покрытой пылью, ан-Насави формулирует следующим образом: «Располагаем делитель под делимым, последний разряд внизу под последним разрядом вверху, если он меньше верхнего. Затем ставим над верхним разрядом, под которым первый разряд внизу, такое наибольшее число, что при умножении его на последний разряд внизу и вычитании произведения из того, что над ним, не остается ничего или же останется число, меньшее того, что внизу; далее умножаем это число на нижние разряды, следующие за последним справа, и вычитаем произведение из соответствующих верхних разрядов, пока не исчерпаем все нижние разряды. Потом переносим нижние разряды на один разряд вправо, ставим над верхним разрядом, под которым первый разряд внизу, наибольшее число и делаем с ним то же, что и раньше, так поступаем далее, пока не дойдем до найденного числа над первым верхним разрядом. Если же таким путем не находим числа, то это значит, что нижнее больше верхнего, тогда мы ставим нуль, переносим нижние разряды вправо на один разряд, ищем наибольшее и поступаем, как и раньше. Те разряды, которые получаются над верхними, являются частным от деления, а то, что остается в середине, если остается что-нибудь, является долями из долей единицы в количестве нижних разрядов» [240, стр. 393—394].

Правило разъясняется на примере 2852:12. Промежуточные результаты таковы:

	2	2	23	23	237	237	237
2852	2852	452	452	92	92	22	8
12	12	12	12	12	12	12	12

В результате получаем $237\,\frac{8}{12}$.

Ал-Каши [178, стр. 23—24] производит деление на бумаге по такому правилу: «Запишем цифры делимого числа, проведем над ним горизонтальную линию, затем проведем между каждыми двумя разрядами вертикальную линию от горизонтальной линии до некоторого предела. Затем запишем делитель на некотором расстоянии под делимым так, чтобы его последний разряд находился против последнего разряда делимого, если делитель меньше того, что находится против него в делимом, причем не следует обращать внимания на род разрядов, находящихся против делителя; если же это не так, надо записать [делитель] таким образом, чтобы последний разряд делимого был левее последнего разряда делителя и, таким образом, каждый разряд [делителя] находился против предыдущего разряда делимого.

Далее ищем наибольшее число, которое, умноженное на цифры делителя, можно вычесть из того, что находится в делимом против делителя и левее, если имеется что-нибудь левее его. Если такое число найдется, запишем его вне таблицы над горизонтальной линией против первого разряда делителя и затем, умножив его на все цифры делителя и вычтя в уме или письменно произведение из того, что находится против делителя или левее, поместим остаток, если что-нибудь остается, под делимым. После этого проводим под ними горизонтальную линию в знак отбрасывания того, что [стоит] над ней, и закрепления того, что [находится] под ней. Остаток от вычитания каждого произведения должен находиться в одной строке, причем здесь уже не должно быть тех чисел, которые отброшены.

Для облегчения работы вычислителя в противоположность тому, что делали предшественники, следует, чтобы после того, как от части делимого, находившейся против делителя, осталось меньше делителя, делитель переносили вправо на один разряд, а над тем, что было раньше, проводили горизонтальную линию в знак отбрасывания того, что [стоит] под ней, и закрепления того, что [находится] над ней, так как в [данном] действии делитель записывается под ней, а делимое — над ней, можно также переносить цифры, остающиеся от делимого, налево на один разряд. Проведя горизонтальную линию под тем, что было сначала, в знак отбрасывания стоящего над ней, мы [снова] ищем наибольшее число с указанным свойством и записываем его справа от того, которое записано сначала, так, чтобы оно находилось против первого разряда [перенесенного] делителя и поступаем с ним так, как раньше. Если же [такое число] не найдется, поставим в этом месте нуль. Затем [снова] перенесем цифры делителя направо или цифры, остающиеся от делимого, — налево на один разряд. Так поступаем до тех пор, пока первый разряд делимого не окажется против первого разряда делителя и действие не окончится.

То, что записано в верхней строке, находящейся над горизонтальной линией, и называемой внешей строкой, есть частное. Оно является целым числом, в котором следует принимать во внимание все его разряды. Если же от делимого что-нибудь остается, остаток является дробью, знаменателем которой является делитель».

Для иллюстрации правила ал-Каши приводит пример: разделить 3 565 908 на 475 (см. стр. 145).

Удвоение и раздвоение. Помимо сложения, вычитания, умножения и деления, средневековые математики на Востоке, а вслед за ними и в Европе применяли действия удвоения и раздвоения, введенные впервые ал-Хорезми. Эти действия отсутствуют в руководствах Абу-л-Вафы и ал-Караджи. Вероятнее всего, как отмечено выше, удвоение и раздвоение были выделены особо, чтобы облегчить запоминание процедуры извлечения квадратного корня.

Извлечение корня. Методы, использовавшиеся математиками стран ислама при извлечении корней 2-й, 3-й и произвольной n-й степеней, подробно исследованы после того, как были переведены на европейские языки и изучены арифметические сочинения ал-Каши, ан-Насави, ат-Туси, а также древнекитайский трактат «Математика в девяти книгах»

[52]. Эти вопросы рассматривают П. Люкей [691, 692], А. П. Юшкевич и Б. А. Розенфельд [178, стр. 329—332; 276; 375; 384], Э. И. Березкина [52, 53], М. И. Медовой [240], С. Ахмедов [13, 329] и др. Дадим краткий обзор полученных ими результатов.

Первая фигура							Вторая фигура						
			7	5	0	7				7	5	0	7
3	5	6	5	9	0	8	3	5	6	5	9	0	8
2	8						2	8					
	7							7					
	4	9						4	9				
	2	7						2	7				
		3	5						3	5			
	2	4	0						4	0			
	2	3	5				2	4	0	9	0	8	
			5				2	0					
			2	5				4					
				6				3	5				
				4	9				5				
				1	1				2	5			
					3	5			3	4			
					8	3		3	4	0	8		
							3	4	0	8			
							2	8					
								6					
				4	7	5		4	9				
			4	7	5			1	1				
									3	5			
		4	7	5					8	3			
	4	7	5					4	7	5			

Средневековые математики Среднего и Ближнего Востока при извлечении корней пользовались приемами, известными раньше в Индии [383, 747] и Китае [52—55, 379—384]. Для извлечения квадратного корня применялась известная еще вавилонянам приближенная формула

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{a},$$

где a^2 — наибольший квадрат целого числа, содержащийся в N. Был известен также итерационный способ, ведущий начало от вавилонской математики (см. выше); так, у ал-Хассара и ал-Каласади имеется приближение

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}-\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}.$$

В сохранившемся латинском тексте арифметического трактата ал-Хорезми раздел об извлечении квадратных корней отсутствует; но, судя по упомянутому сочинению Иоанна Севильского, метод ал-Хорезми совпадал с тем, который применялся в Индии и описан Ариабхаттой (V в.). Этот метод основан на разложении квадрата двучлена

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

существенную роль в нем играют действия удвоения и раздвоения.

Правило извлечения корней предусматривало вычисления на счетной доске. Ариабхатта формулирует его следующим образом: «Вычтя квадрат из нечетного места, раздели ближайшее место на удвоенный корень, помещенный отдельно, и, вычтя квадрат частного, запиши его внизу в строку; удвой полученное выше и, поместив это внизу, раздели на него ближайшее четное место. Раздвой удвоенное количество» [384, стр. 128]. Для иллюстрации правила рассмотрим пример, цитируя соответствующее место из [384]: «Требуется извлечь квадратный корень из 54756. Записываем число, отмечая нечетные места вертикальными, а четные горизонтальными черточками:

$$\begin{array}{ccccc} | & - & | & & | \\ 5 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{array}$$

Подбираем наибольший квадрат, меньший 5, т. е. 4, и, записав его „внизу в строку", вычитаем из 5:

$$\begin{array}{ccccc} | & - & | & - & | \\ 1 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{array}$$

4

Делим 14 на 4, частное будет 3 и остаток 2. Стираем 14 и заменяем остатком 2:

2 7 5 6

4

Вычитаем из 27 квадрат частного 9, и разность 18 ставим вместо 27, а удвоенное частное 6 записываем вслед за 4 в стороне:

1 8 5 6

46

Делим 185 на 46, частное будет 4 и остаток 1. Стираем 185 и заменяем остатком 1:

16

46

Вычитаем из 16 квадрат частного и, так как в остатке получается нуль, стираем 16. Удвоенное частное 8 записываем вслед за 46:

468.

Наконец, раздвоив последнее число, находим корень 234"

В сочинении ан-Насави впервые в математической литературе стран ислама встречаем другой способ извлечения квадратных и кубических корней, который основан на использовании упрощенной схемы вычислений и сейчас называется «схемой Руффини-Горнера». Этот способ применялся в древнекитайской математике для извлечения корня любой степени [52—53]. Ан-Насави [240, стр. 398] называет его «способом индийцев», хотя до настоящего времени не обнаружено ни одного индийского сочинения, где бы он применялся. Поэтому остается предположить [240, стр. 428], что либо такой метод у индийцев существовал, либо ан-Насави имеет в виду запись чисел с помощью индийских цифр, а появление этого метода на Ближнем и Среднем Востоке объясняется непосредственным китайским влиянием.

Извлечение корня n-й степени этим способом, очевидно, как отмечалось выше, производили уже Абу-л-Вафа и Омар

Хайям, но наиболее раннее его описание, известное в настоящее время, дается в арифметическом трактате ат-Туси. Подробно излагают этот способ ал-Каши и ал-Кушчи.

Приведем правило извлечения кубического корня в той форме, как оно дано у ан-Насави. Прежде всего остановимся на определении квадратного и кубического корней, повторяющемся и в других арифметических сочинениях: «Корень, — пишет ан-Насави, — это сторона квадрата, так как каждое число, умноженное на себя, дает произведение, называемое квадратом, а также имуществом; вот это число, умножающееся на себя, называется корнем этого имущества или стороной этого квадрата» [240, стр. 395].

Связь между методами извлечения корня, применявшимися в Индии и в странах ислама, обнаруживается в терминологии. Индийцы называли корень «мула» («корень растения») и «пада» (основание», «сторона»); эти же названия в переводе на арабский язык фигурируют в математической литературе стран ислама: корень здесь называется «джизр» и «дил‘».

Определяя кубический корень, ан-Насави говорит: «Умножаем число на себя, а произведение на его корень; полученное называется кубом, а первоначальное число называется кубическим корнем этого числа».

Правило извлечения кубического корня из целых чисел формулируется так: «Знай, что при выполнении этого действия мы имеем четыре строки: строка получающегося корня, называемая верхней строкой, вторая — строка имущества, из которого извлекаем корень, под ней строка нулей, называемая средней строкой, а под ней четвертая строка, называемая нижней. Мы располагаем имуществом, из которого хотим извлечь корень, и отсчитываем рациональные и иррациональные [разряды] от начала к концу, пока не дойдем до последнего рационального [разряда]. Далее мы ставим под ним в нижней строке, а также напротив в верхней строке [наибольшее] число такое, что если мы его умножим на себя, прибавим произведение к средней строке, верхнее умножим на среднее, произведение вычтем из имущества, [то при этом ничего не останется или останется число, меньшее имущества]. Затем удваиваем нижнее число [умножаем верхнее на нижнее, прибавляем произведение к среднему, а также верхнее к нижнему], переносим среднее на разряд, а нижнее на два разряда вправо. Ищем теперь другое число указанным выше образом и поступаем с ним, как раньше. Так поступаем с остатком, пока не исчерпаем все. Когда действие закончится, прибавим к средней строке единицу и прибавим к этому то, что останется в строке имущества, если что-нибудь останется» [240, стр. 398].

Для примера извлекается кубический корень из 3 652 296. Действуя согласно сформулированному выше правилу, он получает следующие промежуточные результаты:

1	1	1	1 5
3652296	2652206	2652296	2652296
0000000	1000000	300000	475000
1	1	3	35

1 5		
277296	1 5 4	1 5 4
67500	32	32
450	69316	71149
	454	458

Окончательный результат: $154\frac{32}{71149}$. Решение основано на последовательном нахождении значений p, q, r в десятичном выражении корня $x = 100p + 10q + r$.

Если $x^3 = 3\,652\,296$, то, как это делалось в китайской математике [52—54,384], сначала полагается $x = 100\,x_1$, откуда

$$1\,000\,000\,x_1^3 = 3\,652\,296.$$

Пусть $x_1 = p + y$, где $p < 10$, $0 \leqslant y < 1$. С помощью проб находится значение $p = 1$ и производится подстановка $x_1 = 1 + y$. Для упрощения вычислений используется схема „Руффини-Горнера", которая, как известно, состоит в следующем: если дано

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

и требуется сделать подстановку $x = p + y$, то коэффициенты A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 в выражении

$$f(p + y) = A_0y^3 + A_1y^2 + A_2y + A_3$$

определяются по правилу

$$\begin{array}{llll}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
 & +a_0p & +(a_1p + a_0p^2) & +(a_2p + a_1p^2 + a_0p^3) \\
\hline
 & a_1 + a_0p & a_2 + a_1p + a_0p^2 & a_3 + a_2p + a_1p^2 + a_0p^3 = A_3 \\
 & +a_0p & +(a_1p + 2a_0p^2) & \\
\hline
 & a_1 + 2a_0p & a_2 + 2a_1p + 3a_0p^2 = A_2 & \\
 & +a_0p & & \\
\hline
 & a_1 + 3a_0p = A_1 & & \\
\hline
a_0 = A_0 & & &
\end{array}$$

Таким образом,

$$f(p+y) = a_0y^3 + (a_1 + 3a_0p)\, y^2 + (a_2 + 2a_1p + 3a_0p^2)\, y + \\ + (a_3 + a_2p + a_1p^2 + a_0p^3) = 0.$$

В данном примере

$$1000000\, y^3 + 3000000\, y^2 + 3000000\, y - 2652296 = 0.$$

Следующий шаг состоит в том, что в полученном уравнении полагается

$$10\, y = y_1$$

и путем проб определяется целая часть y_1, т. е.

$$y_1 = q + z,$$

$$q < 10, \ \ O \leqslant z < 1.$$

Затем производится аналогичная подстановка в уравнение, причем вычисления проводятся по той же схеме.

Действуя так и далее, определяем $x = 100p + 10q + r$. В примере ан-Насави $p = 1$, $q = 5$, $r = 4$. Ат-Туси извлекает корень 6-й степени из 2441400626. Как и у ан-Насави, действия производятся с помощью доски, покрытой пылью, т. е. все промежуточные результаты стираются.

Ал-Каши в V главе второй книги „Ключа арифметики", иллюстрирует правила извлечения корней примерами $\sqrt{331781}$ и $\sqrt[5]{44240899506197}$. В отличие от своих предшественников он, производя вычисления на бумаге, записывает промежуточные выкладки в таблице.

Если корень из числа извлекается приближенно, к целой части его добавляется поправка, которую получали с помощью разложения степени двучлена. Так, ан-Насави и ал-Марвази применяют формулы

$$\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^2 - a^2} = a + \frac{r}{2a+1},$$

$$\sqrt[3]{a^3+r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = a + \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}.$$

При приближенном извлечении корней с более высоким показателем

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

мы встречаем формулу так называемого бинома Ньютона, которая дается в виде

$$(a+b)^n - b^n = C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 +$$

причем случай $b=1$, нужный для извлечения корня, рассматривается отдельно.

Среди известных в настоящее время арифметических сочинений первым, в котором формулируется правило бинома Ньютона, является трактат ат-Туси. Изложив правило извлечения корня любой степени, ат-Туси пишет: „Если при этом в строке числа ничего не остается, то данное число рационально и искомое получится во внешней строке. Если же что-нибудь останется, то оно иррациональное, и остаток в строке числа есть [числитель] дроби, знаменатель которой приближенно вычисляется как разность между внешней степенью и степенью того, что превосходит основание внешней степени на единицу“ [329, стр. 433]. В качестве примера он приводит извлечение корня 6-й степени из 244 140 626 и получает, согласно правилу,

$$\sqrt[6]{244140626} = \sqrt[6]{25^6+1} \approx 25 + \frac{1}{26^6 - 25^6}.$$

Далее ат-Туси дает правило получения биномиальных коэффициентов сначала для $n=6$, а затем для общего случая и приводит треугольную таблицу этих коэффициентов (известную сейчас как „треугольник Паскаля“) до $n=12$ включительно. В заключение он словесно формулирует правило бинома для $b=1$ и для общего случая. Столь же подробно излагается этот вопрос в „Ключе арифметики“ ал-Каши.

Для приближенного извлечения корней в математике стран ислама использовали еще один прием индийского происхождения, основанный на применении формул

$$\sqrt{A} = \frac{1}{10^k}\sqrt{A\cdot 10^{2k}} \quad \text{или} \quad \sqrt{A} = \frac{1}{60^k}\sqrt{A\cdot 60^{2k}}$$

В сочинении ан-Насави аналогичная формула применена для извлечения кубического корня [240, стр. 420—421].

Проверка арифметических действий. Для удостоверения правильности произведенной операции пользовались заимствованным из Индии правилом „проверки девяткой“, которое основано на том, что остаток от деления всякого числа на 9 равен остатку от деления на 9 суммы значений цифр этого числа. Например, в случае умножения числа A на B это правило состоит в следующем: пусть

$$A = a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + \ldots + a_k \cdot 10^k,$$

$$B = b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \ldots + b_m\ 10^m$$

$$AB = C = c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + \ldots + c_n\ 10^n$$

тогда сумму S_1 значений цифр числа A, т. е.

$$S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

делим на 9 и запоминаем остаток

$$s_1 \equiv S_1 \pmod 9.$$

Так же поступаем в отношении числа B, т. е.

$$S_2 = b_0 + b_1 + \quad + b_m,$$

$$s_2 \equiv S_2 \pmod 9$$

и в отношении C, т. е.

$$S = c_0 + c_1 + \quad + c_n,$$

$$s \equiv S \pmod 9.$$

Если при этом окажется, что $s_1 s_2 = s$, то действие произведено правильно. Ан-Насави формулирует правило (в случае сложения) следующим образом: «Проверка любого действия — это учение о том, как узнать без повторения этого действия, правильно ли оно. Чтобы выполнить ее, нужно мерило данного числа или данных разрядов. Мерило получают сложением одних цифр без учета разрядов и повторным вычитанием из полученного — если оно больше девяти — девяти до тех пор, пока не останется девять или меньше. То, что остается, и есть мерило тех разрядов. Что касается проверки сложения, то мы берем мерило увеличиваемого имущества, т. е. мерило верхних разрядов, и мерило прибавляемого имущества, т. е. мерило нижних разрядов, и складываем их, отбрасываем девять и запоминаем остаток. Затем берем мерило суммы, и если оно совпадает с запомненным, то сложение выполнено верно, если нет, то ошибочно».

Правило иллюстрируется числовым примером: $5482 + 654 = 6136$. Мерило первого слагаемого есть 1 (так как $5+4+8+2=19$, $19-18=1$); мерило второго слагаемого есть 6 (так как $6+5+4=15$, $15-9=6$); сумма равна 7 Мерило суммы есть 7 (так как $6+1+3+6=16$, $16-9=7$).

Помимо проверки девяткой, математики стран ислама пользовались правилами проверки семеркой, девяткой и одиннадцатью. Так, ал-Караджи приводит правила 9 и 11, а Ибн ал-Банна — правила 7, 8 и 9.

Сибт ал-Маридини [471] применил правила 7 и 8 к шестидесятиричному исчислению: если число имеет вид $a_1 a_2 a_3 \ldots$

$\ldots a_n$ и $\frac{a_m}{7} = \alpha_m +$ остаток, то мерило его выразится формулой:

$$(\quad (((a_1 - \alpha_1 \cdot 7)\, 4 + a_2 - \alpha_2 \cdot 7)\, 4 + a_3 - \alpha_3 \cdot 7)\, 4 + \quad + \\ + \alpha_{n-1} - \alpha_{n-1} \cdot 7)\, 4 + a_n - \alpha_n \cdot 7$$

или

$$4^{n-1}(a_1 - \alpha_1 \cdot 7) + 4^{n-2}(a_2 - \alpha_2 \cdot 7) + \cdots + \\ + 4(a_{n-1} - \alpha_{n-1} \cdot 7) + (a_n - \alpha_n \cdot 7),$$

где множитель 4 — это остаток от деления 60 на 7 или на 8.

Правило проверки с помощью 7, 8, 9 и 11 широко применялось в средневековой восточной и европейской математике как чрезвычайно удобное при действиях на счетной доске. Часто при этом не замечали, что оно дает только необходимое, но не достаточное условие правильности операции. Пример, когда арабский математик четко формулирует, что «оно является лишь одним из условий правильности», привел Б. Карра-де-Во [471]. В исследованном им трактате говорится: «Мы спрашивали, что получается при умножении 17×27. Он отвечает — 630 или 621. Применяем правило 9; оно удается. Следовательно, оба ответа должны быть верными».

Арифметика дробей

Во всех средневековых восточных трактатах по арифметике подробно излагается учение о дробях. Здесь главным образом и проявляется различие между сочинениями, написанными в стиле ал-Хорезми, и сочинениями, в которых излагаются методы вычислений, традиционные для стран арабского Востока.

В трактате ал-Хорезми описаны шестидесятиричные дроби $\frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \frac{a_3}{60^3} + \cdots + \frac{a_m}{60^m}$, применявшиеся ранее в математике эллинистических стран и широко распространенные, особенно в астрономических вычислениях, на Среднем и Ближнем Востоке в период средневековья. Ал-Хорезми, производя, например, операцию умножения над шестидесятиричными дробями, переводит сначала каждое из перемножаемых чисел в единицы его низшего разряда, действует с ними как с целыми числами, записанными в десятичной системе, а затем переводит результат снова в шестидесятиричную дробь. Так же поступает и ал-Бируни при составлении таблиц в „Книге вразумления в начатках искусства звездочетства“ [690, стр. 199]. Однако наряду с применением шестидесятиричных дробей, вычисления с которыми отличались громоздкостью, на средневековом Востоке была создана единая шестидесятиричная позиционная система целых чисел и дробей [375, 383, 384, 621, 625, 690]. Числа в этой системе записывались с помощью букв арабского алфавита следующим образом:

$$a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 60 + a_0 \cdot 60 + b_1 \cdot 60^{-1} + \\ + b_2 \cdot 60^{-2} + \cdots + b_m \cdot 60^{-m},$$

а действия над ними производились аналогично тому, как сейчас они производятся над целыми числами и десятичными дробями. Вместо таблицы умножения от 1×1 до 10×10 использовалась таблица произведений от 1×1 до 59×59, записанная в шестидесятиричной системе и всегда находившаяся под рукой у вычислителя. Для определения разрядов произведений и частных применялась специальная таблица.

Наиболее раннее сочинение, содержащее последовательное изложение абсолютной шестидесятиричной системы счисления, принадлежит, как уже говорилось, Кушьяру ибн Лаббану ал-Джили. Подробно рассматривает действия в этой системе и ал-Каши в третьей книге «Ключи арифметики», носящей название «О способе исчисления астрономов»; он вычислил значение $\sin 1^0 = 0; 1, 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, 26, 17$; соответствующая этой шестидесятиричной дроби десятичная дробь верна с 17 десятичными знаками.

«Чистая» шестидесятиричная система счисления проникла на Запад и долго применялась в астрономических сочинениях.

Большой заслугой математиков стран ислама явилось систематическое применение десятичных дробей. Десятичные дроби появились раньше в Китае [52—55, 383, 384] и были связаны с введенной там десятичной системой мер, однако у китайцев они еще не были отвлеченными десятичными дробями, а представляли собой запись с помощью десятичных именованных чисел [383, стр. 363].

«Ключ арифметики» Ал-Каши — первое известное сочинение, в котором подробно изложено учение о десятичных дробях. Ал-Каши говорит, что он ввел десятичные дроби, являющиеся его открытием, по аналогии с шестидесятиричными, чтобы облегчить труд «вычислителя, не знающего исчисления астрономов» [178, стр. 90]. Он пишет: «Когда мы определили отношение окружности к диаметру в нашем трактате, озаглавленном «Трактат об окружности», доведя дроби до нон, мы пожелали перевести их в индийские цифры, чтобы они не были непосильны вычислителю, не знающему исчисления астрономов. Мы взяли долю окружности со знаменателем, равным круглому числу — десяти тысячам, повторенным пять раз. Далее мы разделили целую единицу на десять частей, разделили каждую десятую на десять частей, затем каждую из них на другие десять частей и так далее, разделили первые деления на десятые, таким же образом вторые — на десятичные секунды, третьи — на десятичные терции и так далее, так что разряды десятичных дробей и целых находятся в одном и том же отношении, так же как по правилу исчисления астрономов. Мы назвали это десятичными дробями» [178, стр. 92—93].

Ал-Каши дал правила преобразования целых и дробных чисел из шестидесятиричной системы в десятичную и обратно, сопровождая эти правила примерами, а также изложил приемы счета с помощью десятичных дробей. Впервые десятичные дроби ал-Каши применил в своем «Трактате об окружности» [178, 692а], переводя значение 2π, найденное в шестидесятиричной системе, в десятичную систему, и получил при этом $2\pi = 6{,}2831853071795865$.

Разработанное ал-Каши учение о десятичных дробях осталось неизвестным европейским математикам, и спустя полтора века десятичные дроби были заново открыты на Западе. Автором первого печатного сочинения о десятичных дробях был Симон Стевин [351, 772, 773, 831]. В Византию они были принесены в XV в. кем-то из сотрудников Самаркандской школы [608].

Техника вычислений, связанная с индийской системой нумерации, быстро приобрела популярность среди астрономов и математиков. Однако задолго до внедрения индийской арифметики на Среднем и Ближнем Востоке в вычислительной практике прочно укоренились методы, ведущие начало, вероятно, от древнеегипетской математики [383, 384]. Речь идет о методах вычислений с обыкновенными дробями, которые представлялись в виде сумм и произведений долей единицы. Несмотря на то, что новые приемы вычисления получили известность, старые не изжили себя, а продолжали существовать в течение долгого времени, особенно в деловых финансовых расчетах [234, стр. 253]. О прочности этих вычислительных традиций говорят сохранившиеся до нашего времени сочинения, написанные математиками X—XI вв.

Абу-л-Вафой ал-Бузджани и Абу Бакром Мухаммадом ал-Караджи.

Понятие дроби Абу-л-Вафа обосновывает через понятие „отношение меньшего к большему“ и подразделяет все дроби на „выразимые“ и „невыразимые“. К первой группе он относит доли единицы $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}$ и называет их „главными дробями“ Сюда же относятся „составные дроби“ вида $\frac{m}{n}$ (где $m < n \leqslant 10$) и, наконец, „соединенные дроби“, представляющие собой произведения главных дробей. Помимо этих видов дробей, к „выразимым“ относятся все дроби, полученные с помощью их сложения и умножения. „Невыразимыми“ называются дроби, которые не могут быть получены из трех перечисленных видов дробей, например, $\frac{3}{13}$, $\frac{2}{11}, \frac{4}{17}$ (эта терминология обусловлена той особенностью арабского языка, что в нем для долей единицы до $\frac{1}{10}$ включительно имеются специальные названия: $\frac{1}{2}$ = нисф, $\frac{1}{3}$ = сулс, $\frac{1}{4}$ = руб' и т. д.).

Дроби представлялись с помощью разложения сначала на шестидесятиричные, а затем выражения последних через главные, составные и соединенные дроби. Так, $\frac{27}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, $\frac{33}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$, $\frac{7}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ и т. д. Для этого применялись таблицы и специальные приемы. Дроби Абу-ал-Вафа приводит к общему знаменателю. Например,

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \left(\frac{3}{4} \cdot 72 + \frac{5}{9} \cdot 72 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 72\right) : 72 = \\ = \frac{97}{72} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9}.$$

§ 4. Некоторые практические правила

Тройное правило, которое состоит в нахождении числа x, образующего пропорцию с тремя данными числами a, b, c, т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

играло важную роль в практической арифметике как на Среднем и Ближнем Востоке [384], так и впоследствии в Европе. Оно имеет индийское происхождение и встречалось в в сочинениях Ариабхатты и Брахмагупты.

В алгебраическом трактате ал-Хорезми тройное правило изложено в «Главе о сделках» [349, стр. 51—52]; оно формулируется следующим образом: «Ты рассматриваешь три известных числа, среди них обязательно имеются два, каждое из которых стоит против другого. Умножь каждое из двух стоящих друг против друга известных чисел на другое, а произведение раздели на другое известное число, стоящее против неизвестного. Если у тебя есть это частное, оно есть неизвестное число, о котором спрашивает спрашивающий».

В Индии в VII в. тройное правило было обобщено на случай 5, 7, 9 и 11 величин. Например, с помощью «правила пяти величин» (панчарашика) определялось число x, удовлетворяющее пропорциям

$$\frac{x}{y} = \frac{d}{e}, \quad \frac{y}{a} = \frac{b}{c}.$$

В правиле говорится, что $x = \frac{abd}{ce}$.

В сочинении «Об индийских рашиках» ал-Бируни (переведено на русский язык Б. А. Розенфельдом [289]) подробно разъясняются прямое и обратное тройное правила, а также правила 5, 7 и более величин. Эти правила он доказал с помощью теории составных отношений, разработанной его предшественниками.

Правило двух ложных положений в средние века на Востоке пользовалось большой популярностью, а в европейские учебники арифметики включалось вплоть до XVIII в. [109, 123, 907].

Как установлено недавно [104] благодаря публикации древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах» [52], оно возникло в Китае и под названием «правила избытка — недостатка» применялось там еще в I в. до н. э. С его помощью давался универсальный практический прием решения линейных уравнений с одной неизвестной, не требующий привлечения средств алгебры.

Пусть дано уравнение $ax = b$. Придаем неизвестной значения («ложные положения») x_1 и x_2. Тогда

$$ax_1 = b + d_1,$$
$$ax_2 = b + d_2,$$

где d_1 и d_2 — первая и вторая ошибки. Отсюда

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{d_1}{d_2} \quad \text{и} \quad x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}.$$

Известно — во всяком случае, по заглавиям — несколько средневековых восточных трактатов, в которых это правило рассматривалось под названием «правило двух ошибок» (ал-хатāйн). Сохранились сведения [843], что одно из таких сочинений принадлежит ал-Хорезми. Существует в арабском подлиннике трактат о «правиле двух ошибок» Кусты ибн Лукки и комментарий к нему Абу Са'ида Джабира Ибрахима ас-Саби [868].

Вопрос об авторе еще одного трактата на эту тему, известного в латинском переводе под заглавием „Liber augmenti et diminutionis", в свое время обсуждался в литературе ; Г. Зутер [863] считает, что написал его Абу Камил.

Правило двух ложных положений описано также в арифметическом трактате Ибн ал-Банны, где оно названо «правилом чаш весов» [696]. В энциклопедии ал-Ансари [950] об этом правиле говорится, что «польза его подобна пользе от учения об алгебре и алмукабале, но оно является менее общим и более легким в применении». Здесь же указано, что сочинение об этом правиле написал Зайн ад-Дин ал-Магриби и что доказательство его дал также Ибн ал-Хайсам.

В нашем распоряжении имеется рукопись, хранящаяся в Институте востоковедения АН УзССР (№ 3291, лл. 7—8 об.), в которой «правило двух ложных положений» доказывается геометрическим и алгебраическим методами. Трактат называется «Доказательства правила двух ошибок с помощью исчисления плоских фигур, принадлежащие Афдал ад-Дину Умару ибн...»*

Доказательство проведено для трёх случаев: 1) оба «ложные» значения меньше искомого значения неизвестной; 2) оба больше искомого; 3) искомое заключается между ними. Рассуждение выдержано в стиле арифметических книг Евклида. Числа изображаются отрезками. Во всех случаях предлагается составить выражение $x_1 d_2 - x_2 d_1$ и $d_2 - d_1$ и разделить первое на второе. При этом из геометрических соображений очевидно, что частное есть искомая величина.

Другие правила арифметики средневекового Востока применялись для решения различных практических задач, например, вопросов наследственного права, которые зачастую

* В рукописи неразборчиво.

сводились к решению неопределенных уравнений. К видам счета относились, например, «исчисление диргема и динара» и «встречное исчисление» (хисаб ал-талаки). Последний вид описан в сочинениях Кусты ибн Лукки и Ибн ал-Хайсама. Ибн ал-Хайсам [993] рассматривает следующую задачу: встретились два человека, один говорит другому: «Дай мне $\frac{1}{3}$ того, что есть у тебя, чтобы меня оказалась цена товара». Другой говорит: «Нет, дай мне $\frac{1}{4}$ твоих денег, и у меня окажется цена товара». Для ее решения мы обычно полагаем: x — число денежных единиц у первого, y — у второго, и записываем, согласно условию,

$$x+\frac{1}{3}y=y+\frac{1}{4}x.$$

Тогда

$$x\left(1-\frac{1}{4}\right)=y\left(1-\frac{1}{3}\right),$$

откуда

$$y=\frac{9}{8}x.$$

Решение же у Ибн ал-Хайсама выглядит так: полагаем $x=4$ так, чтобы $\frac{1}{4}x=1$, и вычитаем $4-4\cdot\frac{1}{4}$ 3; далее вводим величину a так, чтобы $\frac{1}{3}a=1$, т. е. $a=3$, и вычитаем $3-3\cdot\frac{1}{3}=2$; наконец, делим первое на второе, складываем с 3, т. е. $\frac{3}{2}+3=4\frac{1}{2}$, и получаем $y=4\frac{1}{2}$

Различные виды счета обозначались специальными терминами. Так, в противоположность вычислениям в уме (хисāб ал-хавāй) и пальцевому счету (хисāб ал-укуд), вычисления, производившиеся с помощью записи на песке и на бумаге, назывались «счетом губар» (ʼилм хисāб ал-губар). Слово «губар» в переводе означает пыль.

Однако наиболее «красивый и общий» способ решения всех практических задач дает, по мнению восточных математиков, «исчисление алгебры и алмукабалы», к изложению которого мы переходим.

Глава V. АЛГЕБРА

§ 1. Общие замечания

Раздел учения о числе — алгебра впервые стала рассматриваться как самостоятельная наука, методы которой применимы при решении широкого круга практических и теоретических задач, в математике стран ислама.

Греческая алгебра, будучи скована строгим разграничением между числом и величиной, натолкнулась на значительные трудности, порожденные геометрической формой, в которую она была облечена. В поздний период греческой математики проявилось стремление освободиться от этой формы, что нашло выражение в трудах Диофанта, возможно, опиравшегося на древневавилонские арифметико-алгебраические традиции.

Тенденция к арифметизации алгебры получила развитие в индийской математике (см. главу II, § 4). По сравнению с алгеброй Диофанта в индийской алгебре сделан важный шаг вперед: в ней допускались операции не только с рациональными, но и с иррациональными количествами; однако вопрос об арифметической сущности иррационального не ставился. Индийцы свободно пользовались понятием отрицательного числа, что позволяло выразить правило решения квадратного уравнения

$$ax^2+вx+c=0$$

для общего случая, когда $a>0$, а b и c могут быть как положительными, так и отрицательными. Возможно, что здесь сказывалось влияние древнекитайской математики, в которой применялись отрицательные числа. Индийцами были сформулированы правила сложения, вычитания, умножения и деления положительных и отрицательных чисел, а также обнаружена двузначность квадратного корня.

Значительные успехи были достигнуты и в разработке алгебраической символики [384, стр. 134—137].

Математики стран Ближнего и Среднего Востока базировались на греческом и индийском наследии и развивали, по всей вероятности, древневавилонские традиции. Они не только выделили алгебру в обособленную математическую дисциплину, но и сделали огромный вклад в ее развитие.

Уже в наиболее ранних из известных сейчас сочинений (трактаты ал-Хорезми, Ибн Турка, Абу Камила) алгебра — или, как она называлась, «исчисление алгебры и алмукабалы» (хисāб ал-джабр ва-л-мукāбала) — играла самостоятельную роль. Позднее Омар Хайям рассматривал ее как «научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-нибудь известной вещи, по которой их можно определить» [339, стр. 70—71]. В энциклопедии ал-Ансари дано следующее определение: «Наука алгебры и алмукабалы есть наука, с помощью которой узнают, как получить численное значение неизвестных, приравнивая их к заданным известным»; пользу ее видели не только в получении этого результата, но и в «упражнении ума» [950, стр. 34].

В сочинениях ученых стран ислама была, с одной стороны, осуществлена арифметизация алгебры, а с другой — в противоположность индийскому подходу к вопросу — алгебраические действия обосновывались теоретически в духе древнегреческой математики. Хотя, в первую очередь, их интересовало численное решение уравнений, но когда получить его не удавалось, они умели найти полезное применение методам геометрической алгебры. Яркий пример этому мы видим в подходе к решению кубического уравнения — в вопросе, в котором индийская математика не достигла ощутимого движеня вперед. К кубическим уравнениям приводили не только многие практические задачи (прежде всего задачи астрономии), но и решения проблем, поставленных в древнегреческих сочинениях, например, в трактате Архимеда «О шаре и цилиндре». Математиками Ближнего и Среднего Востока были разработаны приемы приближенного решения некоторых частных видов этих уравнений. Так, ал-Бируни, вероятно, путем проб нашел приближенное (в шестидесятиричных дробях) значение корня уравнения

$$x^3 = 1 + 3x,$$

к которому у него сводилась задача о построении правильного девятиугольника [287, стр. 78]. Замечательный итерационный метод для решения кубического уравнения вида

$$x^3 + Q = Px$$

дал Джамшид Гияс ад-Дин ал-Каши, рассматривая задачу нахождения sin 1° [129; 169; 384, стр. 308—12; 461, стр. 736—738]. А. Браунмюль назвал метод ал-Каши гениальным [449, стр. 72], а по мнению Г Ганкеля, этот метод — наиболее оригинальный и значительный из всего, что было получено средневековыми восточными математиками, и не уступает по тонкости и изяществу всем открытым на Западе после Виеты методам приближения [576, стр. 292].

Кроме того, для решения кубического уравнения пользовались методом конических сечений, разработанным древнегреческими математиками, которые, однако, не применили его к построению общей теории кубических уравнений [384, стр. 246—259; 290, стр. 37—65; 374]. По свидетельству Омара Хайяма [339, стр. 69], Абу Джаффар ал-Хазин и Ибн ал-Хайсам с помощью конических сечений решили задачу Архимеда о делении шара плоскостью так, чтобы объемы сегментов находились в заданном отношении. Эта задача сводится к уравнению вида

$$x^3 + c = bx^2.$$

Тот же метод для решения кубических уравнений применяли ал-Кухи и Ибн ал-Лайс [1011].

Общая геометрическая теория кубических уравнений принадлежит Омару Хайяму; в его знаменитом сочинении «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы» [339, стр. 69—112; 239—270] даны классификация уравнений, построение корней методами геометрии и определение числа положительных решений и их границ.

В математике стран ислама делались попытки применить геометрические методы и к решению уравнений 4-й степени [339, стр. 46—47, 264—266], в частности, имеются указания, что этими вопросами занимались Ибн ал-Хайсам [339, стр. 106—107] и ал-Каши [178, стр. 192]; известно решение уравнения

$$x^4 + 2000\,x = 20\,x^3 + 1900,$$

данное с помощью конических сечений [1011, стр. 115—116]. Большое внимание в связи с этим уделялось приемам построения конических сечений. Существовало два метода: построение циркулем и линейкой отдельных точек конического сечения и непрерывное построение с помощью специальных приборов [119, 120, 187, 190, 486, 612, 884, 1016, 1026].

Что касается приложений алгебры, то здесь математики стран ислама оставили греков далеко позади; объясняется это подходом к науке не как к геометрической, а как к числовой теории. Это позволило, например, дать арифметическую трактовку X книги «Начал» Евклида (см. главу VI).

Математики стран ислама не восприняли применявшегося индийцами понятия отрицательного числа. Сейчас известен (см. выше) один случай использования его под имеющим индийское происхождение названием «долг» в трактате Абу-л-Вафы о практической арифметике, но теоретически это понятие не рассматривалось.

Менее развитой по сравнению с индийской оказалась алгебраическая символика, хотя и в этом отношении к XV в. (ал-Каласади) были сделаны определенные успехи. Обычно же алгебраические действия описывались словесно.

§ 2. Сочинения по алгебре

Ал-Хорезми «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы»

Великий среднеазиатский математик Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми в истории алгебры сыграл не меньшую роль, чем в истории арифметики. Начало самостоятельному развитию этой научной дисциплины положил трактат «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» («ал-кита̄б ал-мух̮тасар фӣ хиса̄б ал-джабр ва-л-мука̄бала»), который по словам С. Гандца, можно рассматривать как ее фундамент и краеугольный камень [560, стр. 264]. Само название современной науки алгебры носит отпечаток влияния труда ал-Хорезми: слово «алгебра» представляет собой видоизменение части заголовка этого сочинения.

«Алгебра» ал-Хорезми сохранилась в арабском тексте, который вместе с английским переводом Ф. Розена был издан в 1851 г. [749] по рукописи Бодлеянской библиотеки Оксфордского университета. Русский перевод трактата (с фотокопии этой рукописи) выполнен Б. А. Розенфельдом [349]. Недавно сообщалось, что существуют еще два арабских списка этого сочинения [780, стр. 95]. Кроме арабского подлинника, имеется два средневековых латинских перевода трактата ал-Хорезми. Первый из них, принадлежащий Роберту Честерскому (XII в.), появился в Сегови в 1145 г. [630, 634] и сыграл чрезвычайно важную роль в развитии математики в Европе: по мнению Сартона, «можно сказать, что он означает начало европейской алгебры» [774, т. I, стр. 176]. Латинский текст вместе с английским переводом издан в Нью-Йорке Л. Карпинским в 1915 г. [634]. Второй латинский перевод, сделанный, очевидно, Герардо Кремонским, издан Либри в 1838 г. [683]. Имеется также ряд современных переводов сочинения ал-Хорезми; к ним относятся опубликованный в исследовании Ю. Рушка [756] перевод с арабского оригинала на немецкий язык, а также французский перевод А. Марра [694]. Геометрическая часть «Алгебры» опубликована С. Гандцем [558].

Изучением «Алгебры» ал-Хорезми занимались многие исследователи: Ю. Рушка [756, 758] дал критический анализ этого трактата, перевел отдельные главы и остановился на истории арабского числового обозначения, математической терминологии ал-Хорезми, задачах на деление наследства и пр.; С. Гандц уделил труду ал-Хорезми особенно большое внимание [556, 558, 560, 562, 563]; Г Вилейтнер [1004, 1005] рассмотрел подробно главу о делении наследства. Различные вопросы, связанные с трактатом, в частности, об его источниках и о влиянии на европейскую математику, освещаются в работах Л. Родэ [745], Л. Карпинского [630, 634, 635], М. Симона [810], О. Нейгебауэра [726], Г Зутера [879], Г Сартона [771], А. П. Юшкевича [384], Г Энестрема [514], Босмана [444] и др. Сочинению ал-Хорезми отводятся большие разделы во всех курсах истории математики [332, 350, 461, 576 и др.] и в обзорах истории науки [703, 774 и др.].

«Алгебра» ал-Хорезми распадается на теоретическую и сугубо практическую части. Во второй части рассматривается применение алгебраических методов к решению различных хозяйственно-бытовых, торговых и юридических проблем (в частности, задач на измерение поверхностей и на деление наследства). Задачи на деление наследства, сводящиеся к уравнениям 1-ой степени, составляют важный раздел средневековой восточной алгебры. Ал-Хорезми дает их в виде конкретных числовых примеров.

Во введении книги указана цель ее написания. Автор отмечает, что предлагаемые им методы облегчат решение многих практических вопросов: помимо задач, связанных с делением наследства, они могут найти применение в торговле, землемерии, в судебных процессах и в других случаях. Таким образом, Ал-Хорезми показывает практическое значение алгебры, но в то же время подчеркивает общность ее методов, что следует из вводимых определений и способа изложения.

Прежде всего дается определение числа: «Когда я рассмотрел то, что нужно при счете, я нашел, что все это есть число. Я нашел, что все числа составляются из единиц и единица входит в состав всех чисел [349, стр. 26]. Далее отмечается, что те числа, которые нужны в алгебраическом исчислении, бывают трех видов: «корни, квадраты и простое число, не отнесенное ни к корню, ни к квадрату».

Термином «корень» (джиз̱р) обозначается неизвестная величина: «Корень — это всякая вещь, умножаемая на себя, будь то число, равное или большее единицы, или дробь, меньшая ее»; по всей вероятности, термин является переводом соответствующего индийского термина (мула — корень растения). Позднее в арабоязычной математической литературе неизвестная обозначалась словом «вещь» (шай). Квадрат (ма̄л), в буквальном переводе «имущество», определен как «то, что получается из корня при его умножении на себя». «Простое число», т. е. свободный член уравнения, называлось дирхем — денежная единица.

Переходя к решению уравнений, ал-Хорезми дает классификацию уравнений 1-й и 2-й степеней и выделяет шесть видов:

1) $ax^2 = bx$ — „квадраты равны корням"; примеры: $x^2 = 5x$, $\frac{1}{3}x^2 = 4x$;

2) $ax^2 = c$ — „квадраты равны числу"; примеры: $x^2 = 3$, $5x^2 = 80$, $\frac{1}{2}x^2 = 18$;

3) $ax = c$ — „корни равны числу"; примеры: $x = 3$, $4x = 20$, $\frac{1}{2}x = 10$;

4) $ax^2 + bx = c$ — „квадраты и корни равны числу"; примеры: $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$, $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$;

5) $ax^2 + c = bx$ — „квадраты и числа равны корням"; пример: $x^2 + 21 = 10x$;

6) $bx + c = ax^2$ — „корни и числа равны квадрату"; пример: $3x + 4 = x^2$.

Такая классификация объясняется тем, что ал-Хорезми, как и другие ученые, требовал, чтобы в обеих частях уравнения стояли положительные члены; по их представлениям, уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где какой-либо из коэффициентов a, b, c может быть и отрицательным, не имеет смысла.

Для приведения уравнения к одному из этих видов ал-Хорезми вводит два действия: первое из них — ал-джабр —

состоит в перенесении отрицательного члена из одной части в другую для получения в обеих частях положительных членов. Термин «ал-джабр» обычно переводят как «восполнение» или «исправление сломанного члена», хотя на этот счет существуют и другие мнения [469, 556, 703]; например, Гандц считает это слово происходящим от древневавилонского названия науки об уравнениях. Именно от этого термина, с которым Европа познакомилась в средние века по переводам работ восточных математиков, возникло современное слово «алгебра».

Второе действие — «ал-мукабала» — состоит в приведении подобных членов в обеих частях уравнения; термин переводится как «противопоставление». Позднее в алгебраических сочинениях (например, у Абу Закарии ал-Хассара или Ибн ал-Хаима) встречается также специальный термин (ал-хатт), обозначающий действие деления обеих частей уравнения на общий коэффициент [469, 703, 950].

При перечислении шести возможных случаев квадратных уравнений ал-Хорезми приводит конкретные примеры их решения.

Рассматривая уравнение $x^2 + c = bx$, ал-Хорезми дает понять, что оно имеет два корня; он исследует корень $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ и указывает, что решением уравнения является также $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$ Правило разъясняется на примере

$$x^2 + 21 = 10x.$$

«Если, например, квадрат и число двадцать один дирхем равны десяти его корням, то это означает: если прибавить к квадрату двадцать один дирхем, получится равное десяти корням этого квадрата. Правило его таково: раздвой число корней, получится пять. Умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Вычти из этого двадцать один, которые, как сказано, были с квадратом, останется четыре. Извлеки из этого корень, будет два. Вычти это из половины числа корней, т. е. пяти, останется три: это и будет корень квадрата, который ты искал. Его квадрат — девять; если хочешь прибавить этот корень к половине числа корней, будет семь, это тоже корень квадрата, который ты искал; его квадрат — сорок девять» [349, стр. 28—29]. В теории он признавал два корня — на практике пользовался лишь одним из них. Нулевое решение уравнения первого вида он, как и математики более позднего времени (вплоть до XVII в.), не рассматривал [384, стр. 193].

Охарактеризовав каждый вид уравнений и показав на примерах правила решения, ал-Хорезми дает геометрическое доказательство этих правил для 4-го, 5-го и 6-го видов, когда решение не сводится к простому извлечению корня. Так, рассматривая уравнение

$$x^2 + px = q,$$

он дает два построения, соответствующие преобразованиям

$$x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

и

$$x^2 + 2\left(\frac{p}{2}x\right) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Рассуждение ведется для примера

$$x^2 + 10x = 39,$$

когда вспомогательные преобразования имеют вид (рис. 13)

$$x^2 + 4\cdot 2\frac{1}{2}x + 4\cdot 6\frac{1}{4} = 39 + 25$$

и

$$x^2 + 2\cdot 5x + 25 = 39 + 25,$$

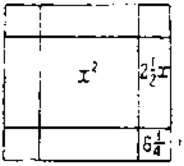


Рис. 13.

однако оно носит общий характер. В «Главе об умножении» ал-Хорезми [349, стр. 33—39] в словесной форме дает правило умножения двучленов $(x \pm a)\ (y \pm b)$, сопровождая его примерами

$$(10 + 1)(10 + 2) = 10\cdot 10 + 1\ \ 10 + 10\cdot 2 + 1\cdot 2 =$$
$$= 100 + 10 + 20 + 2 = 132;$$
$$(10 - x)\cdot 10 = 10\cdot 10 - 10x = 100 - 10x;$$
$$(10 + x)(10 + x) = 10\cdot 10 + 10x + 10x + x\cdot x =$$
$$= 100 + 20x + x^2;$$
$$(10 - x)(10 - x) = 10\cdot 10 - 10x - 10x + x\ \ x =$$
$$= 100 - 20x + x^2$$

и т. д. Здесь он формулирует правило знаков, идущее от Диофанта, которое затем воспроизводилось в алгебраических сочинениях более позднего времени; для последнего из указанных примеров оно выглядит так: «Если скажут: десять без вещи умножены на десять без вещи, то скажи: десять на десять — это сто, вычитаемая (накис) вещь на десять — это вычитаемые десять вещей, снова вычитаемые десять вещей и вычитаемая вещь на вычитаемую вещь — это прибавляемый (заид) квадрат». Термины «заид» и «накис» в этом значении прочно вошли в арабоязычную средневековую математику. Правило знаков иногда рассматривалось отдельно и доказывалось геометрически (например, в трактате математика XIII в. Хамаила ан-Насафи [5]).

В «Главе об увеличении и уменьшении» также словесно излагаются правила действий над иррациональными корнями (джизр асамм — в буквальном переводе «глухой корень»), в частности, правила введения множителей под радикалы и вынесения их из-под радикалов, правила умножения и деления радикалов; например,

$$2\sqrt{x} = \sqrt{2\cdot 2x} = \sqrt{4x};$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{9} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 9} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2};$$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2};$$

$$\sqrt{5}\ \sqrt{10} = \sqrt{50}$$

$$2\sqrt{9}\cdot 3\sqrt{4} = \sqrt{36}\quad \sqrt{36} = 36$$

и др. Правила сложения и вычитания многочленов, например, $(\sqrt{200}-10)+(20-\sqrt{10})$, иллюстрируются геометрически—отрезками. Ал-Хорезми отмечает, что если рассматривается случай, когда величины, входящие в данные выражения, неоднородны, например, если

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2),$$

то для него «не построен чертеж, так как здесь три различных рода — квадраты, корни и числа и нет того, чему они равны; мы могли бы дать чертеж и этого случая, но он не был бы ясен. Словесное доказательство просто. Ты знаешь, что у тебя сто и квадрат без двадцати корней, и если прибавить к ним пятьдесят и десять корней, получатся сто пятьдесят и квадрат без десяти корней, так как эти десять корней восполнят вычитаемые двадцать корней до десяти корней. Останется сто пятьдесят и квадрат без десяти корней. Но вместе с сотней был квадрат. Поэтому если ты вычтешь из ста два квадрата, вычитаемые из пятидесяти, то квадрат уйдет благодаря квадрату, и у тебя останется квадрат и получится сто пятьдесят без квадрата и без десяти корней» [349, стр. 38—39].

В алгебраическом сочинении ал-Хорезми содержатся и наиболее ранние в арабоязычной литературе сведения по геометрии. В частности, доказана теорема Пифагора для случая равнобедренного прямоугольного треугольника; вычислены площади треугольника и круга, объемы сферы, цилиндра и др. Ал-Хорезми были известны три значения π, а именно $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$, $\frac{2832}{20000}$, из которых два последних имеют индийское происхождение.

Исследователи уделяют много внимания вопросу о фундаменте, на котором возникла «Алгебра» ал-Хорезми. Мнения по этому поводу разделяются. Если сторонники одного направления решающее значение придают влиянию древнеиндийской математики на том основании, что современники ал-Хорезми сами часто указывали на индийское происхождение так называемой арабской арифметики и алгебры [576, 810], то сторонники другого направления считают превалирующим греческое воздействие, признавая и некоторую роль индийского элемента [461, 745]. Представители третьего направления возводят истоки «Алгебры» ал-Хорезми к математике Древнего Востока. Например, О. Нейгебауэр выявляет вавилонские арифметические и алгебраические традиции в трудах Герона и считает, что они были впоследствии продолжены в сочинении ал-Хорезми; вообще, по его мнению, эти традиции можно обнаружить в таких разделах эллинистической и арабской математики, как задачи на деление наследства, алгебра типа Диофанта и т. д. [726, стр. 146—147].

Новые данные, полученные советскими историками и археологами в ходе изучения культурного прошлого среднеазиатских народов, позволяют предположить, что источники трудов ал-Хорезми следует искать прежде всего в научных традициях Хорезма, сложившихся под влиянием как древневавилонской, так и греческой, а возможно, и индийской науки [230, 383].

Роль ал-Хорезми в истории алгебры чрезвычайно велика, хотя он и не является, как иногда думали, единственным творцом этой науки. Его «Алгебра», положившая начало развитию новой самостоятельной научной дисциплины, позднее комментировалась и совершенствовалась многими восточными математиками (Абу Камил, ал-Караджи и др.). Под непосредственным воздействием труда ал-Хорезми находился такой выдающийся европейский математик XIII в., как Леонардо Пизанский — автор знаменитой «Liber abaci» (см. гл. VIII). Теория алгебраических уравнений 2-й степени до XVI в. оставалась, по существу, в том же виде, в котором она была представлена ал-Хорезми.

Абд-ал-Хамид ибн Турк ал-Хуттали «Логическая необходимость в смешанных уравнениях»

Ибн Турк, современник ал-Хорезми (см. гл. II, § 2, п. 4), был известным ученым, автором популярных математических сочинений. В 1962 г. впервые опубликован и изучен его трактат «Логическая необходимость в смешанных уравнениях», в котором подробно излагается теория квадратных уравнений [780]. А. Саили видит в этом трактате свидетельство того, что ни ал-Хорезми, ни Ибн Турк не были основателями алгебры, а представляли тот этап развития этой науки, когда она в основных чертах уже была сформирована.

Сабит ибн Корра «Рассуждение об исследовании вопросов алгебры с помощью геометрического доказательства»

Это небольшое сочинение, известное в единственной стамбульской рукописи (Aiya Sophia, № 2457,3), было исследовано в 1941 г. П. Люкеем, который опубликовал арабский текст вместе с немецким переводом [689].

Сабит ибн Корра ставит цель — дать геометрическое решение квадратного уравнения трех канонических видов

$$x^2 + px = q, \quad x^2 + q = px,$$
$$x^2 = px + q \quad (p > 0, \; q > 0)$$

и установить соответствие этого решения алгебраическим. При этом он основывается на 5 и 6 предложениях книги II «Начал» Евклида. Примечательно, что термин «ал-джабр» он применяет уже не для определения конкретного действия, а обозначает им область математики. Тех, кто решает уравнения численным методом, он называет «алгебраистами» (ахл ал-джабр), как позднее Омар Хайям [339, стр. 71].

В противоположность большинству своих современников, он обозначает неизвестную не словом шай — вещь, а джизр — корень.

Абу Камил Шуджа ибн Аслам «Книга об алгебре и алмукабале»

Трактат Абу Камила (см. гл. II, § 2, п. 15) «Книга об алгебре и алмукабале» (китāб ал-джабр ва-л-мукāбала) упоминается средневековыми историками как важнейшее после труда ал-Хорезми сочинение по алгебре. Этот трактат оказал значительное влияние на развитие алгебры на Востоке и в Европе; он дважды комментировался арабскими математиками X в. (комментарии, авторами которых были ученые X в. Али ибн Ахмад ал-Имрани и ал-Истахри, не сохранились). Его влияние сказалось на алгебраическом сочинении ал-Караджи, а затем на сочинении Леонардо Пизанского. В средневековой Европе трактат Абу Камила был переведен на испанский, древнееврейский (XV в.) и латинский языки. Имеются две, пока неисследованные, арабские рукописи трактата [450] (одна из них находится в Стамбуле [672, стр. 460]).

«Книга об алгебре и алмукабале» стала известна историкам математики лишь в 1841 г., когда М. Шаль обратил внимание на рукопись латинского перевода этого сочинения. С содержанием трактата познакомились по латинскому переводу, хранящемуся в Парижской Национальной библиотеке (7377 А, лл. 71 об.—93 об.) и изученному в 1911—1912 гг. Л. Карпинским [631, 632], а затем по древнееврейскому (Париж, 1029,7 ; Мюнхен, 225,5), текст которого опубликован в 1935 г. И. Вейнбергом [926]. Подробный анализ этого сочинения дал А. П. Юшкевич [384, стр. 208—217]; исследованием его занимались и другие авторы [558, 679, 725].

Алгебраические методы Абу Камил применял и в других сочинениях. В трактате «О прямоугольнике и десятиугольнике» (возможно, что в подлиннике он носил название «Книга об измерении» [872]) с помощью этих методов вычислены стороны вписанного и описанного правильного пятиугольника и десятиугольника. Трактат не сохранился в арабском оригинале и изучен по имеющимся древнееврейскому (Мюнхен, 225,3°) и латинскому (Париж, 7377) переводам; в 1896 г. он был переведен на итальянский язык с еврейского текста [765], а в 1910 г. Г. Зутер опубликовал немецкий перевод с латинской рукописи [872].

Третье сочинение Абу Камила, дошедшее до нас, — «Книга о редкостях искусства арифметики» — сохранилось в арабской рукописи (Лейден, 1001, лл. 50 об. — 508 об.) и переведено на немецкий Г Зутером [873]; в нем дано решение неопределенных уравнений в целых числах.

В изложении алгебры абу Камил во многом следует за ал-Хорезми, но в ряде вопросов идет гораздо дальше своего предшественника. Ссылаясь на ал-Хорезми, он вводит определения корня, квадрата и простого числа, но впоследствии рассматривает также куб неизвестной (ка'б), четвертую степень — квадрато-квадрат (мāл ал-мāл), пятую степень — квадрато-квадрато-вещь (мāл мал шай), шестую — кубо-куб (ка'б ал-ка'б) и восьмую — квадрато-квадрато-квадрат (мāл мāл ал-мāл).

Как и ал-Хорезми, Абу Камил рассматривает только уравнения 1-й и 2-й степеней и также подразделяет их на шесть канонических видов. Правила решения разъясняются на примерах, заимствованных у ал-Хорезми, но при геометрическом доказательстве их Абу Камил идет иным путем, основываясь на предложениях II книги «Начал» Евклида [384, стр. 209—211].

Примечательно [384, стр. 211—212], что, пользуясь приемами геометрической алгебры, Абу Камил в то же время отступает от ее важнейшего принципа — принципа однородности: отрезками он изображает и число, и 1-ю и 2-ю степени неизвестной, в то время как обычно квадрат величины представлялся квадратной плоской фигурой.

Излагая правила алгебраического исчисления, Абу Камил дает способ умножения двучленов, разъяснив правило знаков и правило деления корней, и переходит к сложению и вычитанию радикалов. При этом он пользуется соотношением, которое, будучи записано в современных символах, имеет вид

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

Это правило иллюстрируется примерами

$$\sqrt{18} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 + 8 \pm 2\sqrt{144}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

(этот пример впоследствии воспроизводит ал-Караджи),

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{2} = \sqrt{12 \pm 2\sqrt{20}}$$

В последнем разделе сочинения даны решения задач, часть из которых сходна с примерами ал-Хорезми, часть же значительно сложнее. Автор свободно оперирует квадратичными иррациональностями и показывает высокую вычислительную технику. Квадратный корень выступает здесь как объект чисто арифметической природы, встречаясь не только в качестве корней уравнения, но и как его коэффициент [384, стр. 213; 383, стр. 383, 384].

Абу Камил, по-видимому, был первым арабоязычным автором, который решал задачи геометрии алгебраическим методом; два примера такого рода имеются у ал-Хорезми, но они приводят к простым уравнениям без иррациональных коэффициентов. Во втором из названных выше трактатов Абу Камил дает широкое приложение алгебры и геометрии. Он определяет стороны вписанных и описанных правильных пятиугольников и десятиугольников, причем подходит к решению задачи с совершенно новой, по сравнению с греками, точки зрения: если у Евклида требуется построить с помощью циркуля и линейки соответствующий отрезок, то Абу Камил вычисляет его длину, решая квадратное уравнение, и выражает ее через диаметр круга; аналогично он решает обратную задачу. Его не интересует классификация этих отрезков, данная в книге X «Начал».

Если применить современную символику, обозначив через s_n сторону вписанного многоугольника, а через S_n — описанного, через d — диаметр круга, а через r — его радиус, то основные результаты, полученные Абу Камилом, могут быть записаны в виде

$$1)\ s_5 = \sqrt{\frac{5}{8}d^2 - \sqrt{\frac{5}{64}d^4}} = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}};$$

рассматривается случай $d = 10$, когда

$$s_5 = \sqrt{62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}}$$

$$2)\ s_{10} = \sqrt{\frac{5}{16}d^2} - \frac{d}{4} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - 1;$$

$$3)\ S_5 = \sqrt{5d^2 - \sqrt{20d^4}} = 2r\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right);$$

$$4)\ S_{10} = \sqrt{d^2 - \sqrt{\frac{4}{5}d^4}} = 2r\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

$$5)\quad d = \sqrt{2s_5^2 + \sqrt{\frac{4}{5}s_5^4}} = s_5\sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

$$6)\quad d = \sqrt{S_5^2 + \sqrt{\frac{4}{5}S_5^4}} = S_5\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

$$7)\quad d = s_{10} + \sqrt{5s_{10}^2} = s_{10}(1 + \sqrt{5});$$

$$8)\quad d=\sqrt{5S_{10}^2+\sqrt{20S_{10}^4}}=S_{10}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$9)\quad s_{15}=\sqrt{\frac{5}{32}d^2+\sqrt{\frac{5}{1024}\cdot d^4}}+\sqrt{\frac{3}{64}d^2}-\sqrt{\frac{15}{64}d^2}=$$

$$=\frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right).$$

Известно [765], что Леонардо Пизанский знал этот трактат Абу Камила и использовал его в сочинении „Practica geometriae" [677].

Трактат ал-Хашими «О вычислении иррациональных корней»

Мухаммад ибн Абд-ал-Азиз Ал-Хашими (см. гл. II, § 2, п. 20), ученый X в., известен как автор астрономических таблиц и трактата „О вычислении иррациональных корней" [853, § 181], сохранившегося в двух рукописях (Париж, 2457, 16° и Оксфорд, 1,940/2). Нами сделан перевод второго сочинения по парижской рукописи. Указание на то [450, SI, стр. 386], что французский перевод этого трактата, выполненный Ф. Вёпке, опубликован в „Journal, asiatique", t. 19, sept. — oct. 1851, ошибочно: во-первых, сентябрем-октябрем 1851 г. датируется не 19, а 18 том этого издания, а во-вторых, среди опубликованных в обоих этих томах переводов Вёпке трактат ал-Хашими не значится.

Трактат ал-Хашими, как и многие другие из парижской рукописи, переписал известный ученый X—XI вв. ас-Сиджизи, который пользовался копией, составленной Назифом ибн Юмном ал-Мутатаббибом. Из рассматриваемого трактата, между прочим, следует, что ал-Хашими написал также сочинение «Достаточное об арифметике», о котором в литературе упоминаний нет.

В предисловии автор говорит, что цель его сочинения — помочь начинающим и что он разъяснил ряд неясных предложений «с помощью чисел».

Трактат представляет собой характерный пример отношения математиков средневекового Востока к изложению правил арифметических действий над числовыми иррациональностями. С одной стороны, автору ясна арифметическая сущность иррациональной величины, и каждое правило он выводит, опираясь на аналогичное правило для чисел; с другой, при доказательстве полученного правила он считает необходимым обратиться к геометрии. Формулируя задачу, где должно получиться иррациональное значение, автор, тем не менее, требует найти число.

Первое правило $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ сформулировано по аналогии с правилом $(c+d)(c-d)=c^2-d^2$ для рациональных чисел и доказывается геометрически так: даны два корня, изображаемые прямыми CB и BD, где $BD>CB$; пусть $BA=CB$. Требуется доказать, что

$$BD^2-CB^2=CD\cdot AD.$$

Действительно, так как $BD^2=AD^2+BA^2-2AD\cdot BA$ „(Начала“, кн. II, 4) и $BA=CB$ (откуда $2BA=CA$), имеем $BD^2=AD^2+CB^2+AD\cdot CA$; тогда

$$BD^2-CB^2=AD^2+CB^2+AD\cdot CA-CB^2=AD^2+AD\cdot CA.$$

На основании 3-го предложения из II книги „Начал“

$$AD^2+AD\cdot CA=CD\cdot AD,$$

отсюда

$$BD^2-CA^2=CD\cdot AD.$$

Правило умножения корня на рациональное число выводится по аналогии с правилом: если a и b рациональны, то $ab=\sqrt{a^2b^2}$. Дается пример: $\sqrt{5\frac{1}{16}}\cdot 4=\sqrt{5\frac{1}{16}\quad 16}=9$.

Как и в первом случае, для всех следующих ниже правил приводится геометрическое доказательство.

При выводе правила деления корня на число автор основывается на правиле для рациональных чисел: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ и сопровождает его примером $\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}$.

По аналогии с правилом: если даны три (рациональные) числа a, b, и c, то $\frac{ab}{c}:b=a:c$, формулируется правило решения задачи: найти число, которое относится к данному корню из рационального числа, как относятся между собой два данных числа. Например, пусть ищется число x, для которого $\frac{x}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$. Автор утверждает, что $x=\sqrt{3\frac{3}{5}}$, и показывает это следующим вычислением:

$$3\cdot\sqrt{10}=\sqrt{90};\ \frac{(3\sqrt{10})^2}{5^2}=\frac{90}{25};\ \frac{3\sqrt{10}}{5}=\sqrt{\frac{90}{25}}$$

$$\sqrt{\frac{90}{25}}=\sqrt{3\frac{3}{5}}$$

Таким образом, $\sqrt{3\frac{3}{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$ отсюда $\frac{\sqrt{3\frac{3}{5}}}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$.

Решения двух последних задач, рассматриваемых ал-Хашими, основаны на правилах, являющихся алгебраическим выражением предложений 113 и 114 из книги X „Начал“

Первая задача: используя правило $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$, где a, b — рациональные числа, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ — иррациональные корни, найти число x, для которого $\frac{x}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{d}{b-c}$, где c, d — данные рациональные числа. В числовом примере, сопровождающем решение, допущена ошибка.

Вторая задача: используя правило $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$, найти число x, для которого $\frac{x}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{d}{b+c}$. Пример: $\frac{x}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{10}{5-3}$. Автор утверждает, что $x=5\sqrt{8+\sqrt{60}}$, так как $\frac{10}{5-3}=5$, $5(\sqrt{5}+\sqrt{3})=5\sqrt{8+\sqrt{60}}$.

Алгебраические трактаты ал-Караджи

Помимо рассмотренного в предыдущей главе сочинения «Достаточная книга о науке арифметики», несколько разделов которого (главы 54—70) отведено алгебре, сейчас известны еще два алгебраических трактата ал-Караджи «Ал-Фахри» и «Чудесное об арифметике».

Первый из них, полное название которого «Книга об алгебре и алмукабале, известная как ал-Фахри» (кита̄б ал-джабар ва-л-мука̄бала ва хува ма'руф би-л-Фахри), написан около 1010 г. и посвящен везиру Фахр ал-Мулку. Трактат переведен (частично) на французский язык Ф. Вёпке в 1853 г [1013] и рассматривался многими историками математики [461, 576 и др.].

Второй —«Чудесное об арифметике»—обнаружен сравнительно недавно в библиотеке Ватикана (Barberianino orientale, 36, già VI, 65) Леви делла Вида, который опубликовал отдельные выдержки в итальянском переводе и дал общий обзор сочинения [681]. Этот исследователь установил, в частности, что правильное написание имени автора не «ал-Кархи», как считалось ранее, а «ал-Караджи» (т. е. выходец из персидского города Карадж). Трактат «Чудесное об арифметике» в общих чертах описал также П. Люкей [690].

В алгебраических главах «Достаточной книги о науке арифметики» сообщаются основные сведения об «исчислении алгебры и алмукабалы». Исследователи [384, стр. 218] отмечают высокие (в методическом смысле) достоинства изложения. Ал-Караджи предпосылает решению шести канонических типов уравнений раздел, содержащий правила алгебраического исчисления. Как и его предшественники, он приводит правила сложения, вычитания и умножения многочленов, правила действий с иррациональностями, основные алгебраические тождества, правило суммирования арифметической прогрессии. После этого он переходит к решению уравнений, иллюстрируя его примерами, взятыми частично у ал-Хорезми. В последней главе даны решения многочисленных задач.

Однако гораздо больший интерес представляет «Ал-Фахри», знаменующий собой важный этап в развитии алгебры. Трактат состоит из двух частей, первая из которых — теоретическая — содержит учение об алгебраическом исчислении и об определенных и неопределенных уравнениях, а вторая — практическая — решения задач. Хотя схема построения и значительная часть материала заимствованы у ал-Хорезми и Абу Камила, ал-Караджи в ряде важных вопросов выходит за пределы, установленные этими авторами. Во многом он следует за Диофантом.

Прежде всего, ал-Караджи дает определения степеней неизвестной, отмечая, что ряд этих степеней можно продолжить неограниченно и что они образуют последовательные пропорции, которые с помощью современной символики можно записать следующим образом:

$$1:x = x:x^2 = x^2:x^3 = x^3:x^4 = \ldots$$

Следуя Диофанту, ал-Караджи рассматривает также ряд обратных степеней $\frac{1}{x}\quad\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}\quad\frac{1}{x^4} =$

Далее ал-Караджи излагает правила алгебраических действий.

Обращает на себя внимание определение отношения: «Отношение одной какой-нибудь величины к другой величине есть то, что, будучи умножено на второй член отношения, дает первый член» [1013, стр. 54]; с этой точки зрения, по словам ал-Караджи, деление и отношение представляют собой одно и то же. Но в заключение главы автор показывает различие между делением и отношением на примерах 20 40 = 5 и 4 20 = $\frac{1}{5}$; по его мнению, первое следует отнести к категории деления, а второе — к категории отношения.

Значительно обширнее, чем у Ал-Хорезми и Абу Камила, раздел о действиях над иррациональностями. Ал-Караджи оперирует не только квадратными, но и кубическими корнями (дил, буквально — сторона, имеется в виду ребро куба) и корнями четвертой степени. Рассматривает также правила умножения корней и дает примеры:

$$2\sqrt{10} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 10} = \sqrt{40}$$

$$2\sqrt{4}\quad 1\frac{1}{2}\sqrt{9} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{20\frac{1}{4}} = \sqrt{16\cdot 20\frac{1}{4}} = \sqrt{324}$$

$$2\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8\cdot 8} = \sqrt[3]{64}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\quad 27} = \sqrt[3]{3+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$$

$$\sqrt{16}\quad \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16\cdot 81} = \sqrt{\sqrt{1296}} = 6.$$

Разъяснив правила деления корней, автор переходит к их сложению и вычитанию. Отмечая целесообразность применения этих правил только к иррациональным корням [1013, стр. 57], он употребляет выражение «иррациональное число» (адад ал-асамм, буквально — глухое число), в то время как обычно термин «иррациональный», «глухой» применялся только к величинам.

При сложении и вычитании двух квадратных корней ал-Караджи, как и его предшественники, пользуется соотношением

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

и приводит пример, фигурировавший ранее у Абу Камила:

$$\sqrt{18} \pm \sqrt{8}.$$

Однако далее он рассматривает вопрос о сложении и вычитании кубических корней, который не затрагивал ни Абу Камил, ни, тем более, ал-Хорезми. В этом случае используется соотношение

$$(a \pm b)^3 = a^2\cdot a \pm b^2\cdot b \pm 3a^2b + 3ab^2$$

и даются примеры

$$\sqrt[3]{27} \pm \sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[3]{54} \pm \sqrt[3]{2},$$

в частности,

$$\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 27} + 3\sqrt[3]{27 \cdot 27 \cdot 8} + 27 + 8}$$

$$= \sqrt[3]{3\sqrt[3]{1728} + 3\sqrt[3]{5832} + 27 + 8}$$

$$= \sqrt[3]{36 + 54 + 27 + 8} = \sqrt[3]{125.}$$

В следующем разделе ал-Караджи излагает „правила и теоремы, которые нужны в алгебраическом исчислении" Кроме некоторых тождеств, например,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{a^2-b^2}{a-b} + (a-b)\right] = a,$$

он приводит примеры суммирования арифметических рядов, сначала определяя сумму арифметической прогрессии, а затем суммы квадратов и кубов последовательных чисел (см. гл. III, § 7). После этого ал-Караджи переходит к решению шести канонических видов уравнений. В этом разделе многое заимствовано у ал-Хорезми и Абу-Камила: здесь снова встречаем примеры $x^2 + 10x = 39$ и $x^2 + 21 = 10x$. Однако ал-Караджи дает не только геометрический вывод правила решения, но и чисто арифметический, следуя в этом, по его же словам, Диофанту. Арифметический вывод заключается в дополнении до полного квадрата с помощью арифметических преобразований. Например,

$$x^2 + 10x = 39,$$

$$x^2 + 10x + 5^2 = 39 + 5^2,$$

$$(x+5)^2 = 8^2,$$

откуда $x + 5 = 8$, $x = 3$.

Для уравнения

$$x^2 + 21 = 10x$$

имеем

$$x^2 + 21 + (x^2 - 10x + 25) = 10x + (x^2 - 10x + 25),$$

$$(x-5)^2 = 10x + (x^2 - 10x + 25) - (x^2 + 21),$$

$$(x-5)^2 = 4;$$

отсюда $x - 5 = 2$ и $5 - x = 2$, а следовательно, решениями будут $x = 7$ и $x = 3$. Как и Абу Камил, ал-Караджи приводит геометрическое доказательство правила решения уравнения

$$x^2 + px = q,$$

в котором неизвестная и ее квадрат обозначаются прямолинейными отрезками.

Новым у ал-Караджи является решение трехчленных уравнений вида

$$ax^{2p} + bx^p = c,$$
$$ax^{2p} + c = bx^p$$
$$bx^p + c = ax^{2p}$$
$$ax^{2p+q} = bx^{p+q} + cx^q$$

которые сводятся к квадратным.

Теоретическая часть трактата завершается решением двух задач, одна из которых требует решения неопределенного уравнения $mx^2 + nx + p = y^2$. Ал-Караджи, предполагая m или p квадратным числом, подбирает y так, чтобы он был двучленом, причем один член либо $\sqrt{mx^2}$, либо $\sqrt{p}$.

Вторая задача состоит в нахождении множителя, который, будучи умножен на $a + \sqrt{b}$, дает единицу; это преобразование, сводящееся к решению квадратного уравнения, позволяет избавиться от иррациональности в знаменателе.

Практическая часть трактата представляет собой сборник задач на решение определенных и неопределенных уравнений. Последние частично заимствованы у Диофанта.

Сочинение «Чудесное об арифметике» состоит из трех книг: «Об основных определениях», «О решении уравнений» и «Введение в неопределенный анализ». Цель ал-Караджи — изложить на чисто арифметико-алгебраической основе те вопросы, которые в соответствии с классической традицией рассматривались с помощью геометрических построений. Он оправдывает такую постановку дела тем, что алгебраические и геометрические методы равносильны при решении задач: «Алгебра и алмукабала подобны геометрии, потому что когда геометр хочет найти неизвестную, он ищет ее только с помощью известных предпосылок, двух или более. Другое условие включает в себя определения линий, которые необходимы для изображения известных и неизвестных, квадратов, кубов, долей, а также суммы, разности и пр., с целью привести неизвестную к известному, чтобы достигнуть желаемого. Но это дает и искусство алгебры и алмукабалы. Различие между ними состоит в том, что начала ('усӯл) одной —

линия, а другой — вещь (шай). Поэтому предложение воспринимается посредством размышления, а образ оказывается известным благодаря представлению в душе» [681, стр. 261, арабский текст].

Большим шагом вперед явилось включение в трактат арифметизированного учения о квадратичных иррациональностях, составляющего предмет книги X «Начал» Евклида. Подробнее на этом вопросе остановимся в следующей главе; сейчас отметим только, что он формулирует соотношение

$$\sqrt{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{A} + \sqrt{A-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{A} - \sqrt{A-B}}{2}},$$

рассматривая числовые иррациональности, а не геометрические величины. Это важное соотношение использовали впоследствии с арифметической точки зрения и другие авторы, например, ал-К̣аласади.

Открытие трактата «Чудесное об арифметике» подтвердило ошибочность выдвинутого М. Кантором тезиса о противоположности и враждебности ал-К̣араджи школе ан-Насави, пропагандировавшей индийскую арифметику: оказывается, ал-К̣араджи не только не был ее противником, но даже, по его собственному свидетельству, написал специальное сочинение, посвященное индийским вычислительным методам [681, стр. 262].

Алгебраические трактаты Омара Хайяма

В настоящее время известны два сочинения Омара Хайяма по алгебре. Одно из них, более раннее, обнаружено и исследовано лишь недавно. Впервые оно было упомянуто в 1931 г. иранским ученым А. Эгбалем, который сообщил сведения о рукописи без заглавия, находящейся в Тегеранском университете, и дал персидский перевод отрывка из трактата. В 1960 г. Г Х. Мосахеб опубликовал арабский текст и перевел его на персидский язык [706], а в 1963 г. появился русский комментированный перевод, выполненный С. А. Красновой и Б. А. Розенфельдом [340], и английский, принадлежащий А. Р. Амир-Моэзу [399]. Обзор содержания трактата был дан Б. А. Розенфельдом и А. П. Юшкевичем в 1961 г. в комментариях к русскому изданию сочинений Хайяма [339, стр. 242—243], а также в 1965 г. в книге «Омар Хайям» [290].

Второй трактат —«О доказательствах задач алгебры и алмукабалы» (фи-л-барāхӣн'āлā маса̱'ӣл ал-джабр ва-л-муķāбала) — известен историкам науки уже более ста лет. Первые сведения о нем привел Л. А. Седийо в 1837 г.; обнаружив анонимную рукопись, которая, как выяснилось позднее, содержала отрывок из трактата Хайяма, он дал ее перевод и отметил эту находку как бесспорное доказательство ранее высказанного (Ж. Меерман, Ж. Э. Монтюкла, Гартц) предположения о том, что математики стран ислама изучали не только квадратные, но и кубические уравнения [798, 802].

В 1851 г. Ф. Вёпке, использовав рукописи, хранящиеся в Париже (2458, 7^0, 28a—32b, 2461, 1a—25b) и в Лейдене (Cod. or. 14/2, 175—217), опубликовал текст сочинения вместе с французским переводом и присоединил к нему обзорную статью, а также частичный перевод и изложение содержания трактатов Ибн ал-Хайсама, Ибн Лайса, ал-Кухи и ал-Сиджизи. В этих трактатах рассматриваются задачи, приводящие к кубическим уравнениям [1011]. Впоследствии появились переводы трактата «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы» на другие языки: два английских, один из которых был выполнен Д. С. Касиром 1931 г. по рукописи, находящейся в Нью-Йорке [638], а второй (1950 г.)— Х. Дж. Винтером и В. Арафатом [1007] по рукописи Библиотеки Индийского ведомства в Лондоне (734/10, 48—56); персидский перевод дважды издавался Г Х. Мосахебом [705];русский перевод Б. А. Розенфельда с примечаниями Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича опубликован в 1953 г. [338] и в 1961 г. [339].

Содержание алгебраических трактатов Хайяма излагалось и анализировалось во всех курсах истории математики и в специально посвященных ему исследованиях А. П. Юшкевича [374, 384, 625], Б. А. Розенфельда [238, 269], Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича [270, 290], Г. Х. Мосахеба [705], Х. Дильгана [507], Д. Стройка [837], Г Ивса [542] и других, поэтому мы ограничимся лишь кратким обзором этих сочинений.

Более раннее сочинение Омара Хайяма начинается формулировкой задачи, которая сводится к уравнению

$$x^3 + 2a^2x = 2a^3 + 2ax;$$

задача формулируется следующим образом: «Мы хотим разделить четверть AB круга $ABCD$ на две части, например, в точке G таким образом, что если мы опустим перпендикуляр GH на диаметр BD, то AE относится к GH, как EH к HB, причем E — центр круга, а AE — полудиаметр» (рис. 14). Затем он проводит касательную к кругу в искомой точке G до пересечения в точке F с DB и сводит решение поставленной задачи «к прямоугольному треугольнику, удовлетворяющему условию, что хорда прямого угла равна одной из сторон, ограничивающих его, сложенной с высотой, опущенной из него на его хорду» [340, стр. 448], другими словами,— к построению прямоугольного треугольника с заданным катетом EG и при условии, что $EF = EG + GH$.

Омар Хайям [340, стр. 449] ссылается на предшествующих ему ученых «из числа обладателей искусства» алгебры и алмукабалы, которые «применяли ощутимые методы, пользуясь выражениями алгебраистов», и сводит геометрическое построение к „легкому умножению и делению»; полагая $EH = 10$, а $GH = x$, он получает уравнение

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000, \qquad (*)$$

которое «невозможно исследовать при помощи плоской геометрии в силу присутствия здесь куба», а поэтому для его решения „необходимо применение конических сечений" [340, стр. 480].

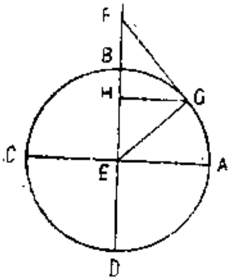


Рис. 14.

Далее [340, стр. 451—452] определяются основные понятия алгебры, т. е. абсолютного числа, неизвестной („вещи"), квадрата, куба и более высоких ее степеней, причем подчеркивается геометрический подход к этим понятиям. Так, неизвестную („вещь") Хайям характеризует как „разряд непрерывных величин, являющийся разрядом прямой линии"; квадрат — как „разряд четырехугольника с равными сторонами и прямыми углами, сторона которого — прямая линия — называется вещью; куб — как «тело, ограничиваемое шестью равными четырехугольными плоскими фигурами с равными сторонами и прямыми углами, ребро которого — прямая линия, называемая вещью, а каждая из квадратных плоских фигур называется квадратом», но заключает, что «он получается умножением вещи на себя, а затем умножением произведения на вещь». Здесь же Хайям упрекает тех, кто «думает, что алгебра — это искусство для определения неизвестных чисел», и разъясняет, что «напротив, алгебра и алмукабала применяются к вопросам геометрии». В соответствии с этим четвертая степень неизвестной — квадрато-квадрат, которая у алгебраистов понимается как произведение квадрата на себя, «не имеет смысла как непрерывная величина, ибо как можно умножить на себя квадрат, являющийся плоской фигурой. Ведь у плоской фигуры два измерения, а при умножении величины двух измерений на величину двух измерений получились бы четыре измерения, но тело не может иметь больше трех измерений. Поэтому все это находится вне алгебры...» [340, стр. 451—452].

Привлекает внимание определение числа: «Число берется разумом отвлеченно от всех материальных объектов, оно не существует в вещах, так как число есть нечто умозрительное, общее, не находящееся в индивидуальных материальных объектах» [340, стр. 451].

Хайям дает классификацию линейных, квадратных и кубических уравнений со старшим коэффициентом, равным 1, определяя 25 канонических видов, т. е. одно линейное, пять квадратных и девятнадцать кубических. Из последних он выделяет пять видов, сводящихся к линейным и квадратным уравнениям $x^3 = px^2$, $x^3 = qx$, $x^3 + px^2 = qx$, $x^3 + qx = px^2$, $px^2 + qx = x^3$, и рассматривает следующие четырнадцать видов кубических уравнений, которые решаются только при помощи конических сечений:

1) $x^3 = r$	8) $x^3 = px^2 + qx + r$,
2) $x^3 + px^2 = r$,	9) $x^3 + qx + r = px^2$,
3) $x^3 + r = qx$,	10) $x^3 + px^2 + r = qx$,
4) $x^3 + r = px^2$,	11) $x^3 + px^2 + qx = r$,
5) $x^3 + qx = r$,	12) $x^3 + px^2 = qx + r$,
6) $x^3 + px^2 = r$,	13) $x^3 + qx = px^2 + r$,
7) $x^3 = qx + r$,	14) $x^3 + r = px^2 + qx$.

Он отмечает, что некоторые из них были решены его предшественниками. Древние греки решили уравнение вида $x^3 = r$, но по поводу остальных «они не хвалились этим». Первым, кто решал «тройные» (т. е. видов 2—7) кубические уравнения, Хайям называет ал-Махани, который пришел к этому, рассматривая задачу Архимеда о рассечении шара плоскостью в данном отношении (из сочинения «О шаре и цилиндре»). «Ал-Махани,— пишет он,— воспользовался выражениями алгебраистов для упрощения и свел решение к уравнению между числом, квадратом и кубом. Однако он не смог решить его при помощи конических сечений и пришел к выводу, что это невозможно. Таким образом, этот ученый, несмотря на всю свою ученость и превосходство в этом искусстве, считался бессильным в решении одного из этих видов» [340, стр. 454]. Нашел способ решения уравнения $x^3 + r = px^2$ Абу Джафар ал-Хазин, написавший, по словам Хайяма, трактат на эту тему.

Уравнение $x^3 + px^2 = r$ решил с помощью конических сечений Абу Наср ибн Ирак при рассмотрении задачи Архимеда об определении стороны правильного вписанного семиугольника [340, стр. 454—455].

Наконец, уравнения вида $x^3 + qx + r = px^2$ решил Абу-л-Джуд Ибн Лайс после безуспешных попыток ал-Кухи, Абу-л-Вафы и ас-Сагани [340, стр. 455].

«До нас не дошла,— пишет далее Хайям,— речь ни об одном из оставшихся десяти видов, ни об этой классификации»; он предполагает в дальнейшем изложить эти четырнадцать видов со всеми их разновидностями и частными случаями и различить среди них возможные от невозможных» [340, стр. 454]. Это намерение Омар Хайям осуществил в «Трактате о доказательствах задач алгебры и алмукабалы».

В заключении рассматриваемого сочинения Хайям решает поставленную в начале задачу, сведенную к уравнению (*), с помощью пересечения двух конических сечений: окружности

$$y^2=(x-10)(2-x)$$

и равносторонней гиперболы

$$xy=10\sqrt{2}(x-10).$$

Абсцисса точки их пересечения является искомым корнем уравнения. «Если кто хочет узнать это при помощи арифметики,— говорит Хайям,— то для этого нет пути; если попытаться проверить это, то окажется, что определяющееся при помощи конических сечений невозможно определить при помощи арифметики» [340, стр. 460]. Однако здесь же он дает приближенное численное решение этого уравнения, хотя и не разъясняет своего метода, который, вероятно [290, стр. 52], представляет собой комбинацию метода проб и линейного интерполирования.

В первом разделе трактата «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы» Хайям дает определение «искусства алгебры и алмукабалы» как «имеющее своей целью определение неизвестных как числовых, так и измеримых» и коротко сообщает о работах своих предшественников. После мрачной оценки окружающей его действительности Хайям переходит к изложению предмета. Он дает основные определения алгебры и указывает на сочинения Евклида и Аполлония как на книги, которые следует знать, чтобы понять его трактат. Как и раньше, он определяет неизвестную, квадрат и куб и подчеркивает, что «если алгебраист пользуется квадрато-квадратом в вопросах измерения, то это следует понимать метафорически, так как нелепо, чтобы квадрато-квадрат принадлежал к числу величин» [339, стр. 71].

Далее он обещает изложить методы определения неизвестной в уравнении, содержащем число, вещь, квадрат и куб, и говорит: «Доказательство этих видов в том случае, когда предмет задачи есть абсолютное число, невозможно ни для нас, ни для кого из тех, кто владеет этим искусством» [339, стр. 72]; однако здесь же добавляет: «Может быть, кто-нибудь, кто придет после нас, узнает это для случая, когда имеется не только три первых степени, а именно число, вещь и квадрат». Отсюда видно, что, потерпев неудачу в попытках численного решения кубического уравнения, Хайям все же не пришел к окончательному выводу о его принципиальной невозможности.

Между числовым и геометрическим доказательством Омар Хайям проводит четкое различие, опираясь при этом на положение греков о числе и величине: «Ты ведь знаешь, что Евклид, доказав в пятой книге своего сочинения некоторые предложения о пропорциональности величин, затем доказывает те же самые предложения о пропорциональности в седьмой книге, когда их предметом является число» [339, стр. 72].

Хайям дает классификацию уравнений (см. выше) и построение корней для каждого канонического вида с помощью соответствующих конических сечений. При этом он выясняет условия разрешимости задачи и вопрос о том, имеется ли единственный корень (включая кратные) или их может быть два, или же это будет «невозможный случай», т. е. корень отрицательный или мнимый (подробный анализ решений см. в работах [290, 374, 1011]).

В заключение Хайям пишет, что приложил все усилия к тому, чтобы сделать свое изложение «полным и в то же время кратким»: «Если бы я захотел, я легко мог бы дать примеры каждого вида и их частных случаев, но, боясь многословия, я ограничился изложением общих правил, так как я доверяю уму учащегося, и тот, кто хорошо усвоил этот трактат, не будет оставлен ни частными примерами, ни их общими закономерностями» [339, стр. 109].

Завершая изложение основного содержания алгебраических трактатов Хайяма, следует сказать, что они, по всей вероятности, остались неизвестными на Западе; во всяком случае, в западноарабских сочинениях учение о кубических уравнениях не упоминается. В Европе по пути геометрического решения алгебраических уравнений пошел Декарт (1596—1650 гг.), возродив тем самым идеи Омара Хайяма [121, 186, 374].

Другие алгебраические сочинения

На средневековом Востоке, кроме рассмотренных выше, были известны и другие сочинения по алгебре. В энциклопедии ал-Ансари [950, стр. 34] указаны трактаты «Начала науки алгебры» Ибн Фалласа ал-Маридини [853, § 359], «Полезное» (ал-муфӣд) Ибн ал-Махали ал-Маусили и сочинение Музаффара ат-Туси [853]. К «подробным» сочинениям, помимо трактатов Абу Камила и Омара Хайяма, отнесены алгебраический трактат «Собрание принципов» ал-Мухалли, сочинение ал-Магриби.

Специальные разделы по алгебре имеются в рассмотренных арифметических трактатах Ибн ал-Банны, ал-Каласади, ал-Вусуди, ал-Каши, ал-Кушчи, Беха ад-Дина.

Следует назвать также «Трактат об алгебре и алмукабале» Сирадж ад-Дина Абу Тахира Мухаммада ибн ʻОмара ас-Саджаванди (см. гл. II, § 2, п. 55) — ученого энциклопедиста XII—XIII вв. [5, 316, 450]. В ИВ АН УзССР хранится несколько рукописей трактата и комментариев к нему [231, 316], что свидетельствует о большой популярности, которую он приобрел в Средней Азии. Особенно широко было известно неоднократно издававшееся сочинение ас-Сиджаванди «Наследственное право Сираджиддина» (фараид сираджийя) [5; 231; 316, т. IV]; только в ИВ АН УзССР имеется около 70 рукописей, не считая комментариев к нему.

§ 3. Об алгебраической символике

В отношении символики математики стран ислама значительно уступали индийцам, владевшим развитой системой алгебраических обозначений [384, стр. 134—137]. Алгебра была здесь в основном риторической, все ее предложения обычно записывались словами.

Однако, по всей вероятности, исключительно риторический характер она носила в период IX—XI вв., а уже с XII—XIII вв. началась разработка алгебраической символики. Хотя подробными сведениями на этот счет мы не располагаем, имеются некоторые данные, позволяющие считать такое предположение обоснованным. Так, в 1854 г. Ф. Вёпке [1014, стр. 371—374] обратил внимание на сообщение Ибн Халдуна о том, что в сочинении, «трудном для начинающих по причине сложности доказательств, содержащихся в нем», Ибн ал-Банна применил алгебраические обозначения (буквы алфавита), «которые служили одновременно для абстрактного рассуждения и для наглядного представления». В дополнение к этому Вёпке привел отрывок из принадлежащего Герардо Кремонскому перевода на латинский язык анонимного арабского трактата по алгебре [439], где для обозначения неизвестной, ее квадрата и свободного члена уравнения применяются начальные буквы их названий, а коэффициенты записываются над ними; арабский подлинник сочинения должен был относиться к XII в.

Все это объясняет появление развитой алгебраической символики в трактате «Снятие покрывала с науки губар» западноарабского математика XIII в. ал-Каласади. Он обозначает 1-ю, 2-ю и 3-ю степени неизвестной первыми буквами («шин», «мим», «каф») названий:

x ش (شئ шай),

x^2 م (مال мал),

x^3 ك (كعب к'аб);

они ставятся над коэффициентами (например, $5x^2$ это م над ٥).
Знаком равенства у него служит ل — буква „лам“ В каждой части уравнения сначала записываются положительные, а затем отрицательные члены, которые отделяются словом الا (без) или просто لا.

Для обозначения корня ал-Каласади применяет букву ج „джим“ (от слова جذر джизр — корень); например, ج над ١٢ это $\sqrt{12}$. Члены пропорции у него отделяются знаком

После исследований Ф. Вёпке сложилось мнение, что алгебра стран ислама превратилась в синкопированную (т. е. в алгебру, в которой для выражения известных, часто встречающихся действий, применяются сокращения) только в трудах западноарабских математиков. Но в 1889 г. Салих Заки [769] опубликовал данные о рукописи, составленной в Мекке в 1591 г. математиком Али ибн Вали ибн Хамзой, в которой применяется та же система обозначений, что и у ал-Каласади, но более развитая. Он высказал мнение, что эта символика, возникшая, очевидно, под непосредственным влиянием Диофанта, была в ходу у математиков Ближнего и Среднего Востока и раньше, возможно, еще во времена ал-Хорезми; однако это утверждение сомнительно.

Ибн Хамза дополняет систему ал-Каласади: 1) обозначениями для более высоких, чем 3-я, степеней неизвестной и для обратных степеней; 2) специальными знаками для действий сложения, умножения и деления. Неизвестная и ее степени обозначены, как и раньше, начальными буквами слов:

x	ش	شئ
x^2	م	مال
x^3	ک или	كعب
x^4	مم	مال مال
x^5	مک	مال كعب
x^6	کک	كعب كعب
x^7	ممک	مال مال كعب
x^8	مکک	مال كعب كعب
x^9	ککک	كعب كعب كعب

Обратные значения даны теми же знаками, что и степени, но с предшествующей буквой „джим" (начальная буква слова джиз'—доля); например,

$\frac{1}{x}$	جش
$\frac{1}{x^2}$	جم
$\frac{1}{x^3}$	جک

Для свободного члена уравнения применялась буква „'айн" ع (от عدد—число), которая ставилась над цифрой.

Сложение дано специальными знаками (наподобие L); вычитание—предлогами „мин" مــن или الا; умножение—предлогом فى (фӣ—в, на); деление—предлогом على('алай—на).

Корни также выражены первыми буквами соответствующих слов:

$\sqrt{}$	ج	(جذر корень),
$\sqrt[3]{}$	ضک	(ضلع كعب сторона куба),
$\sqrt[4]{}$	جج	(جذر جذر корень корня).

Эти буквы при записи ставятся над числом, из которого извлекается корень:

$\sqrt{25}$ $\overset{\text{ج}}{\text{٢٥}}$; $\sqrt[3]{8}$ $\overset{\text{ضک}}{\text{٨}}$; $\sqrt[4]{16}$ $\overset{\text{جج}}{\text{١٦}}$.

Салих Заки приводит примеры из трактата:

$(3x-2)+(x^2-2x^3)=$	ش ع م ك ٣ لا ٢ L ١ لا ٢
$=(3x+x^2)-(2+2x^3)$	ش م ع ك ٣ ١ لا ٢ ٢

$(3x+10-x^2)(10x-2x^3)=$	ش م ش ك ٣ ١٠ لا ١ في ١٠ لا ٢
$=(30x^2+100x+2x^5)-(6x^4+20x^3+10x^3)=$	م ش مك مه ك ك ٣٠ ١٠٠ ٢ لا ٦ ٢ ١٠
$=(30x^2+100x+2x^5)-(6x^4+30x^3)$	م ش مك مه ك ٣ ١٠٠ ٢ لا ٦ ٣

$2x=32\frac{1}{x^3}$	ش جك ٢ ل ٣٢
$2x^4=32$	مه ع ٢ ل ٣٢
$32:2$	٣٢ على ٢
$16=x^4$	١٦ مال مال

Глава VI. УЧЕНИЕ ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЯХ

§ 1. Вводные замечания

В настоящей главе мы рассмотрим ту часть учения о числе, которая, согласно классификации ал-Фараби, составляет специальный («упоминающийся не в каждом сочинении») раздел «искусства алгебры и алмукабалы» и касается «тех вещей, основу которых для рациональных и иррациональных величин дал Евклид в своей десятой книге» [949. стр. 97]. Такое выделение учения о числовых иррациональностях в сочинениях математиков Ближнего и Среднего Востока объяснялось, как будет показано ниже, вполне осознававшейся трудностью его теоретического обоснования.

В предыдущих главах мы имели возможность убедиться, что числовая иррациональность в математике стран ислама стала рассматриваться как число, которое хотя и относится к особому виду, но по существу принадлежит к той же категории понятий, что и рациональное число. Здесь сказалась точка зрения практиков, вычислявших приближенное значение иррационального корня и видевших в нем определенное число. С другой стороны, развитие алгебры также вело к более широкому пониманию числа как решения (рационального или иррационального) алгебраической задачи. Во всех алгебраических трактатах, начиная с произведений ал-Хорезми, имеется раздел о правилах действий с корнями (сначала умножения и деления, а затем сложения и вычитания); в примерах числовая иррациональность фигурирует в той же роли, что и число (не только как корни, но и как коэффициенты уравнений).

Однако само по себе это не означало бы существенного шага вперед, так как и в индийской математике не делалось практического различия между понятиями непрерывного и дискретного и уверенно производились операции над корнями. Принципиальное отличие подхода к проблеме у математиков стран ислама состояло именно в том, что они ясно видели разницу между этими понятиями. Будучи учениками греков в отношении логической строгости, они, как мы покажем ниже, поставили вопрос о теоретическом обосновании операций с числовыми иррациональностями и сделали попытку ответить на него.

Исходной теоретической основой математики рассматриваемого периода служило классическое учение о числе и величине, а потому под числом продолжали понимать совокупность единиц и проводить грань между ними и непрерывной величиной; учение об отношениях также выступало по греческой традиции в двух видах — для чисел и для величин. Но в то же время даже в сочинениях теоретического характера наблюдалось смешение арифметических и геометрических понятий: применялось, например, имеющее позднеэллинистическое происхождение понятие «количества отношения» (см. гл. VII), нарушались принципы геометрической алгебры (например, говорилось о «произведении линий» и т. д.), отношение отождествлялось с дробью [234] и вместо «одинаковости» отношений начали говорить об их «равенстве» [11, 12]; иногда встречался и термин «иррациональное число».

Поэтому следует выяснить, обсуждались ли специально основные понятия учения о числовых иррациональностях и с каких позиций они трактовались.

В сочинениях по алгебре природа корня, над которым производятся действия, не рассматривалась, поэтому, судя по ним, ответить на этот существенный с точки зрения истории понятия действительного (положительного) числа вопрос невозможно. Его можно решить, если обратиться к другому направлению учения о числе — к теории квадратичных иррациональностей, где эта античная теория, изложенная в книге X «Начал» Евклида, получила совершенно новое содержание.

При чтении книги X «Начал» (см. гл. I), где дана классификация квадратичных и биквадратичных иррациональностей, ясно ощущаются трудности (связанные с применением методов и терминологии геометрической алгебры), к которым привела греческую науку попытка унифицировать математику на основе геометрии. Эти трудности исчезают с переводом предложений книги X на алгебраический язык. Заслуга средневековых восточных ученых состоит прежде всего в том, что они последовательно осуществили такой перевод, т. е. произвели арифметизацию евклидовой теории квадратичных иррациональностей. Важность этого шага для дальнейшего развития арифметики и алгебры трудно переоценить, поэтому сочинения, касающиеся предмета книги X «Начал», заслуживают внимания историков науки. Между тем, по существу ни один арабский комментарий к этой книге не исследован.

Отсутствие данных о судьбе теории квадратичных иррациональностей после Евклида привело к убеждению, что абстрактное рассмотрение иррациональных величин совершенно прекратилось. «Первым, насколько мне известно,— говорил в 1842 г. Нессельман,— кто взялся за дальнейшее развитие теории иррациональных величин, был Лука Пачоли де Бурго в конце XV в., после того, как это учение почти 18 веков было предано забвению» [719, стр. 183]. Этот взгляд несколько изменился, когда в 1853 г. Ф. Вёпке обнаружил и исследовал упоминавшийся нами комментарий Паппа к книге X «Начал» в арабском переводе ученого X в. ад-Димишки; из него узнали, что теорией иррациональных занимались Аполлоний и Папп. Однако о работах математиков стран ислама на эту тему сообщения долгое время не появлялись, хотя некоторые исследователи, например, Г Ганкель [576, стр. 79], упоминали об арабских комментариях к книге X. В конце прошлого века были изучены латинский перевод арабского трактата, автором которого ориентировочно считается ученый X в. Мухаммад Абд-ал-Баки ал-Багдади [494, 859, 866], и латинский перевод версии «Начал» в изложении ан-Найризи [494]. По этим переводам составилось общее представление о характере арабских комментариев к книге X и о роли восточных математиков в развитии теории числовых иррациональностей. Как показывают комментарии, обзор содержания которых приведен ниже, оно далеко не полностью соответствовало действительному положению дела.

§ 2. Комментарии к книге X „Начал“ Евклида

В различных хранилищах восточных рукописей имеется несколько трактатов, касающихся предмета книги X «Начал». Со временем, вероятно, будут обнаружены и новые рукописи, но известные в настоящее время уже позволяют сделать выводы, интересные для истории математики.

Благодаря любезности Б. А. Розенфельда в нашем распоряжении имеются микрофильмы двух арабских рукописей Парижской Национальной библиотеки (№ 2457*, 2467), содержащих несколько комментариев к книге X, микрофильм

* Краткое описание этой рукописи дал Ф. Вёпке в 1856 г. [1017]; а в 1930 г.— Томсон [618]. Большая часть ее переписана известным математиком X—XI вв. ас-Сиджизи (см. гл. II, § 3, п. 34).

рукописи «Книги комментариев к введениям сочинения Евклида «Начала» Ибн ал-Хайсама, которая находится в Бодлеянской библиотеке в Оксфорде (Hunt. 237), а также литографский текст изданного в 1948 г. в Хайдарабаде трактата «О соизмеримых и несоизмеримых величинах» Ибн ал-Багдади [738].

Выполненный нами перевод указанных сочинений дал основной материал для написания этой главы. Кроме того, был использован опубликованный в 1594 г. в Риме арабский текст «Изложения Евклида» Насир ад-Дина ат-Туси [537] и некоторые современные переводы трудов других восточных ученых.

Комментарий Назифа ибн Юмна

Назиф ибн Юмн ал-Мутатаббиб, судя по сохранившимся сообщениям, перевел «Начала» Евклида полностью. В настоящее время известен лишь отрывок, который начинается словами: «То, что перевел Назиф ибн Юмн ал-Мутатаббиб из существующих на греческом языке добавлений к предложениям X книги» (хаза̱ ма̄ нака̣ла наз̣йф ибн йумн ал-мутатаббиб мимма ваджада фӣ-л-йунаний мин зийада фӣ-л-ишка̄л ал-мака̄ла ал-ʻа̄шира). Он находится в рукописи Парижской Национальной библиотеки (№ 2457, на листах 80 об. и 161); на то, что текст 161-го листа является продолжением отрывка, указал в 1856 г. Ф. Вёпке [1017]. Рассматриваемый отрывок может оказаться полезным для изучения истории текста «Начал», что представляет собой самостоятельную проблему историко-математических исследований.

При подготовке издания Гейберга, завершенного в 1886 г. [541], где на основании многочисленных рукописей «Начал» сделана попытка выделить подлинный текст Евклида, наименее использованными оказались арабские версии «Начал», так как тексты их оставались в то время (и остаются сейчас) почти недоступными исследователям. Несмотря на то, что об арабской традиции «Начал» имеется несколько работ [591, 664, 897], вопрос этот в настоящее время до конца не изучен.

В начале комментария Назифа ибн Юмна дается «доказательство первого предложения неизвестным [арабам] методом», которое проведено следующим образом: «Пусть для двух величин AB и C выполняются условия этого предложения и пусть AB будет большей

Я утверждаю, что если отнять от AB больше, чем ее половина, с тем, что останется, поступить таким же образом и делать это постоянно, тогда остаток от AB будет меньше, чем C.

Доказательство. Берем C кратным до тех пор, пока кратное не станет больше, чем AB. Пусть GL есть кратное C и пусть оно больше, чем A; пусть части GL будут: GH, HL, FL. Отделим от AB больше, чем ее половина; пусть это будет BD. От DA отделим больше, чем ее половина; пусть это будет DE. Не прекращаем этого вычитания до тех пор, пока количество частей AB не станет таким же, как количество частей GL.

Так как GL больше, чем AB, FL меньше, чем половина GL, а BD больше, чем половина AB, то остается FG большая, чем AD. Таким же образом отделяем от FG ее половину, т. е. FH, а от DA — больше, чем ее половину, DE. Остается HG, т. е. C, и оно больше, чем AE. Итак, AE — остаток от AB — будет меньше, чем C. А это то, что мы хотели разъяснить».

Итак, оказывается, что «неизвестное» доказательство совпадает с тем, которое, вслед за Гейбергом, в современных изданиях принято считать каноническим [134, т. 2]. Отсюда можно заключить, что в текстах Евклида, доступных арабам, фигурировало другое доказательство. Действительно, если обратиться к «Изложению Евклида» ат-Туси (см. ниже), то увидим, что он доказывает X, 1 методом, который Гейберг приписывает схолиасту; это же доказательство встречается у Ибн ал-Багдади (см. ниже) и у Кампано (см. гл. VIII).

Таким образом, можно думать, что арабские авторы в вопросе о принадлежности Евклиду доказательства X, 1 придерживались мнения обратного тому, которое высказал Гейберг.

То же самое можно сказать и о «неизвестном» доказательстве X, 6: оно полностью совпадает с тем, которое приписывается Евклиду.

Отрывок заканчивается формулировкой следствия из X, 9. Текст этого следствия Гейберг считает неподлинным и видит основание для такого вывода, помимо разницы в языке изложения, в том, что во второй части рассуждения доказано больше, чем было предположено вначале [134, т. III, стр. 112]. В нашем арабском тексте эта сомнительная часть отсутствует, что говорит в пользу утверждения Гейберга.

Анонимный комментарий

На последних листах (217—219 об.) Парижской рукописи № 2457, переписанной ас-Сиджизи, находится небольшой анонимный комментарий (без заглавия) к книге X, принадлежащий другому переписчику и не значащийся в оглавлении. Он содержит подробное толкование нескольких предложений книги X, строго выдержанное в духе Евклида.

Ал-Махани «Комментарий к десятой книге сочинения Евклида»

Труды ал-Махани (см. гл. II, § 2, п. 10), в большинстве своем до нас не дошедшие, затрагивали основные теоретические вопросы науки того времени и оказали серьезное влияние на развитие математики средневекового Востока. Значение его алгебраических исследований отметил Омар Хайям [339, стр. 69; 340, стр. 454], указав, что ал-Махани рассматривал очень сложные вопросы «искусства алгебры и алмукабалы», и, в частности, сделал попытку решить уравнение 3-й степени. По свидетельству Хайяма, он «предложил проанализировать предпосылку, принятую Архимедом в четвертом предложении второй книги его «Книги о шаре и цилиндре», при помощи алгебры» и при этом пришел к уравнению, «содержащему кубы, квадраты и числа», решить которое, однако, ему не удалось, «несмотря на то, что он долго размышлял об этом». Замечания о комментарии ал-Махани к трактату Архимеда высказал также Ибн Лайс.

Вероятно, именно занятия кубическими уравнениями привели ал-Махани к классификации кубических иррациональностей, о которой мы будем говорить ниже.

Сочинение ал-Махани «Об отношении», сохранившееся до наших дней, сыграло особенно важную роль в развитии понятия действительного числа, так как в нем впервые в арабоязычной литературе было подвергнуто критике греческое понятие отношения (см. гл. VII). Большой интерес представляет трактат ал-Махани «Комментарий к X книге сочинения Евклида» (тафсӣр ал-маќāла ал-'āшира мин китāб Уќлӣдис), отрывок из которого находится в рукописи (№ 2457, 39°; лл. 180 об.— 181 об.) Парижской Национальной библиотеки. По этому отрывку можно оценить вклад ал-Махани в развитие теории иррациональных величин: он рассматривал и классифицировал не только квадратичные иррациональности, но и иррациональности 3-й степени, что для его времени было важным теоретическим достижением. Судя по сохранившимся сочинениям, после ал-Махани никто из восточных математиков не касался вопроса о кубических иррациональностях с теоретической точки зрения, безусловно, из-за его трудности.

Ниже приводится обзор содержания этого трактата по переводу, выполненному с микрофильма рукописи (рис. 15).

Трактат начинается с определения рациональных и иррациональных величин, которое существенно отличается от определения, данного Евклидом. У ал-Махани эти величины выступают как числовые иррациональности, которыми он свободно оперирует, хотя для разъяснения прибегает к геометрической интерпретации: «Рациональная будет тогда, когда мы говорим, например, десять, двенадцать, три с половиной,

Рис. 15. Страницы из трактата ал-Махани.

шесть и одна треть и тому подобное, потому что величина этого произносится и выражается количественно. То, что не является рациональным, называется иррациональным, величину его невозможно произнести и выразить количественно. Например, корни из чисел, не являющихся квадратами, например, десять, пятнадцать, двадцать, ребра чисел, не являющихся кубами и тому подобное». Другими словами, в противоположность Евклиду, для которого величина есть только линия, рациональная или иррациональная в зависимости от того, соизмерима она с выбранным в качестве меры отрезком или несоизмерима, ал-Махани рассматривает целые и дробные числа (10, 12, $3^1/_2$, $6^1/_3$) как рациональные величины, а квадратные и кубические корни — как иррациональные. Этот арифметический подход к иррациональности проявился особенно в том, что к иррациональным величинам ал-Махани относит также «то, что является их суммой, или разностью, или результатом сложения с рациональной, или результатом вычитания между такого рода величиной и иррациональной, или между рациональной и ею».

После определения иррациональных величин ал-Махани дает их классификацию. Прежде всего он выделяет *плоские* и *телесные* иррациональные. Плоскими он называет «корни, корни корней и то, что получается из их соединения или сложения между собой, или из их сложения с рациональным, или из вычитания их между собой». К телесным иррациональностям он относит «такие, как корни кубические, или корни кубические из корней, или корни кубические из кубических корней, или то, что получается путем их сложения или вычитания».

Как плоские, так и телесные иррациональности подразделяются на отдельные и составные, из которых последние получаются сложением или вычитанием первых.

Классификация ал-Махани может быть выражена так:

I. Плоские иррациональности:

1) плоские отдельные: $\sqrt{a}, \sqrt{\sqrt{a}}\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$

2) плоские составные: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\quad \sqrt{\sqrt{a}} \pm \sqrt{\sqrt{b}}$ $\sqrt{a} \pm b,\ a \pm \sqrt{b}, \ldots;$

II. Телесные иррациональности:

1) телесные отдельные:

$$(1)\quad \sqrt[3]{a}\quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$$

$$(2)\quad \sqrt{\sqrt[3]{a}}\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}\quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$$

2) телесные составные:

$$(1)\quad \sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}},\ \pm \sqrt[3]{\sqrt[3]{b}}$$

$$(2)\quad \sqrt{\sqrt[3]{a}} \pm \sqrt{\sqrt[3]{b}}\quad \sqrt{\sqrt[3]{a}} \pm \sqrt[3]{b}$$

Первую часть трактата ал-Махани завершает высказыванием, что он находит нужным «ограничиться тем, до чего дошел мудрый Евклид в своей книге и что он рассматривал, а он рассматривал вид плоских и ограничился этим» и добавляет: «Мы разъясним все виды, которые рассмотрел мудрец, основываясь на предположении числа и вычисления». Затем он излагает основные понятия книги X, используя вместо геометрических образов числа и числовые иррациональности. Он повторяет определение рационального («все то, величина чего произносится и выражается количественно») и приводит примеры: 17, 5 и т. д. Евклидовы иррациональные величины он определяет как «корни, корни из корней, корни корней из корней и т. д.». При этом рациональная в степени — это корень ($\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{1000}$ и т. д.), амедиаль — корень из корня ($\sqrt{\sqrt{10}}$ $\sqrt{\sqrt{8}}$, $\sqrt{\sqrt{1000}}$ и т. д.).

Затем ал-Махани определяет вторую медиаль как корень корня из корня ($\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{18}}}$ и т. д.), третью медиаль как корень корня из корня и заключает: «Таким же образом мы рассуждаем дальше безгранично, и каждой из них соответствует название согласно показателю ее степени».

Евклид ограничился рассмотрением величин, которые могут быть выражены в алгебраической форме как $\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$, но в предложении 115 он определял и величины вида $\sqrt{a}$, $\sqrt[6]{a}$ и т. д.: «Из медиали возникают в бесконечном множестве иррациональные и никакая никакой из предыдущих не тождественна» (некоторые исследователи, например, Гейберг, считают это предложение вставленным в «Начала» позднее, во времена Аполлония). Учение о медиалях высших порядков наиболее полно развили математики средневекового Востока. Об этом свидетельствует, помимо данного трактата ал-Махани, комментарий к книге X ал-Ахвази и Ибн ал-Багдади (см. ниже), где медиали высших порядков рассматриваются подробно.

Дальше ал-Махани переходит к иррациональностям Евклида, полученным сложением и вычитанием. Рукопись обрывается на определении биномиали.

Ал-Ахвази «Комментарий введения к X книге сочинения Евклида»

«Комментарий введения к X книге сочинения Евклида» (шарх ал-маķāла ал-'āшира мин китāб Уķлūдис) известен в пяти рукописях: парижской (2467, 18°), берлинской (5923), двух лейденских (969, 970) и стамбульской (Aija Sophia, 2742, 2°, 15B1). Из них лишь последняя содержит комментарий полностью [672, стр. 462].

Мы перевели трактат с парижской рукописи (лл. 207—210 об.) Из восьми разделов, составляющих трактат ал-Ахвази (см. гл. II, § 2, п. 24), в рукописи дается текст первых пяти и кратко излагается содержание шестого и седьмого.

В первом разделе комментария ал-Ахвази говорится о евклидовой классификации прямых линий, под которыми понимаются, однако, их числовые (рациональные и иррациональные) выражения. Автор определяет отдельные прямые линии как «имеющие одно имя» (исм) и разъясняет это понятие «например, три четверти корня из пяти и тому подобное». Составными он называет «имеющие два имени» (зу-исмӣна) и в качестве примера приводит $3+\sqrt{5}$ (в словесном выражении).

Рассматривая виды прямых линий, ал-Ахвази подразделяет их на рациональные в длине и иррациональные. Представляют интерес определения: «Рациональная в длине называется также абсолютно рациональной. Это то, что является числом, то есть когда говорится: восемь, или четыре, или пять, или другое число. А иррациональная — это то, что устанавливается с помощью названия корень. Например, если скажут тебе: корень из пяти, корень из шести, или иной». Таким образом, автор показывает, что его интересует арифметическая природа рационального и иррационального.

Затем ал-Ахвази переходит к классификации иррациональных линий: «Иррациональные бывают в степенях, количество которых бесконечно. Из них в первой степени та, у которой квадрат, квадрируемый ею, абсолютно рационален. Например, корень из семи рационален, так как квадрат его есть семь, что является числом. Этот вид называется рациональной в степени...

Иррациональная во второй степени — эта та, у которой квадрат будет иррациональным, а квадрат квадрата — рациональным. Например, корень корня из семи, потому что его квадрат — это первый корень. Квадрат ее является рациональной в степени, например, у корня корня из семи. Если линия во второй степени, то для выделения ее из всех степеней она названа медиальной.

Что касается составных, то они подразделяются на две категории. К первой относятся те, у которых одна часть рациональна в длине, а другая — иррациональна, например, если скажут тебе: три и корень из пяти. А ко второй — те, у которых обе части иррациональны, например, сумма корня из пяти и корня из шести».

Классификация величин, данная ал-Ахвази, может быть выражена следующим образом:

I. **Отдельные (например, $3, 4, \sqrt{5}$):**

1) рациональные в длине, выражающиеся числом (например, 8, 4, 5 и др.),

2) иррациональные, выражающиеся корнем (например, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и др.) и имеющие бесконечно много степеней (под этим подразумеваются корни с показателями 2^n где $n = 1,2,...$):

а) иррациональные в 1-ой степени (соответствует виду „рациональных в степени" Евклида), например, $\sqrt{7}$,

б) иррациональные во 2-ой степени (соответствует виду „медиалей" Евклида), например, $\sqrt{\sqrt{7}}$ и т. д.;

II. Составные:

1) вида $a + \sqrt{b}$ где a — рациональное число, а $b \neq$ квадратному числу:

(а) $a > b$,

(б) $a < b$ (например, $< 3 + \sqrt{12}$),

2) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (например, $\sqrt{5} + \sqrt{6}$).

Эта классификация предварительная: в 3 и 4 разделах ал-Ахвази рассматривает отдельные и составные иррациональности более подробно.

Как видим, классификации, данные ал-Ахвази и ал-Махани, в основном совпадают. Разница состоит в том, что ал-Махани рассматривает и кубические иррациональности, а ал-Ахвази, как и Евклид, ограничивается квадратичными.

Во втором разделе комментария классифицируются площади. Ал-Ахвази различает квадрат истинный и квадрат абсолютный. Площадь первого из них выражается квадратным числом (например, $9 = 3 \times 3$), а площадь второго — неквадратным (например, $6 = 2 \times 3$).

Площади бывают следующих видов:

I. Отдельные (например, 10, $7\sqrt{10}$):

1) рациональные (например, 10, 7),

2) иррациональные (например, $\sqrt{3}$);

II. Составные (например, $3 + \sqrt{7}$).

Как и в случае линий, для иррациональных площадей существует бесконечное число степеней иррациональности: эти площади также называются «медиалями» соответствующих степеней. Автор объясняет такое название тем, что медиальная площадь представляет собой среднее геометрическое между площадями двух квадратов, причем эти площади могут быть выражены как рациональными, так и иррациональными числами. Приведены примеры:

1) даны квадраты с площадями 10 и 5, стороны их $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$; строится прямоугольник с площадью $\sqrt{10}\times\sqrt{5}=\sqrt{50}$ („дополнительная площадь"), которая и будет медиальной, так как для нее $\frac{10}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{50}}{5}$;

2) если площади квадратов равны 10 и 4, то стороны их $\sqrt{10}$ и 2, и дополнительная медиальная площадь есть $\sqrt{40}$; для нее $\frac{10}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{40}}{4}$

То же получается и для медиалей более высоких степеней.

Устанавливается связь иррациональных площадей с иррациональными линиями, рассмотренными в первом разделе: название линии происходит от названия площади, которую эта линия квадрирует. Так, линия второй степени иррациональности называется медиальной, потому что она квадрирует медиальную площадь (ср. «Начала», X, 21). В то же время эти линии являются средним геометрическим между сторонами квадратов, определяющих медиальную площадь. Так, в случае первого из приведенных выше примеров

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{50}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{50}}}{\sqrt{5}}.$$

В заключении раздела автор делает чрезвычайно важный вывод, что „каждой плоской фигуре сопоставляются два числа", а именно те, которые соответствуют сторонам этой плоской фигуры, причем, во-первых, числа могут быть как рациональными, так и иррациональными, а во-вторых, одной и той же плоской фигуре могут соответствовать различные пары чисел. Например, $10=2\times5=\sqrt{5}\times\sqrt{20}$ и $2=2\times1=\sqrt{\frac{1}{2}}\times8$. Другими словами, под площадями понимаются любые числа и утверждается неоднозначность их разложения на два сомножителя, если рассматриваются иррациональные корни.

В третьем разделе трактата классифицируются отдельные линии с точки зрения соизмеримости. Ал-Ахвази дает следующие виды отдельных линий:

I. Рациональные (все рациональные линии соизмеримы);

II. Иррациональные:

1) соизмеримые и несоизмеримые в длине:

а) соизмеримые в длине — такие, которые относятся между собой как число к числу, т. е. одна из которых является

„выразимой“ частью от другой; например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ — для них $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\frac{2}{4}$, или $\frac{1}{2}\sqrt{8}=\sqrt{2}$ $\sqrt{54}$ и $\sqrt{6}$ — для них $\sqrt{54}=3\sqrt{6}$,

б) несоизмеримые в длине — такие, для которых не выполняется условие (а), например, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$ и $\sqrt{15}$;

2) соизмеримые и несоизмеримые в степени:

а) соизмеримые в степени — такие, которые несоизмеримы в длине, но квадраты их соизмеримы; например, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{\frac{8}{10}}$

б) несоизмеримые в степени — такие, у которых квадраты также несоизмеримы. Например, $\sqrt{\sqrt{3}}$ и $\sqrt{\sqrt{6}}$ $\sqrt{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{\sqrt{5}}$ Если даны две прямые, одна из которых рациональна, а вторая имеет первую степень иррациональности, то они несоизмеримы в длине, но соизмеримы в степени. Если же степень иррациональности этой линии выше первой, то они несоизмеримы ни в длине, ни в степени.

Таким образом, подробная классификация ал-Ахвази касается иррациональностей, данных Евклидом, но рассматриваемых с арифметической точки зрения. В то же время автор стремится строго следовать Евклиду даже в тех случаях, когда с позиции арифметики это не является необходимым. Например, классификация площадей, логически оправданная при геометрическом подходе, при арифметическом является повторением случая прямых линий. Правда, благодаря рассмотрению площадей ал-Ахвази получает возможность сформулировать и геометрически разъяснить факт неоднозначности разложения рационального числа на иррациональные сомножители.

В следующем разделе приведены шесть видов биномиалей, данных в книге X «Начал» [134, стр. 157]. Ал-Ахвази пишет: «Ранее мы упомянули, что у составных линий либо обе части иррациональны, либо одна рациональна, а другая иррациональна. Во втором случае либо рациональная часть больше, а иррациональная меньше, либо наоборот. Таким образом, имеется три вида, и к каждому из них применяется либо вычитание, либо сложение. Квадрат большей линии превышает квадрат меньшей линии на квадрат, сторона которого будет либо соизмеримой с большей частью, либо несоизмеримой. В зависимости от этого получается шесть видов и они называются биномиалями различных степеней».

Затем даются правила нахождения биномиалей (выражений вида $\sqrt{A}+\sqrt{B}$),), представленных числовыми иррациональностями:

I. Согласно „Началам", если $\sqrt{A-B}$ соизмерим с $\sqrt{A}$, и при этом $\sqrt{A}=a$ — рациональное число, то $a+\sqrt{B}$ — первая биномиаль. Ал-Ахвази дает правило нахождения первой биномиали: „Возьмем какой-либо квадрат a^2 и отнимем от него некоторое число c так, чтобы они относились между собой, как два квадратных числа; тогда первое квадратное число и корень из разности будет первой биномиалью", т. е. если $\frac{a^2}{c}=\frac{d^2}{e^2}$, где d, e — рационые числа, то $a+\sqrt{a^2-c}$ — первая биномиаль. Приведены примеры:

1) $3+\sqrt{8}$ $a^2=9, c=9-8=1, \frac{9}{1}=\frac{3^2}{1^2}$;

2) $3+\sqrt{5}$ $a^2=9, c=9-5=4, \frac{9}{4}=\frac{3^2}{2^2}$;

3) $4+\sqrt{15}$; $a^2=16, c=16-15=1, \frac{16}{1}=\frac{4^2}{1^2}$;

4) $4+\sqrt{7}$; $a^2=16, c=16-7=9, \frac{16}{9}=\frac{4^2}{3^2}$;

II. $\sqrt{A-B}$ соизмерим с $\sqrt{A}$ причем $\sqrt{B}=b$ — рациональное число; тогда $\sqrt{A}+b$ — вторая биномиаль. Дано правило: взять любое число a и прибавить к нему некоторое число c так, чтобы $\frac{c}{a^2+c}=\frac{d^2}{e^2}$, где d, e — рациональные числа. Тогда $\sqrt{a^2+c}+a$ — вторая биномиаль. Пример: $\sqrt{108}+9$; здесь $a=9$, $c=108-81=27$, $\frac{27}{108}=\frac{1^2}{2^2}$;

III. $\sqrt{A-B}$ соизмерим с $\sqrt{A}$ причем $\sqrt{A}$ $\sqrt{B}$ — иррациональны; тогда $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ — третья биномиаль. Правило: взять неквадратное число a и прибавить к нему некоторое число c так, чтобы $\frac{c}{a+c}=\frac{d^2}{e^2}$; тогда $\sqrt{a+c}+\sqrt{a}$ — третья биномиаль. Примеры:

1) $\sqrt{8}+\sqrt{6}$; здесь $a=6$, $c=8-6=2$, $\frac{2}{8}=\frac{1^2}{2^2}$;

2) $\sqrt{24}+\sqrt{18}$; $a=24$, $c=24-18=6$, $\frac{6}{24}=\frac{1^2}{2^2}$.

Аналогично рассматриваются остальные три биномиали. В заключение автор добавляет, что квадрат биномиали любого вида есть первая биномиаль.

В пятом разделе трактата дано извлечение корней из биномиалей. Ал-Ахвази считает возможным решить эту задачу как геометрически, т. е. следуя Евклиду, так и арифметически. Таким образом, он видит, что задача, поставленная Евклидом, равносильна решению системы двух уравнений второй степени.

Вначале рассматривается „арифметический путь“ Если дана биномиаль $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, где $\sqrt{A}>\sqrt{B}$ (автор специально подчеркивает, что первой берется большая часть независимо от того, рациональна она или иррациональна), то бо́льшую следует подразделить на части и так, чтобы

$$\sqrt{A}=a+b,\ ab=\frac{B}{4}.$$

Эта задача решается двояко. Первый способ „простой“, „обычный“; у других авторов он называется „алгебраическим“. Одна из искомых частей полагается неизвестной, тогда вторая есть $\sqrt{A}-x$. Отсюда $x\left(\sqrt{A}-x\right)=\frac{B}{4}$. Затем полученное уравнение должно быть приведено к одному из канонических видов.

Другой способ, который автор называет „сокращенным“, состоит в непосредственном применении выраженной словесно формулы решения квадратного уравнения $x^2-x\sqrt{A}+\frac{B}{4}=0$. Предлагается выполнить следующие действия:

1) $\frac{\sqrt{A}}{2}\cdot\frac{\sqrt{A}}{2}=\frac{A}{4}$,

2) $\frac{A}{4}-\frac{B}{4}$,

3) $\sqrt{\frac{A}{4}-\frac{B}{4}}$,

4) $a=\frac{\sqrt{A}}{2}+\sqrt{\frac{A}{4}-\frac{B}{4}}$,

5) $b=\frac{\sqrt{A}}{2}-\sqrt{\frac{A}{4}-\frac{B}{4}}$.

Таким образом, в результате действий 4) и 5) получены корни указанного уравнения, которые представляют собой искомые a и b. Корень из биномиали получится в результате сложения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ т. е.

$$\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}}{2}+\sqrt{\frac{A}{4}-\frac{B}{4}}}+$$
$$+\sqrt{\frac{\sqrt{A}}{2}-\sqrt{\frac{A}{4}-\frac{B}{4}}}$$

Ал-Ахвази описывает действия так: «А р и ф м е т и ч е с к и й п у т ь* Всегда будем брать первой большую часть составной линии, независимо от того, является большая часть рациональной или иррациональной. Подразделяем ее на две части так, чтобы произведение одной из них на другую было таким, как четверть квадрата меньшей. Имеются два метода для такого подразделения — простой и сокращенный.

Простой состоит в подразделении этой линии на две части, одна из которых полагается неизвестной; тогда вторая есть эта часть без неизвестной. Далее, неизвестная умножается на эту часть без неизвестной и говорится, что это — четверть квадрата меньшей линии.

Сокращенный [метод] состоит в том, что мы всегда берем половину большей линии, умножаем ее саму на себя, отнимаем от этого четверть квадрата меньшей линии и берем корень из разности. Складываем его с половиной большей части и вычитаем его из половины большей части. Тогда у нас получаются две искомые части.

Если мы нашли обе части, пользуясь одним из этих двух способов, то возьмем корень каждой из них, и сумма этих корней есть искомый корень.

Пример, касающийся первой биномиали — три и корень из восьми. Если мы хотим извлечь корень из этого согласно простому методу, то разделим три на две части, одна из которых — неизвестная, а вторая — три без неизвестной. Умножим неизвестную на три без неизвестной. Получится три неизвестных без квадрата и мы утверждаем, что это два. Следовательно, выходит, что одна из частей — один, а вторая — два.

Если же поступать согласно сокращенному методу, то возьмем половину трех и умножим ее саму на себя; получится два с четвертью. Отнимем от этого два; останется четверть. Возьмем корень из нее; будет половина. Прибавим ее к одной по-

* Здесь и дальше в цитатах разрядка наша. — *Г. М.*

ловине трех и вычтем ее из другой половины трех, тогда одна часть будет один, а вторая — два.

Далее берется корень из одного, это — один, и корень из двух — это корень из двух. Утверждается, что один и корень из двух — это корень из трех с корнем из восьми, то есть корень из числа — трех и корня из восьми».

Следуя «геометрическому пути» (рис. 16), ал-Ахвази, по существу, повторяет рассуждения из соответствующих предложений книги X, однако в деталях доказательство отличается от евклидовых. Приводим его полностью, как и арифметическое, потому что здесь мы видим характерный образец арифметико-геометрического подхода к решению поставленного вопроса: „Геометрический путь. Строим площадь, ограниченную первой биномиалью и линией, рациональной в длине. Пусть это будет площадь AB, биномиаль — линия AC, причем линия AD есть три, линия DC — корень из восьми, а линия AE — единица, рациональная в длине. Далее, разделим AD, которая есть три, пополам в точке W и, сделав эту точку центром, опишем около AD полуокружность — дугу $ARHD$. Далее, возьмем от $ARHD$ дугу, хорда которой есть DC. Пусть это — дуга DR и пусть хорда равна линии DC. Далее, разделим дугу RD пополам в точке H и проведем из нее перпендикуляр к F; пусть это линия HF. Продолжаем ее до точки I. Затем разделим линию DC пополам в точке K и построим на линии FK четырехугольник с равными сторонами — квадрат FL. Проведем линию DK и обозначим точку, в которой она пересекается с линией EB, точкой M.

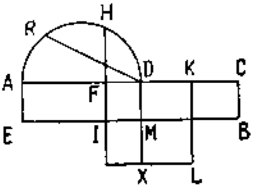


Рис. 16.

Утверждается, что линия HF равна каждой из двух линий DK и KC. Мы сделали RD такой же, как DC. HF есть синус дуги DH, т. е. половина дуги DH, являющейся половиной дуги DR. Однако синус всякой дуги — это половина хорды удвоенной дуги.

Следовательно, HF — половина линии DR. Но DR является такой же, как DC, а каждая из линий DK и KC есть половина линии DC. Следовательно, линия HF — такая же, как каждая из них.

Я утверждаю, что AF относится к FH, как FH к FD. Доказательство этого имеется у Евклида.

Я утверждаю также, что произведение AF на FD такое же, как квадрат DK, потому что AF — два, FD — один, а два на один — два. Но линия DK — корень из двух, следовательно, ее квадрат — два. Так как линия AD — три и она разделена пополам в W, то AW — полтора, и таким же является WD. Квадрат его — два с четвертью. Линия AD разделена на две различные части в F и линия FW — корень квадрата, который получается из избытка произведения AW на себя над произведением AF на FD, как мы упомянули в рассуждении втором. Произведение AW на WD есть два с четвертью. Согласно сказанному ранее (а именно, что линия HF такая же, как каждая из DK и KC, и что каждая из DK, KC есть корень из двух), HF — корень из двух. Произведение AF на FD такое же, как произведение FH на себя, а это — два. Следовательно, произведение AF на FD есть два. Избыток двух с четвертью над двумя — это четверть. Тогда линия FW — корень из четверти, то есть половина. Тогда у площади FX меньшая из двух сторон также один.

Линия XL — корень из двух, и она такая же, как MX. Следовательно, площадь ML есть два, и она такая же, как площадь AI, потому что она также есть два. Квадрат ML — такой же, как площадь AI. Дополнение его такое же, как дополнение IX, а IX — это KB. Следовательно, площадь AB равна квадрату FL. Но AB — это три и корень из восьми. Следовательно, площадь FL такая же. Но линия FK, то есть корень из квадрата FL, — это один и корень из двух. Итак, корень площади AB — это один и корень из двух. Это то, что мы хотели разъяснить».

Далее ал-Ахвази дает числовые примеры извлечения корней из различных видов биномиалей и подробно останавливается на первой биномиали. Согласно Евклиду (X, 54), «если площадь заключается между рациональной и первой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональной, так называемой биномиалью». Биномиаль же бывает шести видов, поэтому при извлечении корня из первой биномиали может быть получена биномиаль любого из этих видов. Ал-Ахвази иллюстрирует это примерами (примечательно, что в примерах числа записаны арабскими цифрами; в одном из них допущена ошибка):

(1) $326 + 28\sqrt{130}$ — первая биномиаль,

$\sqrt{326+28\sqrt{130}} = 14 + \sqrt{130}$ — вторая биномиаль;

(2) $14 + \sqrt{192}$ — первая биномиаль,

$\sqrt{14+\sqrt{192}} = \sqrt{6} + \sqrt{8}$ — третья биномиаль;

(3) $19+\sqrt{360}$ — первая биномиаль,

$\sqrt{19+\sqrt{360}}=3+\sqrt{10}$ — пятая биномиаль;

(4) $11+\sqrt{120}$ — первая биномиаль,

$\sqrt{11+\sqrt{120}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ — шестая биномиаль.

При извлечении корня из второй биномиали получается первая бимедиаль (X, 55). Приводится пример:

$$\sqrt{3+\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

При извлечении корня из третьей биномиали получается вторая бимедиаль

$$\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\sqrt{4\frac{1}{2}}}+$$
$$+\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Здесь рукопись обрывается, но сохранились заголовки трех оставшихся разделов. В 6 и 7 разделах ал-Ахвази рассматривал вычеты и извлечение корней из них, причем, по всей вероятности, полностью повторялось рассуждение разделов 4 и 5 и приводились числовые примеры. В последнем разделе приводится евклидова классификация квадратичных и биквадратичных иррациональностей, общее число которых 27.

Абу Джафар ал-Хазин «Комментарий к X книге сочинения Евклида»

Из математических сочинений ал-Хазина (см. гл. II, § 2, п. 25) до нас дошел лишь его «Комментарий к X книге сочинения Евклида» (шарх ал-мак̣āла ал-'āшира мин китāб Ук̣лидис), сохранившийся в нескольких рукописях (Париж, 2467/17; Берлин, 5924; Лейден, 1468—1469; Стамбул [672, стр. 461]). Омар Хайям сообщает, что ал-Хазин занимался решением кубического уравнения, которое до него рассматривал ал-Махани; «Считалось, — пишет Хайям, — что это решение невозможно, пока не явился Абу Джафар ал-Хазин, решивший это уравнение при помощи конических сечений» [339, стр. 69]. Свое решение ал-Хазин описал в специальном трактате [340, стр. 454].

Ниже предлагается обзор содержания комментария ал-Хазина к книге X «Начал» по парижской рукописи (2467, 17°, лл. 201—206 об) (рис. 17).

Трактат начинается с определения непрерывных величин, которые могут быть рациональными и иррациональными. Как и Аристотель, ал-Хазин различает пять видов непрерывных величин (линия, поверхность, тело, пространство, время) и утверждает, что непрерывность величин может иметь место, если «одна из них находится в отношении к другой, и одна из

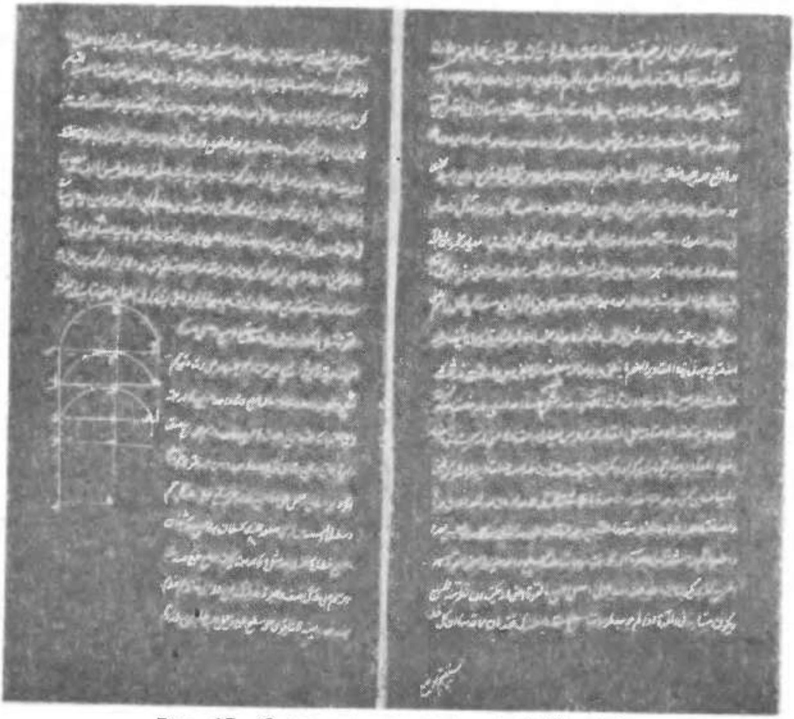


Рис. 17 Страницы из трактата ал-Хазина.

них измеряет другую». Находиться же в отношении между собой величины могут в том случае, если они однородны, а «однородные величины измеряются с помощью одной, однородной с ними величины и выражаются ею». Исходя из этого ал-Хазин дает определение рациональных и иррациональных величин. Если определенная величина выбрана как единица измерения и «если она содержится в некоторой данной величине один или много раз, то этой величине соответствует рациональное число. Например, длина тела измеряется заданной длиной — пядью, локтем или обхватом, плоская фигура измеряется площадью, полученной от умножения пяди, локтя или обхвата на себя; глубина измеряется с помощью куба, который получается от умножения заданной длины на себя и затем снова на себя; взвешиваемые тела измеряются взвешиванием, сыпучие тела —микъялями. Каждый раз, когда эта величина составляет половину, или треть, или четверть от другой, или составляет от нее три, пять или три пятых, то это — рациональная величина. И вообще, каждая величина, которая относится к этой величине, как число к числу, рациональна. Если же при сравнении с ней имеет место противоположное этому, то о ней говорят, что она иррациональна, т. е. что ее нельзя выразить иначе, чем с помощью корней; например, с помощью корня из трех и корня из пяти».

Особое внимание он уделяет разъяснению того, что иррациональная величина может быть измерена с помощью другой иррациональной величины (например, $\sqrt{5}$ есть $\frac{1}{3}$ от $\sqrt{45}$; $\sqrt{1\frac{1}{4}}$—половина от $\sqrt{5}$), но это не значит, что она является рациональной, так как сравнение должно производиться с выбранной заранее единичной мерой, по отношению к которой она иррациональна.

Ал-Хазин разъясняет понятия соизмеримости и подчеркивает их различие для величин и чисел: „Соизмеримые числа измеряются числом, но отличным от единицы. Единица, которая измеряет величины, является величиной, а единица, измеряющая числа, не является числом" Здесь автор становится на позицию древних, для которых единица, являясь „началом" чисел, сама числом не была.

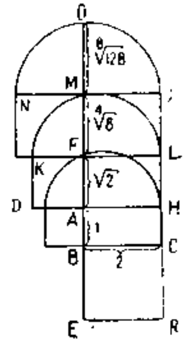


Рис. 18.

Подробно рассматриваются понятия соизмеримости и несоизмеримости степеней и предложение о том, что величины, соизмеримые в длине, будут одновременно соизмеримыми в степени, но не наоборот (см. «Начала», кн. X, стр. 111, следствие). Приводится геометрическая иллюстрация этого предложения (рис. 18): «Пусть AB — заданная прямая линия. Соединим ее под прямым углом с BC и построим на них два квадрата: DB и CE. Дополним площадь AC. Пусть AB есть единица, а BC — два. Тогда квадрат DB — один, а квадрат EC — четыре. Следовательно, квадрат линии AB содержится в квадрате линии BC четыре раза. Проведем на DH полуокружность DFH и продолжим AB до точки F. Линия AF есть корень из двух, потому что она квадрирует площадь AC. Следовательно, они несоизмеримы.

Построим на AF квадрат КА и дополним площадь FH. Так как всякое дополнение является средним [геометрическим] между квадратами сторон, ограничивающих его, и квадрат KA есть два, а квадрат линии AH, равный CE, есть четыре, то площадь FH будет корнем из восьми. Проведем на KL полуокружность KML и продолжим AF до точки M. Тогда линия FM — корень корня из восьми, потому что она квадрирует площадь FH. Построим на ней квадрат FN и дополним площадь ML. Тогда квадрат FN—корень из восьми—будет таким же, как площадь FH, а квадрат линии FL — таким же, как квадрат линии BC. Умножим корень из восьми на себя и четыре на себя, затем умножим восемь на шестнадцать и получим сто двадцать восемь. Корень корня из этого есть площадь ML.

Этот метод, который применяется не раз, состоит в том, что квадрат FN умножается на себя и дает рациональную степень; линия FL умножается на себя, а то, что получится, — еще раз на себя; затем из результата извлекается на один корень больше предыдущего; то, что получится—это дополнение ML. Проведем на XN окружность NOX и продолжим FM до O. MO — это корень корня корня из ста двадцати восьми, потому что она квадрирует дополнение ML.

Таким образом, BC соизмерима с AB в длине и соизмерима с ней также и в степени, потому что квадрат DB содержится в квадрате EC четыре раза. AF несоизмерима с ней только в длине, потому что AB не измеряет AF, но квадрат DB измеряет квадрат AK. FM несоизмерима с ней ни в длине, ни в степени, потому что квадрат DB не измеряет FN. Следовательно, BC по отношению к AB рациональна в длине, AF рациональна только в степени, а FM не является рациональной и в степени. И так далее до бесконечности».

Классификация отдельных величин, данная ал-Хазином, по существу повторяет евклидову классификацию:

I. Абсолютно рациональные (т. е. рациональные в длине);

II. Иррациональные в длине, но рациональные в степени;

III. Абсолютно иррациональные:

1) иррациональная в первой степени — медиаль,

2) иррациональная во второй степени и т. д.

Далее ал-Хазин переходит к классификации составных величин, выделяя, вслед за Евклидом, иррациональности, полученные сложением и вычитанием, после чего разъясняет основные предложения книги X относительно биномиалей и вычетов. В основном автор придерживается хода мыслей и терминологии «Начал», но в ряде случаев отступает от них. Например, разъясняя понятие «линии, квадрирующей площадь», он говорит, что это —«корень из квадрата, равного ей».

При рассмотрении биномиалей он показывает, что „три биномиали получаются из равностороннего треугольника, а три другие — из рационального квадрата“ при различных значениях сторон. Действительно (рис. 19), если сторона треугольника $a = 4$, то высота $h = \sqrt{12}$. Тогда квадрат стороны a^2 превышает квадрат высоты h^2 на 4, что соизмеримо с корнем из a, т. е. 2, в длине. Следовательно, $a + h = 4 + \sqrt{12}$ есть первая биномиаль.

Если $a = \sqrt{12}$, то $h = 3$ и $a^2 - h^2 = 3$; так как при этом $\sqrt{12}$ соизмерим с $\sqrt{3}$, то $a + h = \sqrt{12} + 3$ — вторая биномиаль.

Если $a = \sqrt{8}$, то $h = \sqrt{6}$; $a^2 - h^2 = 2$ и $\sqrt{8}$ соизмерим с $\sqrt{6}$. Следовательно, $a + h = \sqrt{8} + \sqrt{6}$ — третья биномиаль.

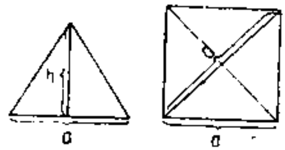


Рис. 19.

Для получения остальных биномиалей рассматривается квадрат. Пусть его сторона $a = 4$, тогда половина его диагонали $\frac{1}{2} d = \sqrt{8}$. Так как $a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 16 - 8 = 8$ и 4 несоизмеримо с $\sqrt{8}$ в длине, то $a + \frac{d}{2} = 4 + \sqrt{8}$ есть четвертая биномиаль.

Аналогично и для других случаев. В частности, шестая биномиаль $\sqrt{10} + \sqrt{5}$ получается при $a = \sqrt{10}$.

Юханна ибн Юсуф ибн Харис «Трактат о рациональных и иррациональных величинах»*

Из сочинений Юханны ибн Юсуфа (см. гл. II, § 2, п. 26) до настоящего времени сохранился лишь «Трактат о рациональных и иррациональных величинах» (маḳāла фӣ-л-муḳāдӣру ал-мантиḳу ва ал-самму) — перевод его сделан с рукописи 2457, 48° лл. (199 об.—203 об.) Парижской Национальной библиотеки.

Помимо рациональных и иррациональных величин, в трактате затронуто много других вопросов, вызывавших на средневековом Востоке споры философского характера.

Сочинение начинается с рассуждения об «исходных положениях и началах», которые приняты для каждого искусства, и, в том числе, для геометрии. Истинность их, по словам Юханны, установлена «первым философом» — как называли на средневековом Востоке великого греческого мыслителя

* За помощь в работе над переводом этого трактата, а также «Трактата о соизмеримых и несоизмеримых величинах» Ибн ал-Багдади приношу глубокую благодарность Б. Я. Ошерович.

Аристотеля, труды которого пользовались огромной популярностью. Его учение о непрерывном и дискретном, об актуальной и потенциальной бесконечности и др. наложило свой отпечаток на развитие как философии, так и математики того времени.

Согласно Аристотелю, установление и рассмотрение первичных понятий —«начал»— всякой дедуктивной науки, в том числе и геометрии, находится вне сферы занятий геометра: они устанавливаются философом, математик же должен «приступать к доказательству, уже будучи знакомым с этими аксиомами, а не заниматься только еще их установлением» [6, стр. 62]. На той же точке зрения стояли и ученые средневекового Востока; так, Омар Хайям писал: «Что касается точки, линии, поверхности, угла, круга, прямой линии, плоской поверхности и тому подобных принципов, то их установлением и истинным определением занимаются те, кто владеет общей наукой философии» [339, стр. 114].

Хотя при рассмотрении основных философских вопросов науки большинство ученых того времени стояли на позициях аристотелизма, по поводу некоторых понятий между математиками велись постоянные дискуссии. К таким спорным вопросам относилась проблема применения движения в геометрии. Аристотель считал, что «математические предметы чужды движению, за исключением тех, которые относятся к астрономии» [7, стр. 33], некоторые же восточные ученые значительно отошли от этого положения. Бану Муса [119], Сабит ибн Корра ал-Харрани [298], а позднее Ибн ал-Хайсам [154]и Ибн Сина [11, 12] смело ввели в геометрию движение. Сабит ибн Корра применил его для определения круга иным способом, чем это сделал Евклид, а Ибн ал-Хайсам — для определения параллельных линий. Против таких взглядов выступил Омар Хайям [339, стр. 115], а затем Насир ад-Дин ат-Туси [328, стр. 486]. К ним присоединялся и Юханна ибн Юсуф, как это видно из данного трактата.

Разъясняя вопрос о «началах» геометрии, он привлекает в качестве примера определение круга, данное Евклидом, и утверждает, что оно должно быть принято за одно из «начал». Юханна показывает, что определение круга с помощью движения приводит к противоречию с основными положениями философии Аристотеля (например, с положением о том, что линия непрерывна, а точка является частью линии).

Далее Юханна останавливается на вопросе о бесконечной делимости линии и критикует взгляд, согласно которому линия представляет собой совокупность некоторого конечного числа точек. Он считает, что положение о бесконечной делимости линии относится также к «началам», а потому для него не требуется доказательства, «как думают некоторые люди». Что касается разъяснения этого положения, то оно, по его мнению, дано Аполлонием, показавшим во второй книге трактата о свойствах конических сечений, что существуют две линии (гипербола и ее асимптота), которые бесконечно сближаются, но не пересекаются. В связи с этим автор затрагивает еще один важный вопрос математики средневекового Востока — об определении параллельных линий. Он предупреждает, что «осторожность по отношению к пересекающимся линиям нужна некоторым людям, когда они определяют параллельные линии как линии, расстояния между которыми равны, и, наоборот, утверждают, что линии, расстояния между которыми не равны, пересекаются». И дальше: «Чтобы не было сомнений в нашем рассуждении, нужно разъяснить, что эти две линии являются прямыми. Если же мы безусловно утверждаем, что линии, расстояния между которыми не равны, пересекаются, то такое утверждение ошибочно, ибо противоречит тому, что объяснил Аполлоний. Оно станет правильным только после того, как мы поставим условие относительно линий». Более подробно этот вопрос, говорит Юханна ибн Юсуф, он рассмотрел в своем (сейчас утерянном) сочинении «О пересечении двух прямых линий, выходящих из концов прямой линии под углом меньшим, чем два прямых».

Автор отмечает, что положение о бесконечной делимости прямой линии разъяснил также Евклид в «Началах» (кн. I, предложение 10), показав, что всякую ограниченную прямую можно разделить пополам. Затем он предлагает несколько иное, чем у Евклида, доказательство этой теоремы.

Во второй части трактата рассматриваются соизмеримые и несоизмеримые величины. Так как, говорит Юханна, величины (линии, площади и тела) потенциально делимы до бесконечности, то метод их изучения отличается от метода изучения чисел: «Для чисел существует что-то, что пересчитывает их все и измеряет, то есть единица. Для величин подобного ей не существует». Или, его же словами, «все числа соизмеримы, а величины не все являются соизмеримыми». Соизмеримые величины — это те, которые относятся между собой, как число к числу; те же, которые несоизмеримы, называются «глухими», или иррациональными. Это определение, говорит автор, основано на измерении, когда «мы предполагаем некоторую величину и допускаем, что это локоть, фут, или пядь, т. е. что она является мерой»; если при сопоставлении этой меры с однородной с ней величиной оказывается, что последняя является долей, долями, кратным, «кратным и долей», «кратным и долями» и т. д. (см. гл. III), то она рациональна; в противном случае она иррациональна. Если же величина рассматривается сама по себе, без сопоставления ее с данной мерой, то о ней нельзя сказать, рациональна она или иррациональна. С другой стороны, величина, иррациональная при сравнении с данной мерой, при выборе другой меры может оказаться рациональной. Аналогичное рассуждение об относительности понятия рациональности и иррациональности данной прямой находится в комментарии Паппа к книге X Евклида [618, стр. 68—69].

В заключение Юханна ибн Юсуф приводит числовые примеры соизмеримых иррациональных величин: $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2\frac{1}{2}}$ соизмеримы, так как $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$; $\sqrt{15}$ и $\sqrt{1\frac{2}{3}}$ также соизмеримы, так как $\frac{\sqrt{1\frac{2}{3}}}{\sqrt{15}}=\frac{1}{3}$.

Ибн ал-Багдади «Трактат о соизмеримых и несоизмеримых величинах»

Сочинение Абд-Аллаха ал-Хасана ибн Мухаммада ибн Хамлы, называемого также Ибн Ал-Багдади (фӣ-л-муḳāдиру ал-мутабайяна ва-л-мушатарика), как и имя его автора, впервые получило известность благодаря публикации в 1948 г. в Хайдарабаде арабского текста [738].

Имя Ибн ал-Багдади появилось еще раз в историко-математической литературе в самое последнее время в связи с публикацией сочинения «Об индийских рашиках» Абу-р-Райхана Мухаммада ибн Ахмада ал-Бируни [289], который, ссылаясь на работы своих предшественников и современников по теории составных отношений, наряду с Сабитом ибн Коррой, Абу-л-Аббасом ал-Найризи, Абу Джафаром ал-Хазином, Абу Саидом ас-Сиджизи упоминает и Ибн ал-Багдади. Вероятнее всего, имеется в виду автор данного трактата. Кроме того, в анонимной рукописи* «Трактат о секущих», хранящейся в Стамбуле и описанной М. Краузе [672, стр. 530], Ибн ал-Багдади наряду с ан-Найризи, Сабитом ибн Коррой, ас-Сиджизи, Абу-л-Вафой, ал-Ходжанди, Абу Насром ибн Ираком и Кушьяром ибн Лаббаном ал-Джили назван как ученый, занимавшийся доказательством «начал» астрономии.

* Эта рукопись недавно переведена на русский язык Б. А. Розенфельдом и Н. Г. Хайретдиновой.

Основываясь на этих указаниях, можно считать, что Ибн ал-Багдади жил и работал самое позднее в конце X — начале XI в. Со временем, видимо, будут найдены и более точные сведения об этом ученом, сочинения которого представляют несомненный интерес для истории математики.

Ибн ал-Багдади ставит цель — согласовать правила действий над числовыми иррациональностями с основными положениями «Начал» и тем самым доказать правомерность современных ему вычислительных методов. Он отмечает, что применение числовых иррациональностей имеет большие преимущества, так как «предположение числа и следование ему легче подобного предположения относительно величины и даже более истинно». В то же время он, следуя Аристотелю, исходит из принципиального различия между числом и величиной («предметом счета»).

Число определяется как то общее, что присуще совокупности каких-либо однородных или неоднородных величин. Так, утверждается, что если взято четыре неоднородных предмета, например, человек, лошадь, линия и поверхность, то им присуще то же, что присуще четырем человекам, четырем лошадям, четырем линиям или четырем поверхностям, т. е. число четыре. Таким образом, каждому множеству предметов ставится в соответствие число.

Точно так же устанавливается соответствие между числами и рациональными величинами (изображаемыми отрезками), под которыми Ибн ал-Багдади понимает единичную величину, кратное ей и ее долю; т. е. если a — единичная величина, то к рациональным величинам относятся a, an и $\frac{a}{n}$ где $n = 1, 2, 3,\ldots$ К ним добавляются также «доли». Данные таким образом рациональные величины относятся между собой, как число к числу, т. е. для них верно предложение 5 книги X «Начал».

Иррациональными Ибн ал-Багдади считает величины, не являющиеся «долями»; это касается, например, среднего геометрического между рациональными величинами, которые относятся между собой, как два последовательных числа. Эти величины — утверждает автор — имеют те же свойства, что и иррациональные величины Евклида.

Для установления связи между геометрическим и арифметическим подходом к иррациональности разъясняется понятие корня из числа и корня из величины: «Корень имеется у чисел и величин, рациональных и нерациональных. Он является средним между данным числом и единицей или между единичной величиной и величиной иррациональной. Единица по своему происхождению не относится ни к иррациональным, ни к рациональным величинам.

Различие между корнем из числа и корнем из величины состоит в том, что корень из числа либо существует, либо не существует. Что касается корня из величины, то он необходимо существует, однако может быть либо рациональным, либо иррациональным. У квадратного числа имеется один корень, не превосходящий его».

Ибн ал-Багдади излагает способы графического изображения корней, причем особенно интересно, что он проводит мысль, противоречащую принципам геометрической алгебры: по его мнению, «то, что образуется из умножения одной из двух однородных величин на другую, есть величина, однородная с ними, средняя между их квадратами», и это справедливо для линий, плоскостей и тел. В геометрической алгебре под произведением двух величин, изображаемых линиями, понимается площадь прямоугольника, построенного на этих линиях. Согласно же Ибн ал-Багдади, произведение двух линий есть линия, двух площадей — площадь, а двух тел — тело.

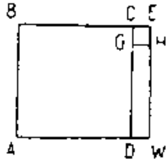


Рис. 20.

В соответствии с этим он решает вопрос об изображении корня, считая, что, если число представлено квадратом, то за корень следует принять не его сторону, а «плоскую фигуру, которую ограничивает сторона этого четырехугольника и линия, перпендикулярная к ней и квадрирующая единицу». Это разъясняется в следующем рассуждении, из которого вытекает, что изображенный таким образом корень удовлетворяет данному определению (рис. 20) «Пусть квадратом величины будет равносторонний прямоугольный четырехугольник *ABCD*, а корнем из квадрата величины — четырехугольник *CDEW* Пусть плоская фигура, равная единице, есть равносторонний прямоугольный четырехугольник *CEHG*. Так как линии *AD* и *CD* равны и линии *EC* и *CG* равны, то *AD* относится к *CE*, как *DC* к *CG*. Четырехугольник *ABCD* относится к плоской фигуре *CEWD*, как *AD* к *CE*, а плоская фигура *CEWD* относится к четырехугольнику *GHCE*, как *CD* к *CG*. Следовательно, четырехугольник *ABCD* относится к плоской фигуре *CEWD*, как *CEWD* к плоской фигуре *CEHG* и, следовательно, плоская фигура *CEWD* есть корень четырехугольника *ABCD*». Далее Ибн ал-Багдади пишет: «Мы нашли многочисленные древние книги, где корень и квадрат изображались, как на этом чертеже. Последующие ученые находили громоздким прибавление четырехугольников *CEWD* и *CEHD* к четырехугольнику *ABCD*.

Они ограничивались тем, что для краткости отделяли от линии CD линию CG, квадрирующую единицу, и, не желая повторять определение, предполагали, что линия CG есть корень четырехугольника $ABCD$».

Целесообразность такого понимания корня Ибн ал-Багдади объясняет так: «Если бы линия, квадрирующая плоскую фигуру, была бы ее корнем, то существовала бы равная ей и отделенная от площади линия, и к этому следует добавить, что она также могла бы быть корнем квадрата величины, подобного данному. Но квадрат может быть корнем или корнем корня, а это нельзя изобразить линией, квадрирующей площадь, потому что если бы мы предположили, что линия есть корень корня, то не нашли бы категории

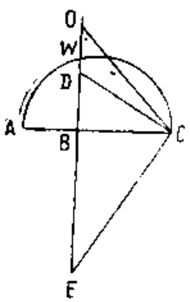


Рис. 21.

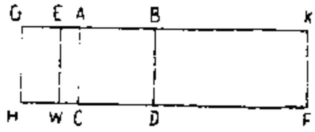


Рис. 22.

величин, из которых извлекался корень. Аналогично, если корни возводятся в квадрат. Так как мы предположили, что корень есть среднее между единичной величиной и квадратом величины, то это приводит к тому, что полученный результат находится в том же роде величин и не выходит из него».

Таким образом, если считать, что при умножении двух однородных величин или при извлечении корня из величины получается величина, однородная с данной, то оказывается возможным графически изобразить результат многократного возведения данной величины в квадрат или повторного извлечения корня из нее. Ибн ал-Багдади показывает это на примерах для линий и площадей и отмечает, что то же легко сделать и для тел. Он строит последовательно отрезки, являющиеся средними геометрическими между данными и единичным отрезками, удовлетворяющие приведенному выше определению корня, корня из корня и т. д. (рис. 21). Так же он поступает и с площадями, причем рассматривает не только соответствующие четырехугольники (рис. 22), но и треугольники с равными высотами, удовлетворяющие нужному условию. Он говорит: «Начнем с прямых линий. Предположим, что величина квадрата есть линия BC. Пусть единичная величина есть AB. Описываем на линии AC полуокружность AWC. Проводим из точки B перпендикуляр BW к линии AC. Следовательно, BW будет корнем из BC. Далее, если мы восстанавливаем величину, для которой BC есть корень, то рассмотрим величину AB, выделяя ее из величины BW Если AB больше нее, то продолжим BW до E, пока BE не станет равной AB. Затем из точки C проведем линии к точкам E и D. В точке C образуем с линией CD или EC прямой угол и проведем из точек B, C линии BE и CE, которые встречаются в точке E.

Линия BC есть корень из BE, а BW — корень из ее корня. В этом состоит то, что мы хотели получить для повторного извлечения корня из BE.

Предположим, что величина квадрата есть прямоугольная четырехугольная плоская фигура $ABDC$. Единичная величина есть плоская фигура $EACW$, причем их высоты равны. Проводим линию WH — среднюю между линиями WC и CD — и дополняем плоскую фигуру $GEWH$. Так как плоская фигура CE относится к плоской фигуре GW, как плоская фигура GW к плоской фигуре AD, то плоская фигура GW есть корень из AD.

Если мы восстанавливаем плоскую фигуру, для которой AD есть корень, то проведем из точки D линию DF и предположим, что WC относится к CD, как CD к DF. Дополним плоскую фигуру $BKFD$. Следовательно, плоская фигура $GEWH$ есть корень корня плоской фигуры $BKDF$.

Подобно тому, как мы поступили для повторного извлечения корня с площадями прямоугольных четырехугольников, поступим и с площадями треугольников, имеющих одну и ту же высоту».

Далее Ибн ал-Багдади переходит к исследованию «величин различных степеней иррациональности»; он называет:

1) рациональную только в степени — иррациональностью 1-й степени;

2) медиаль — иррациональностью 2-й степени;

3) вторую медиаль — иррациональностью 3-й степени и т. д. Интересно отметить своеобразную символику Ибн ал-Багдади: величины первой степени иррациональности, представляющие собой корни из чисел, он обозначает одним нулем («величина, имеющая один нуль»); величины второй степени иррациональности — двумя нулями; величины 3-й степени иррациональности — тремя и т. д.

Поставив цель показать, что «между каждыми двумя рациональными величинами имеется бесконечное число величин различных степеней иррациональности», автор предлагает «изображать рациональные величины числами» и рассматривает следующий пример: «Предположим, что величины 2 и 3 рациональны, и пусть первая из них относится ко второй, как число к числу, причем эти числа последовательны. Пусть величина 2 будет корнем величины 4, а величина 3 — корнем величины 9. Мы предполагаем, что между величинами 4, 9 имеются величины 5, 6, 7, 8, превосходящие друг друга на единичную величину, а между величинами 2, 3 — величины, изображаемые одним нулем, количество которых равно количеству величин 5, 6, 7, 8. Будем считать их корнями величин 5, 6, 7, 8. Так как отношение величины 2 к величине 3 такое же, как отношение двух последовательных чисел, то все величины, обозначенные нулями, которые находятся между ними, иррациональны. А так как величина 4 относится к величине 9, как квадратное число к квадратному числу, примыкающему к нему и не измеряющему его, то среди чисел, соответствующих величинам 5, 6, 7, 8, нет квадратного числа.

Таким образом, все величины, которые находятся между величинами 4 и 9, рациональны, а всякая величина из обозначенных нулями — рациональна только в степени. Это касается величин первой степени иррациональности.

Так как невозможно, чтобы между величинами 4 и 9 была какая-либо рациональная величина, отличная от величин 5, 6, 7, 8, то невозможно, чтобы между величинами 2, 3 была какая-то величина, рациональная только в степени и отличная от упомянутых величин, обозначенных одним нулем, число которых приведено выше».

Рассмотренный пример представлен так (вместо корней стоят нули):

$$\begin{array}{cccccc}
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
2 & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} & \sqrt{8} & 3.
\end{array}$$

Аналогичное рассуждение проведено для величин второй степени иррациональности на следующем примере (двойной корень изображен двумя нулями):

$$\begin{array}{cccccc}
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\
4 & \sqrt{17} & \sqrt{18} & \sqrt{19} & \sqrt{20} & \sqrt{21} \\
2 & \sqrt{\sqrt{17}} & \sqrt{\sqrt{18}} & \sqrt{\sqrt{19}} & \sqrt{\sqrt{20}} & \sqrt{\sqrt{21}} \\
\sqrt{2} & \sqrt{\sqrt{\sqrt{17}}} & \ldots & \ldots & \ldots & .
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
22 & 23 & 24 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \\
\sqrt{22} & \sqrt{23} & \sqrt{24} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\sqrt{\sqrt{22}} & \sqrt{\sqrt{23}} & \sqrt{\sqrt{24}} & \sqrt{5} & & & & \\
 & & \sqrt{\sqrt{\sqrt{24}}} & \sqrt{\sqrt{5}} & & & &
\end{array}
$$

Таким образом, если рациональные величины изображаются числами, то по аналогии с этим Ибн ал-Багдади предлагает изображать величины 1-й степени иррациональности корнем, величины 2-й степени иррациональности — корнем из корня и т. д. Другими словами, речь идет об установлении однозначного соответствия между ними и о представлении иррациональных величин числовыми иррациональностями вида $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[8]{a}, \ldots$ Ибн ал-Багдади говорит по этому поводу: „Поистине то, что сказано нами выше, является светом для тех, кто не довольствуется геометрией. Доказательство с помощью геометрии ограничивает свойства этих величин. Я применил число, представив величину, имеющую один нуль, корнем величины, которая ее превосходит, а величину, имеющую два нуля — как корень ее корня"

Как и Евклид, Ибн ал-Багдади фактически ограничивается величинами второй степени иррациональности, но постоянно подчеркивает, что аналогичное рассуждение может быть проведено и для более высоких степеней.

Ибн ал-Багдади доказывает несколько вспомогательных предложений, например:

«Каждая величина, рациональная только в степени, есть среднее между двумя величинами, рациональными в длине»;

«Всякая медиаль есть среднее между двумя величинами, рациональными только в степени»;

«Если величина, рациональная в длине, относится к величине, рациональной в степени, как величина, рациональная в длине, к другой величине, то последняя рациональна в степени»;

«Пусть даны величины A и B, корни которых суть величины C и D, и пусть величины C и D соизмеримы в длине; тогда величина A относится к величине B, как квадратное число к квадратному числу»;

«Если приложить рациональную площадь к линии, рациональной только в степени, то ее ширина рациональна только в степени, причем длина и ширина соизмеримы в длине»;

«Если умножить линию на медиальную линию и полученное при этом рационально, то данная линия медиальная»;

«Для любых двух величин, рациональных только в степени и соизмеримых в длине, отношение квадрата одной из них к квадрату другой (или то, что получено при делении одного из них на другой) — такое же, как отношение двух подобных плоскостных чисел».

Уже из этих формулировок видно, как Ибн ал-Багдади, неотступно следуя за Евклидом в целях сохранения строгости, иногда становится на точку зрения математика-вычислителя своего времени. Так, он формулирует и доказывает предложение 26 из книги VIII «Начал» о том, что два плоских подобных числа относятся между собой, как квадрат к квадрату, а дальше продолжает высказанную мысль, уже выражая взгляд вычислителя: если одно из двух подобных плоских чисел делится на другое, тогда частное есть квадрат. Термин «частное от деления», постоянно употребляющийся и при рассмотрении числовых примеров, в одном из предложений оказывается равносильным термину «отношение». Как и у других математиков этого времени, у Ибн ал-Багдади встречается выражение «умножить линию на линию», а в третьем — арифметическом — разделе трактата употребляются как равносильные термины «число», «линия», «величина».

Доказав вспомогательные предложения, автор опять переходит к «предложениям о числе» и на числовых примерах устанавливает зависимости между иррациональностями различных порядков: «Рассмотрим три величины, рациональные в длине, последовательно пропорциональные, а также их квадраты и квадраты их квадратов: два, четыре, шестнадцать, четыре, шестнадцать, двести пятьдесят шесть, восемь, шестьдесят четыре, четыре тысячи девяносто шесть.

Известно, что между ними находится несколько величин, рациональных только в степени, а также их квадраты и квадраты их квадратов: корень из восьми, восемь, шестьдесят четыре, корень из тридцати двух, тридцать два, тысяча двадцать четыре. Между каждой величиной, рациональной в длине и рациональной в степени, находятся медиали, их квадраты и квадраты их квадратов: корень корня из тридцати двух, корень из тридцати двух, тридцать два; корень корня из ста двадцати восьми, корень из ста двадцати восьми, сто двадцать восемь; корень корня из пятисот двенадцати, корень из пятисот двенадцати, пятьсот двенадцать; корень корня из двух тысяч сорока восьми, корень из двух тысяч сорока восьми, две тысячи сорок восемь. Изобразим это на чертеже:

Первый разряд	2	00	0	00	4	00	0	00	8
Второй разряд	4	0	8	0	16	0	32	0	0
Третий разряд	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Отношение первой величины каждого из этих трех разрядов ко второй из них такое же, как отношение второй к третьей, третьей к четвертой и так далее. Поэтому то, что получено от умножения величины два на вторую величину с нулем, относящуюся к первому разряду, есть первая величина с нулем из второго разряда. Таким же образом то, что получено от умножения первой величины с нулем из первого разряда на третью величину с нулем из этого разряда, есть величина из второго разряда, которую определяет восемь. То, что получено от умножения второй величины с нулем из первого разряда на четыре, есть вторая величина с нулем из второго разряда.

Таким же образом обстоит дело во втором разряде. Снова умножение первой величины с нулем из второго разряда на вторую величину с нулем из этого разряда дает величину шестьдесят четыре из третьего разряда. Умножение второй величины с нулем на третью величину с нулем дает величину двести пятьдесят шесть из третьего разряда. Аналогично в других случаях. Первая величина с нулем из первого разряда несоизмерима с двумя в длине. Вторая и третья величины с нулем несоизмеримы с двумя, четвертая и пятая — с четырьмя. Первая и третья величины, имеющие нуль, относящиеся к первому разряду, являются медиальными; они окружают рациональную величину восемь. Таким же образом третья и четвертая величины с нулями являются медиальными и произведение первой из них на вторую есть шестнадцать. Четвертая и шестая величины с нулями медиальны, и произведение первой из них на вторую рационально есть тридцать два.

Что касается первой и четвертой величин с нулями, то они медиальны, и произведение первой из них на вторую есть величина рациональная. Это — величина с нулем, находящаяся во втором разряде; квадрат ее есть сто двадцать восемь.

Таким же образом третий и шестой нули первого разряда медиальны, а произведение их рационально и является нулем второго разряда, квадрат которого есть пятьсот двенадцать.

Обнаружено также, что то, что окружено квадратами медиалей, делится на рациональное или медиальное. Это свойство найдено нами у медиалей, для которых произведение первой на вторую есть рациональная величина, если они соизмеримы в длине или соизмеримы только в степени. Что касается медиальных, у которых произведение первой на вторую есть медиальная величина, то если мы нашли соизмеримость только в длине, то увеличивается число повторений. Медиали, соизмеримые только в степени, у которых произведение первой из них на вторую медиально, будут находиться в другой последовательности.

Покажем это. Предположим, что известны три обозначенные числами последовательные величины, квадраты их и квадраты их квадратов — два, четыре, шестнадцать; три, девять, восемьдесят один; четыре, шестнадцать, двести пятьдесят шесть. Известно, что между ними существуют величины, рациональные в степени, квадраты их и квадраты их квадратов — корень из шести, шесть, тридцать шесть; корень из двенадцати, двенадцать, сто сорок четыре. Далее известно, что два, корень из шести и корень из двенадцати соизмеримы только в степени.

Если мы берем медиаль, которая находится между двумя и корнем из шести, т. е. корень корня из двадцати четырех, то найдем медиаль, которая соизмерима с ней только в степени, и произведение первой из них на вторую медиально в том, что находится между корнем из двенадцати и четырьмя и является средним в величинах, но не в отношении. Это — корень корня из двухсот шестнадцати. Отношение рациональной в длине к большей рациональной в степени такое же, как отношение первой из двух медиалей ко второй. Это то, что мы хотели разъяснить».

Итак, рассматриваются числа 2, 4, 8, их квадраты 4, 16, 64 и четвертые степени 16, 64, 2048, а затем средние геометрические между ними:

1-й разряд	2	$\sqrt{\sqrt{32}}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{\sqrt{128}}$	4	$\sqrt{\sqrt{512}}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{\sqrt{2048}}$	8
2-й разряд	4	$\sqrt{32}$	8	$\sqrt{128}$	16	$\sqrt{512}$	32	$\sqrt{2048}$	64
3-й разряд	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Для 1-го разряда имеют место соотношения (для других — аналогично):

$$\frac{2}{\sqrt{\sqrt{32}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{32}}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt{128}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{128}}}{4}\,\frac{4}{\sqrt{\sqrt{512}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{512}}}{\sqrt{32}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{\sqrt{2048}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2048}}}{8}$$

Отсюда следует:

1) $2\sqrt{18}=\sqrt{32}$, т. е. от умножения 2 на вторую „величину с нулем“ из первого разряда получается первая „величина с нулем“ из второго разряда;

2) $\sqrt{\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\sqrt{128}}=8$, т. е. от умножения первой величины с нулем из первого разряда на третью получается рациональная величина 8 из второго разряда;

3) $\sqrt{8}\cdot 4=\sqrt{128}$;

4) $\sqrt{32}\ \ \sqrt{128}=64$;

5) $\sqrt{128}\cdot\sqrt{512}=256$;

6) $\sqrt{\sqrt{128}}\cdot\sqrt{\sqrt{2048}}=\sqrt{512}$;

такая же закономерность наблюдается и для величин 2-го разряда: от перемножения „величин с нулями“ получается соответствующая величина 3-го разряда:

7) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{128}=64$;

8) $\sqrt{128}\ \ \sqrt{512}=256$;

9) $\sqrt{512}\cdot\sqrt{2048}=1024$.

Устанавливается, что 1-я, 2-я и 3-я величины с нулями несоизмеримы с 2, а 4-я, 5-я и 6-я — с 4, т. е. они линейно не соизмеримы. Отмечается, что 1-я и 3-я величины с нулями из первого разряда, т. е. $\sqrt{\sqrt{32}}$ и $\sqrt{\sqrt{128}}$, медиальны, а произведение их есть рациональная величина 8. То же самое получается для 3-й и 4-й величин $\left(\sqrt{\sqrt{128}}\times\times\sqrt{\sqrt{512}}=16\right)$ и для 4-й и 6-й величин $\left(\sqrt{\sqrt{512}}\times\times\sqrt{\sqrt{2048}}=32\right)$.

В то же время 1-я и 4-я „величины с нулями“ из первого разряда, т. е. $\sqrt{\sqrt{32}}$ и $\sqrt{\sqrt{512}}$, медиальны, соизмеримы в длине и произведение их рационально (в степени) и равно $\sqrt{128}$. То же относится к 3-й и 6-й величинам с нулями: $\sqrt{\sqrt{128}}$ и $\sqrt{\sqrt{2048}}$; они медиальны, а произведение их $\sqrt{512}$ рационально в степени. Обратно: по квадрату медиали можно найти его рациональные и медиальные делители.

Итак, рассмотрены случаи:

1) когда произведение двух медиалей есть рациональная величина (эти медиали либо соизмеримы в длине, либо соизмеримы только в степени);

2) когда произведение двух медиалей, соизмеримых только в степени, рационально.

Относительно медиалей, произведение которых медиально, приводится другой пример: даны три последовательные рациональные величины 2, 3, 4, а также квадраты их, квадраты их квадратов и находящиеся между 2, 3 и 4 величины первой и второй степеней иррациональности: величины между 2 и 3 суть $\sqrt{\sqrt{24}}$ и $\sqrt{6}$, а между 3 и 4 суть $\sqrt{12}$ и $\sqrt{\sqrt{192}}$. А именно:

1-й разряд	2	$\sqrt{\sqrt{24}}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{\sqrt{192}}$	4
2-й разряд	4	$\sqrt{24}$	6	9	12	$\sqrt{192}$	16
3-й разряд	16	24	36	81	144	192	256

Справедливы соотношения

$$\frac{2}{\sqrt{\sqrt{24}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{24}}}{\sqrt{6}}, \quad \frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{12}}{4},$$

причем 2, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{12}$ соизмеримы только в степени.

Рассматривается медиаль $\sqrt{\sqrt{24}}$ и ищется другая медиаль так, чтобы их произведение было величиной медиальной. Автор утверждает, что искомой медиалью является $\sqrt{\sqrt{216}}$ — величина, находящаяся между $\sqrt{12}$ и 4, но не являющаяся средним пропорциональным между ними. Для этих величин

$$\frac{2}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{\sqrt{24}}}{\sqrt{\sqrt{216}}},$$

т. е. они соизмеримы только в степени.

Таким образом, построен пример для двух медиалей, соизмеримых только в степени, произведение которых есть медиальная площадь $\sqrt{\sqrt{24}}\cdot\sqrt{\sqrt{216}}=\sqrt{72}$; здесь мы снова видим, как нарушается смысл евклидовых понятий при переводе их на арифметический язык: $\sqrt{a}$ одновременно изображает и „рациональную в степени", и „медиальную площадь", так как $\left(\sqrt[4]{a}\right)^2=\sqrt{a}$.

В следующей части трактата автор изучает свойства иррациональных величин, исходя из предложений книги X „Начал", причем главное внимание уделяет не обзору ее, а доказательству новых предложений, которые используются в третьей части сочинения. Здесь Ибн ал-Багдади рассматривает, как и Евклид, тринадцать типов иррациональностей и вслед за ним показывает, что существует также шесть видов биномиалей и шесть видов вычетов, а затем устанавливает связи между иррациональностями и различными видами биномиалей и вычетов.

В третьей части трактата автор излагает то, что „сделал Евклид на основе геометрии", переводя эти результаты на язык числовых иррациональностей. Вместе с тем сохраняется строгость рассуждения благодаря теории, развитой в первой части сочинения.

Даются правила умножения и деления чисел на иррациональные величины и величин на числа и доказывается, что в результате получается величина, принадлежащая к тому же виду, что и исходная иррациональная величина; приводится ряд примеров, иллюстрирующих эти правила:

$$\sqrt{10}:\sqrt{5}=\sqrt{\frac{2}{5}},\ \sqrt[4]{20}\cdot 5=\sqrt[4]{12500},$$

$$5:\sqrt[4]{20}=\sqrt[4]{31\frac{1}{4}}$$

и др.

Дальше в общем виде сформулированы правила умножения и деления иррациональных величин с одинаковой и с различной степенью иррациональности; приведены примеры, в частности,

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{50},\ \sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{500},$$

$$\sqrt[4]{10}\cdot\sqrt{20}=\sqrt[4]{4000}.$$

Затем автор переходит к правилам сложения иррациональных величин, умножения корня из суммы числа и корня или суммы корней на число или корень. Рассматривается случай дробей. Среди примеров на эти правила встречаются следующие:

$$\sqrt{5+\sqrt{20}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{25+\sqrt{180}+\sqrt{125}}\,;$$
$$\sqrt{5+\sqrt{7}}\ \ \sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{10}}=\sqrt{\sqrt{200}+\sqrt{250}+\sqrt{56}+\sqrt{70}}.$$

В общем виде формулируется правило $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times$ $\times\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a-b}$ и приводятся числовые примеры, иллюстрирующие его. Предлагаются и более сложные правила. Сначала в общем виде, а затем на числовых примерах дается числовая форма различных видов иррациональностей. Так, выражение для рационально и медиально квадрирующей имеет вид

$$\sqrt{8+\sqrt{128}}=\sqrt{\sqrt{32}+4}+\sqrt{\sqrt{32}-4}.$$

Затем следуют правила и примеры извлечения корней из иррациональностей. Например, требуется извлечь корень из выражения $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, где $\sqrt{A}>\sqrt{B}$. Для этого необходимо больший член разделить на две части так, чтобы выполнялось условие

$$\sqrt{A}=a+b,\ ab=\frac{B}{4}$$

Другими словами, рассматриваются корни квадратного уравнения

$$x^2-x\sqrt{A}+\frac{B}{4}=0.$$

Решение задачи дается в виде $\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ или $\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}}{2}+\sqrt{\frac{A-B}{4}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{A}}{2}-\sqrt{\frac{A-B}{4}}}$.

Приводятся правила деления на все рассмотренные иррациональности и примеры:

$$\frac{40}{3\pm\sqrt{5}}=30\mp\sqrt{500},\qquad \frac{40}{\sqrt{70}\pm\sqrt{50}}=\sqrt{280}\pm\sqrt{200},$$
$$\frac{\sqrt[4]{432}}{\sqrt[4]{192}+\sqrt[4]{48}}=\sqrt[4]{15552}-\sqrt[4]{3888}.$$

Числа Ибн ал-Багдади в большинстве случаев записывает словами. Часто встречается и буквенное обозначение чисел (в таблицах и в выводах к каждому арифметическому примеру). В трех случаях (стр. 94 арабского текста) Ибн ал-Багдади обращается к записи чисел с помощью арабских цифр.

Ибн ал-Хайсам «Книга комментариев к введениям сочинения Евклида «Начала»

В «Книге комментариев к введениям сочинения Евклида «Начала» (кита̄б шарх̣ мусадарат кита̄б Ук̣лӣдис фи-л-ус̣ӯл) Ибн ал-Хайсам уделил внимание многим важным вопросам математики своего времени, в частности, сделал попытку доказать пятый постулат Евклида (соответствующий отрывок переведен на русский язык Б. А. Розенфельдом [154]).

Особый интерес представляет учение об отношениях, которое изложено в комментарии к введению книги V «Начал», исследованном Э. Плуэем [135] (см. ниже) и Г. З. Кулиевой [202, 203]. Об отношениях Ибн ал-Хайсам говорит и в комментарии к введению книги X, занимающем листы 63 об. — 71 оксфордской рукописи (Hunt. 237).

Отметив, что многие не понимают смысла этой книги «Начал», Ибн ал-Хайсам пишет, что цель ее следует видеть в классификации видов отношения: Евклид вводит некоторую прямую и показывает, что существует бесконечно много прямых, несоизмеримых с ней либо только в длине, либо одновременно в длине и в степени; при этом отношения прямых, несоизмеримых с заданной прямой и между собой, к этой заданной прямой принадлежат к различным видам.

Разъясняется, что Евклид рассматривал только отношения прямых линий, так как они являются наиболее общими, и свел к ним отношения других непрерывных величин. Примечательно, что Ибн ал-Хайсам говорит о возможности возводить прямые линии «в квадрат и в куб и поступать с ними по своему усмотрению, что невозможно по отношению к чему-либо, отличному от прямых линий».

Автор на примерах подробно раскрывает понятия линейной соизмеримости и несоизмеримости величин, соизмеримости и несоизмеримости в степени. Он показывает, таким образом, что если во введении к книге V дано подразделение отношений на числовые и нечисловые, то в книге X содержится классификация нечисловых отношений, а именно, существует бесконечно много различных видов нечисловых отношений, под которыми понимается в данном случае отношение прямых к заданной прямой линии. При этом оказывается, что прямые, отношения которых к данной прямой принадлежат к одному виду, соизмеримы между собой.

Разъяснив понятия рациональности и иррациональности линий как соизмеримость и несоизмеримость их с одной заданной линией, названной рациональной, Ибн ал-Хайсам показывает необходимость введения этих понятий, так как «познать все множество величин и отношение их друг к другу можно только, выбрав одну из них в качестве меры». Он подтверждает это на практических примерах, указывая, что данная рациональная величина выполняет ту же роль, что и всякое мерило величин одного рода, например, «локоть», измеряющий расстояние, «мискаль» — золото, «микъяль» — сыпучие тела и т. д.

В заключение Ибн ал-Хайсам отмечает, что если выбрать в качестве заданной прямой другую прямую, то прямые, которые раньше были рациональными, теперь могут стать иррациональными, т. е. «рациональность не присуща линии по существу, но это значение придается ей в связи с тем, что она является кратной некоторой линии».

Насир ад-Дин ат-Туси «Изложение Евклида»

Одним из наиболее значительных произведений великого математика Насир-ад-Дина ат-Туси является «Изложение Евклида» (тахрир Уќлӣдис) — трактат, чрезвычайно популярный не только на Востоке, но и в средневековой Европе. Известен он в двух вариантах: более кратком, охватывающем пятнадцать книг «Начал» и существующем в многочисленных рукописях, и более обширном, включающем десять книг; последний, как упоминалось, был издан в Риме в 1594 г. по единственной, имеющейся рукописи [537]. Недавно высказано предположение [291], что второй вариант не принадлежит ат-Туси, а является компиляцией. Ниже предлагается обзор введения и первого предложения X книги «Изложения Евклида» по римскому изданию (рис. 23).

В римском издании имеется введение (в другом варианте его нет), в котором разъясняются основные понятия теории квадратичных иррациональностей. Легко заметить два момента. Во-первых, по стилю и духу введение резко отличается от основного содержания: здесь автор значительно отклоняется от идей Евклида, привлекая к рассмотрению числовые иррациональности, в то время как дальше он строго следует Евклиду и ведет изложение на чисто геометрическом языке. Во-вторых, наблюдается сходство между введением и началом рассмотренного выше комментария Абу Джафара ал-Хазина к книге X «Начал», начиная от плана изложения и кончая числовыми примерами. Различие состоит в том, что ал-Хазин пишет более пространно и (в исследованной нами рукописи) не рассуждает о рациональном и иррациональном телах. Отмеченная особенность римского издания «Изложе-

المقالة ٢٦٤

خطي ب ح ح ج ذو الاسمين الاول برهانه فلان نسبة مربع ب ل الى
سطح ل ه كنسبة ب ح الى ح ه بالشكل الاول من السادسة ولان مثلثي ب ه د
ه د ر متشابهان بالشكل التاسع والعشرين من الاولى والشكل الرابع من السادسة فنسبة د ه الى ه ر كنسبة مربع ب ل الى سطح ل ه ونسبة
مربع ب ل الى مربع ح ج كنسبته الى سطح ا ل بالشكل السابع من الخامسة
فنسبة د ه الى ه ر كنسبة مربع ب ل الى مربع ح ج بالشكل الحادي عشر من
الخامس فب ح ح ج منطقان في القوة متباينان في الطول بالشكل السابع
ونسبة مربع ب ل الى مربع ط كنسبته الى سطح ب م بالشكل السابع من
الخامسة ونسبة ب ح الى ب ه كنسبة مربع ب ل الى سطح ب م فبالشكل
الحادي عشر نسبة مربع ب ل الى مربع ط كنسبة ب ح الى ح ه وبالقلب
نسبة د ه الى د ر كنسبة ب ح الى ب ه فبالشكل الحادي عشر نسبة مربع
ب ل الى مربع ط كنسبة عدد د ه المربع الى عدد د ر المربع فخط ب ح
يشارك ضلع ط في الطول بالشكل السابع فخط ب ج المستقيم مركب من
خطي ب ح ح ج المنطقين في القوة فقط وخط ب ح منطق في الطول
وقوي على خط ح ج بمربع خط يشاركه في الطول وهو ضلع ط فالحكم
ثابت وذلك ما اردنا ان نبين

مد

لنا ان نجد ذا الاسمين الثاني

ليكن ا خط منطقا في الطول ويشاركه خط ح ج في الطول فهو منطق
بشهادة الشكل العاشر ونجد عددين مربعين ليس الفصل بينهما مربعا
بالمقدمة المذكورة قبل الشكل الثاني والعشرين وهما د ه د ر والفصل
بينهما ر ه ونجعل ح ج مع د ه محيط بزاوية بحيث ينطبق نقطة ه على
نقطة ج ونصل بين نقطتي ر ح بخط مستقيم ونخرج من د خط د م موازيا
لخط ر ح بالشكل الواحد والثلثين من الاولى فلان زاويتي ح ر ه ر ه ح اقل
من قائمتين بالشكل السابع عشر من الاولى وزاوية ه ر ح كزاوية ه د م
بالشكل التاسع والعشرين من الاولى فخطا ح ج د م اذا اخرجاهما على
استقامتهما في جهة ح يتلاقيان فليتلاقيا على نقطة م ونرسم على خط
ح ج مربع ح ج ق ل بالشكل السادس والاربعين من الاولى ونخرج من نقطة م
خط

264

Рис. 23. Страница из римского издания „Изложения Евклида“ ат-Туси.

ния Евклида» может служить доводом в пользу высказанной гипотезы относительно этого сочинения.

Во введении определяются пять видов непрерывных количеств (линия, поверхность, тело, положение и время) и вводится понятие величины: «Если одно из двух однородных находится в отношении к другому, или одно из них измеряет другое, то его называют величиной». Далее определяются величины, соизмеримые и несоизмеримые в длине и в степени, а затем приводится следующее рассуждение: «Если взять определенные величины — линию или плоскую фигуру, или тело, или другие величины, — то для измерения всех величин, относящихся к этому роду, вводится его рациональная единица, и каждой величине, которая измеряется ею, или ее долей, или ее долями, соответствует при измерении название числа, и поэтому она является рациональной». Отсюда вытекает, что «рациональной является каждая величина, находящаяся в отношении к заданной величине, причем это есть отношение числа к числу». В противном случае величина иррациональна. Иррациональная величина может находиться к другой величине в отношении числа к числу в случае, если эта вторая величина иррациональна. Например, $\sqrt{5}=\frac{1}{3}\sqrt{45}$ или $\sqrt{1\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Однако по отношению к заданной рациональной величине эти величины остаются иррациональными. Рациональная и иррациональная плоские фигуры определяются как плоские фигуры, которые, соответственно, измеряются или не измеряются квадратом на заданной линии, его долей или долями. Аналогично каждое тело будет рациональным или иррациональным в зависимости от того, измеряется оно или не измеряется кубом, построенным на заданной линии.

Первое предложение книги X, как отмечалось выше, играет особую роль в системе «Начал»: им обосновывается так называемый «метод исчерпывания» — один из наиболее плодотворных методов античной математики, в котором нашла свое выражение теория пределов, как она понималась греками. Приложение метода исчерпывания мы находим в книге XII «Начал», автором основных предложений которой теперь с полным правом считается Евдокс. На этом методе основано доказательство теорем о том, что площади двух кругов относятся как квадраты на их диаметрах [134, XII, 1, 2], и что трехгранные пирамиды с одной и той же высотой относятся как площади их оснований [134, XII, 1, 2] и т. д.

Доказательство ат-Туси отличается от того, которое приведено в тексте «Начал», считающемся сейчас каноническим. Он в основных чертах воспроизводит другое известное доказательство, приведенное в приложениях к тому III «Начал» в издании Гейберга [134, стр. 263]. Некоторое различие в рассуждении мы находим в последней части доказательства, где ат-Туси использует 7 и 13 предложения книги, а схолиаст — 15-е.

Тот же вариант доказательства приводят Назиф ибн Юмн и Ибн ал-Багдади (см. выше).

Первое предложение книги X обсуждалось многими средневековыми учеными в связи с положением Аристотеля о неограниченной делимости величины на однородные с ней величины. В нем видели (например, Юханна ибн Юсуф) разъяснение этого положения, которое Омар Хайям впоследствии назвал первым «принципом, заимствованным у философа» [339, стр. 119]. Поэтому сторонники атомизма выступали с критикой этого предложения. Так, Ибн ал-Багдади передает, что многие упрекали Евклида в том, что он утверждает в своем доказательстве возможность бесконечного деления величины.

В «Изложении Евклида» мы встречаемся с критикой другого рода, которая исходила, как свидетельствует ат-Туси, от Ибн ал-Хайсама, утверждавшего, что первое предложение книги X является частным случаем того, которое применяется в 9, 10 и 11 предложениях книги XII «Начал». Ибн ал-Хайсам написал сочинение (Ленинград, ИНА АН СССР, рукопись в 1030/7, лл. 90—101 об.), касающееся этого вопроса.

Ат-Туси не согласен с утверждением Ибн ал-Хайсама и ссылается на Ахмада ибн Сури ал-Багдади, который доказал в написанном по этому поводу трактате, что у Евклида дана наиболее общая формулировка (рукопись этого трактата находится в Стамбуле [672]; она называется «Сочинение для объяснения ошибки Ибн ал-Хайсама в «Началах» Евклида X»). Ат-Туси утверждает, что формулировка предложения Евклида является наиболее общей и охватывает два случая:

1) когда рассматриваемые величины находятся в определенном отношении;

2) когда определенного отношения между ними не существует.

Примером первого являются две линии; именно для этого случая проведено доказательство X, 1 «Начал». Для второго случая он приводит рассуждение, лежащее в основе доказательства XII, 1, 2: в круг вписываются последовательно квадрат, правильный 8-угольник и т. д. и при этом оказывается, что разность площади круга и вписанного 2^n-угольника меньше, чем половина разности между площадью вписанного

2^n-угольника и 2^{n-1}-угольника. Таким образом, как это показано в «Началах», если дан круг и вписанная фигура меньшей площади, то этот процесс, будучи продолжен неограниченно, приведет к разности меньшей, чем меньшая из данных фигур. Здесь опять применяется предложение, сформулированное Евклидом в X, 1, но, по словам ат-Туси, данные величины не находятся в определенном отношении между собой.

Анонимный трактат «Вычисление вычетов из X книги Евклида и общие сведения о вычислении биномиалей

Трактат „Вычисление вычетов из X книги Евклида и общие сведения о вычислении биномиалей“ (хисāб ал-мунфасил мин ал-маḳāла ал-‘āшира мин китāб Уḳлӣдас ва джамла хисāб з̱ава ал-исмӣна) находится в парижской рукописи 2457,41°, лл. 181—186. Переписал его ас-Сиджизи, по его словам, с рукописи Сайида Абу-л-Хасана, возможно, автора трактата.

В сочинении рассматривается раздел учения о квадратичных иррациональностях, соответствующий предложениям 91—96 книги X „Начал“. Автор излагает эти предложения, переводя их на язык арифметики. Они выступают здесь в виде собрания правил действий над числовыми иррациональностями. Характерно, что, полностью воспроизводя терминологию Евклида, он в каждый термин вкладывает совершенно иное числовое содержание. Слова „число“, „величина“, „линия“ применяются как синонимы; „квадрат“ — как фигура и „квадратное число“ Имея в виду умножение чисел, автор говорит иногда об „умножении линий“ При этом не делается никакой попытки обосновать такую подмену одних понятий другими.

Числа изображаются чаще всего словами, но применяется также и алфавитное обозначение.

Автор трактата исходит из определений шести типов вычетов (апотом), введенных Евклидом в книге X в разделе „Определения третьи“ [134, стр. 206].

В первом разделе рассматривается первый вычет. После разъяснения в духе Евклида понятий соизмеримости в длине и в степени автор переходит к вычислению корня из первого вычета, применяя „способ чисел и количеств“, и иллюстрирует с помощью числовых иррациональностей предложение X, 91: „Если площадь заключается между рациональной и первым вычетом, то квадрирующая эту площадь будет вычетом“. Он говорит: „Известно, что корень из первого вычета есть вычет“ Правило извлечения корня из первого вычета разъясняется на примере $9-\sqrt{45}$, где, вслед за Евклидом, 9 названо „целой“, а $\sqrt{45}$ „сочетающейся“ Предлагается прежде всего представить 9 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы выполнялось условие: $9=a+b,\ ab=\left(\frac{1}{2}\sqrt{45}\right)^2$ Для решения этой задачи автор обращается к методу „алгебры и алмукабалы“: полагая одно из искомых слагаемых неизвестной, второе он выражает через $9-x$; тогда по условию

$$(9-x)\,x=9x-x^2=11\frac{1}{4}$$

Приведя это уравнение к каноническому виду („квадраты и числа равны корням“), он получает $11\frac{1}{4}+x^2=9x$. Это уравнение решается с помощью стандартного алгебраического правила, сформулированного ал-Хорезми и заключающегося в следующих действиях:

1) раздвоить корни:

$$9:2=4\frac{1}{2};$$

2) умножить полученное на себя;

$$4\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{2}=20\frac{1}{4};$$

3) вычесть отсюда число, стоящее с квадратами:

$$20\frac{1}{4}-11\frac{1}{4}=9;$$

4) взять корень от полученного:

$$\sqrt{9}=3;$$

5) вычесть последнее из половины корней:

$$4\frac{1}{2}-3=1\frac{1}{2},$$

тогда $1\frac{1}{2}$ есть неизвестное.

Таким образом, получается $a=7\frac{1}{2}$, $b=1\frac{1}{2}$; средним геометрическим между ними является $\frac{1}{2}\sqrt{45}$, т. е. $7\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{45}\right)^2$, и условие оказывается выполненным.

После этого дается правило извлечения корня из первого вычета. Оно сформулировано для рассматриваемого числового примера:

$$\sqrt{9-\sqrt{45}}=\sqrt{7\frac{1}{2}}-\sqrt{1\frac{1}{2}},$$

но рассуждение сохраняет полную общность.

Извлечение корня из второго вычета рассматривается на примере $\sqrt{45}-5$. Прежде всего проверяется, что в числовом примере действительно дается второй вычет: так как $(\sqrt{45})^2-(5)^2=20$, $\sqrt{20}=\frac{2}{3}\sqrt{45}$, т. е. они соизмеримы, то выражение $\sqrt{45}-5$ есть второй вычет. Ставится задача — извлечь из него корень. Поступая, как и раньше, автор находит, что корень из второго вычета есть первый медиальный вычет (X, 92):

$$\sqrt{\sqrt{45}-5}=\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}.$$

Далее автор проверяет результат: возведением в квадрат правой части равенства он должен получить $\sqrt{45}-5$. Для перемножения

$$\left(\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}\right)$$

производятся следующие действия:

$$\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}\cdot\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}=\sqrt{31\frac{1}{4}};$$

затем

$$\left(-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}\right)\left(-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}\right)$$

это выражение в тексте выглядит так: „Умножим вычитаемый корень корня из дирхема с четвертью сам на себя; получится прибавляемый корень из дирхема с четвертью". Далее

$$2\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}\cdot\left(-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}\right)=-2\sqrt{\sqrt{39\frac{1}{16}}}.$$

Таким образом,

$$\left(\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}\right)=$$

$$=\sqrt{31\frac{1}{4}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}-2\sqrt{\sqrt{39\frac{1}{16}}}\,.$$

Первые два члена приводятся к одному числу с помощью выражения $\sqrt{31\frac{1}{4}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}=x$. Левая часть возводится в квадрат:

$$\left(\sqrt{31\frac{1}{4}}\right)^2=31\frac{1}{4}\,,\ \left(\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2=1\frac{1}{4}\,,$$

$$2\sqrt{31\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1\frac{1}{4}}=2\sqrt{39\frac{1}{4}}\,;$$

в сумме получается $32\frac{1}{2}+2\sqrt{39\frac{1}{16}}$. Но $2\sqrt{39\frac{1}{16}}=12\frac{1}{2}$

Следовательно, $\left(\sqrt{31\frac{1}{4}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2=32\frac{1}{2}+12\frac{1}{2}=45$, откуда $\sqrt{31\frac{1}{4}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}=\sqrt{45}$.

Так как

$$2\sqrt{\sqrt{39\frac{1}{16}}}=\sqrt{\sqrt{625}}=5,$$

то, действительно,

$$\left(\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}\right)^2=\sqrt{45}-5.$$

На следующих числовых примерах аналогично рассматриваются вычеты:

третий: $\sqrt{\sqrt{54}-\sqrt{30}}=\sqrt{\sqrt{37\frac{1}{2}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{2}}}$,

четвертый: $\sqrt{6-\sqrt{24}}=\sqrt{3+\sqrt{3}}-\sqrt{3-\sqrt{3}}$,

пятый: $\sqrt{\sqrt{60}-6}=\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}-\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}$,

шестой: $\sqrt{\sqrt{60}-\sqrt{40}}=\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{5}}-\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$.

В последнем разделе трактата даются числовые примеры шести видов биномиалей $(6+\sqrt{20},\ 5+\sqrt{45},\ \sqrt{54}+\sqrt{30},\ 4+\sqrt{6},\ \sqrt{24}+3, \sqrt{72}+\sqrt{27})$, причем для каждого из них проверяется выполнение условий, накладываемых на части биномиалей по определению.

Анонимный трактат «О значении X книги»

Сочинение «О значении X книги» (фӣ му'ни ал-маḳāла ал-'ашира) находится в рукописи Парижской Национальной библиотеки (№ 2457,7°, лл. 43—47). Он переписан ас-Сиджизи и следует непосредственно за комментарием Паппа к книге X «Начал» в переводе ад-Димишки. Можно предположить, что автором его является сам ас-Сиджизи.

Автор ставит цель — разъяснить предложения книги X с помощью числовых иррациональностей. Он считает, что Евклид в этой книге «естественным путем» разъяснил вопросы «о корнях второй и четвертой степени из чисел, о сложении и вычитании квадратных корней и об извлечении корня из их суммы и разности». В формулировке первого предложения мы встречаем характерное смешение геометрических и арифметических понятий: «Для любого числа линия, квадрирующая его, является его корнем, рациональным или иррациональным». Чтобы объяснить свою терминологию и сделать ее «строгой», он вводит определение для «линии, квадрирующей число» (это значит, что квадрат линии B равен произведению числа A на единицу, или $\frac{1}{B}=\frac{B}{A}$), столь же непонятное с геометрической, как и с арифметической точки зрения.

Доказательство состоит в следующем: так как $B^2=A$, то либо A равно квадратному числу, и тогда линия B рациональна, либо A не равно квадратному числу, и тогда B иррациональна, потому что «несоизмерима с единицей». Относительно линии во втором случае сделано существенное замечание: «Евклид назвал ее рациональной в степени, а вычислители называют иррациональным корнем».

Формулируя и доказывая второе предложение о существовании как соизмеримых, так и несоизмеримых корней, автор применяет понятия линии и числа как равносильные. Доказательство же приводится для числовых иррациональностей: пусть $B=\sqrt{b}$ и, соответственно, $C=A^2=a$, $D=$ $=B^2=b$, и пусть E — среднее геометрическое между C и D, т. е. $\frac{C}{E}=\frac{E}{D}$. Тогда $E=AB$. Если E рациональная, то A и B соизмеримы, если же E иррациональная, то A и B несоизмеримы.

Затем автор разъясняет предложение 36 из книги X: «Если составляются две рациональные, соизмеримые только в степени прямые, то целая будет иррациональной; пусть она называется биномиалью». В рассматриваемом трактате биномиаль определяется арифметически, как сумма двух несоизмеримых корней, но изображается она линиями и доказательство ее иррациональности проводится так же, как и у Евклида.

Следующее предложение представляет собой арифметическую интерпретацию определения медиали: „Если даны два любых несоизмеримых корня, то произведение одного из них на другой есть иррациональный корень. Тогда среднее [геометрическое] между ними есть иррациональный корень" (ср. у Евклида: „Прямоугольник, заключенный между рациональными, соизмеримыми только в степени прямыми, будет иррациональным и его квадрирующая будет иррациональной; пусть же она называется медиалью"). Для автора трактата медиальная площадь есть $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, а медиальная линия $\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$.

В предложении, аналогичном предложениям 17 и 18 из книги X «Начал», устанавливается критерий соизмеримости двух отрезков x и y, на которые подразделена бо́льшая из двух данных линий A и B (например, $A > B$), если поставлено условие, что прямоугольник, построенный на отрезках x и y, равен квадрату, построенному на половине B. Другими словами, дается критерий соизмеримости x и y, являющихся решениями системы уравнений

$$x + y = A, \; xy = \frac{B^2}{4}$$

или, что то же, корнями уравнения

$$x^2 - Ax + \frac{B^2}{2} = 0.$$

В „Началах" установлено, что если A и $\sqrt{A^2 - B}$ соизмеримы, то соизмеримы также x и y, и наоборот.

Рассуждения в данном трактате проведены не геометрическим, как у Евклида, а алгебраическим способом, хотя в условии фигурируют линии AB и CD $(AB > CD)$.

В предложении VI рассматривается первая бимедиаль и первый медиальный вычет. Евклид определяет первую бимедиаль следующим образом (см. «Начала», X, 37): «Если составляются две соизмеримые только в степени медиали, заключающие рациональную площадь, то целая будет иррациональной; пусть она называется первой бимедиалью». Первый медиальный вычет определяется аналогично в предложении 74. Здесь же эти иррациональные рассматриваются с алгебраической точки зрения: «Если между любыми двумя числами, отличными от квадратных, имеется квадратное число, среднее пропорциональное между ними, то две медиали для этих двух чисел соизмеримы только в степени и ограничивают рациональную... Если мы соединим их, то получим одну иррациональную линию, названную Евклидом первой бимедиалью». Доказательство в современной записи приводится ниже.

Даны два подобных (это условие отсутствует в основной формулировке, но имеется в примере) числа a и b, т. е. для них существует такое разложение $a = m_1 n_1$, $b = m_2 n_2$, что $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$; a, b отличны от квадратных. Пусть, далее, дано квадратное число c, для которого $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Утверждается, что медиали $\sqrt[4]{a}$ и $\sqrt[4]{b}$ соизмеримы только в степени и $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$ рационально.

Из условий вытекает, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ соизмеримы. Действительно, так как a и b подобны, то

$$\frac{a}{b} = \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2$$

а отсюда

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{m_1}{m_2}$$

рациональное число. Следовательно, $\sqrt{a}$ соизмерим линейно с $\sqrt{b}$, т. е. $\sqrt[4]{a}$ соизмерим с $\sqrt[4]{b}$ в степени. С другой стороны, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{c}$ $\left(\text{так как } \frac{a}{c} = \frac{c}{b},\quad c^2 = ab,\quad c = \sqrt{ab},\quad \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{ab}}{b},\right.$ $\left.\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$. Но a и c не являются подобными, следовательно, $\frac{a}{c}$ не равно квадратному числу, а отсюда $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$ и, тем более, $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$ не равно рациональному числу. Следовательно, $\sqrt[4]{a}$ и $\sqrt[4]{b}$ несоизмеримы в длине, но соизмеримы в степени.

Утверждается также, что если $\sqrt{a-c}$ соизмерим с $\sqrt{a}$, т. е. $\sqrt{a-c} = k\sqrt{a}$, то $\sqrt{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{b}\right)^2}$ соизмерим с $\sqrt[4]{a}$

т. е. $\sqrt{a}-\sqrt{b}=l\sqrt[4]{a}$, и наоборот. Правильность этого утверждения ясна из условий $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$ и $\sqrt{a-c}=k\sqrt{a}$; если $\sqrt{a-c}=k\sqrt{a}$, то $c=a(1-k^2)$. Но $c=\sqrt{ab}$, следовательно, $\sqrt{a}=(1-k^2)\sqrt{b}$, а тогда

$$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{a}(1-k^2)}=k\sqrt[4]{a}.$$

Наконец, $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt{c}$, но так как $\sqrt{c}$, по условию, рационален, то медиали $\sqrt[4]{a}$ и $\sqrt[4]{b}$ „ограничивают рациональную площадь"

Построенные таким образом медиали удовлетворяют условиям, налагаемым на них в предложениях 36 и 74 книги X «Начал». При сложении медиалей, говорит автор, получается иррациональная, названная Евклидом «первой бимедиалью», а при вычитании — иррациональная, названная «первым медиальным вычетом».

В следующем предложении дается построение второй бимедиали (см. «Начала», X, 38) и второго медиального вычета (X, 75). Согласно Евклиду, «если составляются две соизмеримые только в степени медиали, заключающие медиальную площадь, то целая будет иррациональной; пусть она называется второй бимедиалью». В трактате это определение выглядит так: «Пусть даны два числа, отличные от квадратных, и находящееся между ними число, отличное от квадратного и не подобное им, причем эти числа составляют пропорцию. Тогда медиали этих чисел соизмеримы только в степени и ограничивают медиальную, являющуюся иррациональным корнем. ...Если мы соединим их, то получим одну иррациональную линию, которую Евклид назвал второй бимедиалью. Если же вычтем из большей равное меньшей, то остаток есть иррациональная, которую Евклид назвал вторым медиальным вычетом». Доказательство проводится по аналогии с предыдущим случаем.

В следующих трех (VIII, IX, X) предложениях ищутся две несоизмеримые в степени величины („линии"), у которых в первом случае сумма квадратов рациональна, а ограничивают они медиальную (т. е. ищутся $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, для которых выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ не равно рациональному числу, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ равно рациональному числу, а $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}$ равно иррациональному корню); во втором случае наоборот: сумма квадратов величин есть медиальная площадь, а ограничивают они рациональную (т. е. ищутся $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, для которых $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ не равно рациональному числу, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ равно иррациональному корню, $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}$ равно рациональному числу); в третьем случае сумма квадратов медиальна и несоизмерима с их произведением, которое также медиально (т. е. ищутся $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, для которых $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ не равно рациональному числу, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ равно иррациональному корню, $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}$ равно иррациональному корню, причем

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}\ \sqrt[4]{b}}$$

не равно рациональному числу).

В предложении XI в общем виде утверждается, что при извлечении корня из одной из шести биномиалей получается одна из иррациональностей первой гексады, т. е. либо биномиаль, либо «бóльшая», либо первая бимедиаль, либо вторая бимедиаль, либо рационально и медиально квадрирующая, либо бимедиально квадрирующая. В алгебраической записи это означает:

$$\sqrt{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{A-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{A-B}}{2}}$$

где на A и B налагаются условия, соответствующие каждому случаю. Предложение сформулировано в геометрических терминах, но в то же время встречаются такие выражения, как «произведение одной линии на другую». Доказательство проведено геометрически и по идее своей совпадает с доказательствами предложений 54—59 книги X.

В предложении XII доказано утверждение, аналогичное предыдущему, для вычета.

Определения шести видов биномиалей и шести видов вычетов даны в предложениях XIII—XVIII. Доказывается также, что корни из этих бимедиалей и вычетов (в данном случае речь идет «о среднем геометрическом между биномиалью или вычетом и единицей») являются соответствующими иррациональностями второй и четвертой гексад.

§ 3. Некоторые выводы

Исследование комментариев показывает, что математики средневекового Востока не только полностью освоились со взглядами на числовые иррациональности как на числа и свободно оперировали ими в практических вычислениях, но и пытались теоретически обосновать его. Поэтому понятен их интерес к книге X «Начал»: в ней они искали объяснение природы числовой иррациональности и строгую основу вывода правил действия над корнями.

Арабские сочинения о книге X «Начал» подразделяются на три группы.

Первую составляют собственно комментарии, цель которых — с помощью более пространного изложения разъяснить ее, не выходя из круга понятий Евклида. К этой группе относится опубликованный М. Курце [494] комментарий ан-Найризи в латинском переводе, а из рассмотренных выше — комментарий Назифа ибн Юмна, Юханны ибн Юсуфа, анонимный комментарий из парижской рукописи 2457 (лл. 69—83 об.) и отчасти «Изложение Евклида» Насир ад-Дина ат-Туси.

Вторая, наиболее многочисленная группа, объединяет комментарии, в которых проводится идея арифметизации предложений книги X и делается более или менее удачная попытка ее обоснования. Сюда относятся опубликованный М. Курце [494] комментарий, приписываемый Абд-ал-Баки ал- Багдади [859, 866], переведенные нами комментарии ал-Махани, ал-Ахвази, Абу Джафара ал-Хазина, Ибн ал-Багдади и анонимный (возможно, принадлежащий ас-Сиджизи) трактат «О значении X книги» из парижской рукописи 2457 (лл. 43—47). Все сочинения этой группы построены примерно по одному плану, в основном повторяющему план книги X. Цель их авторов, как и Евклида, — классифицировать квадратичные иррациональности. Более того, сохраняется евклидова терминология и формулировки предложений. Однако содержание, вкладываемое в них, принципиально отлично от содержания «Начал».

В третью группу комментариев входят сочинения, в которых предложения книги X выступают в виде собрания правил действий над числовыми иррациональностями. К ней относятся анонимный трактат «Вычисление вычетов» и вторая часть комментария Ибн ал-Багдади. По содержанию они полностью совпадают с некоторыми главами алгебраических трактатов ал-Хорезми, Абу Камила, ал-Караджи, ал-Каласади.

Обобщим некоторые моменты теории квадратичных иррациональностей, разработанной восточными математиками. За основу по-прежнему берется понятие соизмеримости и рациональности величин, под которыми понимаются прямолинейные отрезки. С помощью заданной линии, рассматриваемой как единичная мера, измеряются остальные отрезки; если величина может быть измерена этой единицей, ее «долей» или ее «долями», то ей соответствует число, т. е. она «выражается» числом. Такая величина называется «выразимой» или «произносимой», т. е. рациональной. Некоторые авторы (ал-Махани, ал-Ахвази) опускают это рассуждение и пишут просто: «Рациональная будет тогда, когда мы говорим 10, 12, $3\frac{1}{2}$ и т. д.» или «Рациональная — это то, что является числом». Дробь при этом рассматривается как число.

В случае несоизмеримости данной величины с единичной говорится, что она «не выражается количественно» и «может быть произнесена лишь с помощью слова корень»; эта величина называется «невыразимой», «глухой» или «иррациональной».

Что касается корня, то авторы рассмотренных нами трактатов не дают его определения. В других сочинениях квадратный корень чаще всего характеризуется, по примеру ал-Хорезми [349, стр. 26], как «всякая вещь, умножаемая на себя, будь то число, равное или большее единицы, или дробь, меньшая ее».

Приведем два характерных определения корня. Одно из них принадлежит известному западно-арабскому ученому Ибн Халдуну (1332—1406 гг.): «Выражение корень применяется, чтобы обозначить число, которое, будучи умножено на себя, дает квадратное число. Число, которое может быть выражено, называется рациональным, и его квадрат — тоже; чтобы его выразить, не нужны долгие вычисления. Число, которое нельзя выразить, называется глухим. Квадрат его бывает либо рациональным, как корень из трех, или глухим, как корень корня из трех, квадрат которого есть корень из трех. Этот корень есть глухое число, и, чтобы его найти*, нужно выполнить длинные вычисления» [950, стр. 21].

Второе определение дал в «Ключах наук» Абу Абд-Аллах ал-Хорезми: «Абсолютный корень есть рациональный, то есть такой, значение которого известно со всей строгостью и его можно произнести; например, корень из ста есть десять, корень из девяти — три, а корень из четырех — два. Иррациональный корень таков, что не существует пути строгого вы-

* Имеется в виду приближенное значение корня.

ражения его через число: например, корень из двух, или из трех, или из десяти. Получают его приближенно и не ищут его истинного значения. Говорят, что похвала индийских брахманов звучит следующим образом — достоин хвалы тот, кто знает иррациональные корни» [950, стр. 21].

Кубический корень ал-Махани и Омар Хайям рассматривают с геометрической точки зрения как «ребро числа», имея в виду телесное число. Определения корней более высокой степени мы встречаем у ал-Каши: «Если умножить каждое число само на себя, затем на произведение, затем на второе произведение и так далее до бесконечности, то первое число называют основанием по отношению к каждому из произведений или корнем по отношению ко второму произведению, а произведения эти носят название степеней. Для каждой степени имеется свое особенное название: первое произведение называется подкоренным, имуществом или квадратом, второе произведение называется «кубом» по упомянутому выше названию основания» [178, стр. 29—30].

Комментарии к книге X «Начал» (особенно комментарий Ибн ал-Багдади) дают возможность понять, как теоретически обосновывалось понятие квадратного корня: под корнем из величины, в полном согласии с Евклидом, понималась построенная с помощью циркуля и линейки линия — среднее геометрическое между двумя рациональными линиями, т. е. линиями, длины которых выражаются числами; под корнем из числа — среднее геометрическое между числом и единицей.

Таким образом, устанавливалось однозначное соответствие между линиями и числами в случае соизмеримости линий, а в случае несоизмеримости — между линиями и корнями из чисел.

Примечательно в этой связи следующее высказывание ал-Фараби из его «Классификации наук» (по латинскому переводу) «Каждое число находится во взаимоотношении (relatus) с какой-нибудь рациональной или иррациональной величиной. Если найти числа, которые соответствуют величинам, находящимся в пропорции, то каким-то образом найдутся и эти величины. Поэтому считают, что определенные рациональные числа соответствуют рациональным величинам, а определенные иррациональные числа — иррациональным величинам» [949, стр. 97]. Это позволяло, когда речь шла о строгом доказательстве предложений, обращаться к геометрии. Рассуждая же о величинах, об их соизмеримости и несоизмеримости, классифицируя их, все указанные авторы оперировали числовыми иррациональностями. Другими словами, математики рассматривали иррациональности, как числа, но в вопросах обоснования стояли на позиции Евклида. С этой точки зрения теория числовых иррациональностей была вполне законной, так как она строилась как адэкватная теории Евклида. Геометрическое и арифметическое представления об иррациональности оказывались идентичными (отсюда проистекало постоянное смешение геометрической и арифметической терминологий).

Такой арифметико-геометрический подход объясняет и то, что арабским комментаторам книга X не казалась столь безнадежно трудной, как их европейским последователям, ушедшим гораздо дальше по пути арифметизации теории иррациональных величин.

Из рассмотренных трактатов выясняется также, что авторы их ясно видели связь между данной в книге X «Начал» классификацией квадратичных иррациональностей и системами уравнений второй степени. Правила нахождения биномиалей и вычетов они формулировали как правила решения соответствующих квадратных уравнений.

Единственным, кто при рассмотрении вопроса об иррациональных величинах не придерживался схемы книги X, бал ал-Махани, давший также классификацию кубических числовых иррациональностей. Хотя он и пользуется при этом геометрическими образами, но попытка теоретически рассматривать кубические иррациональности является замечательным достижением этого ученого. Он предпринял ее, несомненно, для того, чтобы ввести под операции с кубическими корнями столь же прочную теоретическую базу, какую давала книга X «Начал» для действий над квадратными корнями.

Огромный шаг вперед по сравнению с другими авторами сделал ал-Караджи в специальном разделе сочинения «Чудесное об арифметике», который завершается формулировкой правила

$$\sqrt{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{A-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{A-B}}{2}}$$

(A, B — неквадратные числа). Ал-Караджи, по словам П. Люкея [690], кроме квадратных корней, их суммы и разности, рассмотрел также корни произвольных степеней и составленные из них выражения и предложил читателю самому составлять иррациональности такого вида; более того, он сделал попытку найти уравнение, которому они удовлетворяют. Отмечая этот важнейший результат, П. Люкей пишет: «Если бы у ал-Караджи нашлись последователи, которые продолжали бы работать дальше в том же духе, то кто-либо мог легко придти к мысли заменить в правой части приведенной формулы корни квадратные кубическими. Тогда получилось бы выражение, в основном совпадающее с так называемой формулой Кардано, и путем вычислений, которыми уже владел ал-Караджи, например, вычисление $(a+b)^3$, было бы показано, что это выражение есть решение кубического уравнения» [690, стр. 204]. Идеи ал-Караджи получили развитие только у европейских алгебраистов (Тарталья, Ферро, Кардано), творчество которых базировалось на восточном наследии.

В сочинениях, в которых нашла отражение теория книги X «Начал», следует указать на разделы «Об извлечении корней» и «О сложении и вычитании корней» (в рассмотренных выше трактатах Ибн ал-Банны и ал-Каласади), где терминология книги X сохраняется для числовых иррациональностей. Так, Ибн ал-Банна [696, стр. 24] после правил извлечения корня из целых чисел и дробей формулирует следующее правило извлечения корня из «биномиалей и вычетов», не останавливаясь на разъяснении этих понятий: «Отними четверть квадрата меньшей из двух частей биномиали от четверти квадрата большей из них и извлеки корень из разности; прибавь его к половине большей из частей биномиали и таким же образом отними его от нее. Из обоих результатов извлеки корень. Если число, из которого требуется извлечь корень, — биномиаль, то корнем будет их сумма, если же оно — вычет, то корнем будет их разность».

Приводятся три примера:

$$1) \quad \sqrt{6+\sqrt{27}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2},$$

где $x_{1,2}=3\pm\sqrt{\frac{36}{4}-\frac{27}{4}}=3\pm\frac{3}{2}$;

$$2) \quad \sqrt{6+\sqrt{48}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2},$$

где $x_{1,2}=\frac{\sqrt{48}}{2}\pm\sqrt{\frac{48}{4}-\frac{36}{4}}=\sqrt{\frac{48}{2}}\pm\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{12}\pm\sqrt{3}=$

$$=2\sqrt{3}\pm\sqrt{3};$$

$$3) \quad \sqrt{\sqrt{32}+\sqrt{24}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}, \text{ где}$$

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{32}}{2}\pm\sqrt{\frac{32-24}{2}}=\sqrt{8}\pm\sqrt{2}.$$

В главе о делении корней Ибн ал-Банна рассматривает вопрос о „делении на биномиали и вычеты“ и для первого случая дает правило: „Умножь делимое и делитель на вычет, после чего раздели полученное делимое на полученный делитель"; примеры:

$$\frac{10}{2+\sqrt{3}}=\frac{10(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{300},$$

$$\frac{18}{3+\sqrt{2}}=\frac{18(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{54-\sqrt{648}}{7}=7+\frac{5}{7}-\sqrt{13\frac{11}{49}};$$

здесь биномиаль и вычет названы числами и правила действий над ними формулируются, как для чисел.

Ал-Каласади [1018, стр. 46—48] 8-ю главу своего сочинения называет «О первой биномиали» и определяет биномиаль как «то, что составлено из числа и корня из числа», причем «рациональное должно быть бо́льшим». Он формулирует правило извлечения корня, дословно повторяя Ибн ал-Банну, и приводит те же примеры, что и у него.

Итак, теоретические вопросы решались в специальных комментариях к книге X, в трактатах же по алгебре давались чаще всего готовые правила действий с соответствующими числовыми иррациональностями.

Учение о квадратичных иррациональностях (см. гл. VIII) вошло позднее в европейскую математическую литературу в том виде, как оно было разработано восточными учеными X—XI вв., но воспринималось уже только как числовая теория, не вызывавшая необходимости геометрического обоснования.

Глава VII. ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЙ И РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

§ 1. Общие замечания

В обзоре древнегреческого учения о числе и величине мы показали, что в античной математике были созданы теория отношений целых чисел и общая теория отношений непрерывных величин, из которых первая играла роль современной теории дробей, а вторая — теории вещественных чисел. Отмечалось также, что если в классический период греческой математики между понятиями числа и отношения проводили резкую грань, то в позднеэллинистическую эпоху эта грань начала постепенно стираться; свидетельством этому служит появление понятия «количества отношения». Однако, хотя математики уже подошли к тому, чтобы рассматривать отношение как некоторое обобщение понятия числа, такой шаг все же сделан не был. Греки не видели потребности в разработке правил арифметических действий над отношениями. В частности, у них отсутствовала теория составных отношений, которая дала бы строгое обоснование действию умножения отношений.

Важная страница истории математики стран Ближнего и Среднего Востока в средние века, связанная с учением об отношении и с расширением понятия числа, открыта совсем недавно благодаря исследованиям Плуэя [735], Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича [290; 339; 383, стр. 397—401; 384, стр. 240—245; 622; 625], Г. Д. Мамедбейли [222, 223] и Ф. А. Касумханова [177]. Следующий ниже обзор основан на результатах работ этих авторов.

§ 2. Критика теории отношений Евклида

В 1951 г. Плуэй [735] опубликовал работу, написанную после изучения нескольких арабских рукописей, в которых рассматривается теория отношений. Комментарий Абу Абд-

Аллаха Мухаммада ибн Юсуфа ал-Джайяни (см. гл. II, § 5, гл. 42) к книге V «Начал» Евклида он перевел на английский язык по рукописи, находящейся в Алжире (1446, 3°), и опубликовал перевод с приложением факсимиле арабского текста. Кроме того, Плуэй рассмотрел сочинения других ученых (X—XI вв.) и перевел отрывки, касающиеся учения об отношениях.

В своем трактате ал-Джайяни защищает теорию отношений, изложенную в книге V «Начал». Необходимость этого вызвана, как утверждает автор, критикой, которой подвергли эту теорию многие его современники. По словам ал-Джайяни, высказывалось мнение, что между отношением и взятием кратных, лежащим в основе этого определения, нет очевидной связи [735, стр. 16]. Ал-Джайяни отстаивает правильность определения Евклида, но считает необходимым дать разъяснение к книге V, в которой, по его мнению, имеется ряд неясностей, затрудняющих понимание теории.

Наибольший интерес вызвало высказывание ал-Джайяни о существовании в современной ему математике определения отношения отличного от определения из книги V «Начал». Для выяснения вопроса Плуэй обратился к исследованию других сочинений этого периода, в которых излагается теория отношений. Он рассмотрел трактат ал-Махани «Об отношении» (Париж, 2467, 16°, лл. 197° об.— 207; Берлин, 6009, 1°, 34в—38а; Стамбул, Carullah, 5°, 1502, 25а—26в),комментарий ан-Найрази к книге V «Начал» Евклида, известный как в арабском тексте, так и в средневековом латинском переводе [494, 595], трактат Ибн ал-Хайсама «Книга комментариев к введениям сочинения Евклида «Начала» (Алжир, 1446, 1°; Оксфорд, 1908, 1°; Стамбул, Feyzullah, 1359, 2°, 150—237а; Стамбул, Seray, 3454, 2° (5—6 книги); Брусса, Harraccizade, Heyet 20, 1°) и сочинение Омара Хайяма «Комментарии к трудностям во введении книги Евклида» (Париж, 4946, 4°; Лейден, Cod. or., 199), имеющееся теперь в русском переводе Б. А. Розенфельда [338, 339].

Исследование показало, что авторы этих трактатов действительно придерживаются иной, по сравнению с «Началами», концепции отношения, причем в основе ее лежит алгоритм Евклида, с помощью которого две величины сравниваются между собой. Другими словами, оказалось, что определение отношения и равенства отношений, принятое математиками стран ислама, совпадает с антифайретическим, доевдоксовым, определением.

Ал-Махани [735, стр. 50], ссылаясь на мнение, ранее высказанное Сабитом ибн Коррой, так определяет отношение:

«Отношение двух однородных величин или отношение двух чисел есть положение (ал-хал) одного из них, если оно измеряется другим, или наоборот. Следует различать три случая:

1. Меньшее полностью исчерпывает (истаграка) большее, так что остатка не остается;

2. Меньшее не исчерпывает собой большего полностью, но от большего остается остаток; если меньшее измеряется этим остатком, то он (остаток) исчерпывает его собой полностью или остается нечто, меньшее, чем первый остаток; если теперь первый остаток измерить этим вторым остатком, то он исчерпывает его полностью или остается остаток: если измерить второй (остаток) этим (третьим остатком) и если делать это постоянно, то получится остаток, и он полностью исчерпывает предшествующий;

3. Не получится остатка, который исчерпывал бы полностью предшествующий. Первые два случая относятся к случаям сравнительного измерения, имеющим место как для чисел, так и для величин, третий имеет место только для величин».

Такое определение отношения, которого придерживались и другие указанные авторы, пригодно и для чисел, и для величин.

Ибн ал-Хайсам и Омар Хайям начинают рассуждение с числовых отношений и затем переходят к отношениям величин, которые могут быть и числовыми, и нечисловыми. Хайям замечает при этом, что «отношение сначала было найдено для чисел при рассмотрении их взаимозависимостей» [339, стр. 128]. Для этого случая он принимает определение отношения, основанное на алгоритме Евклида («Начала», кн. VII, опред. 22: «Числа будут пропорциональны, когда первое от второго, а третье от четвертого будут или равнократными, или той же частью, или теми же «частями»). Что касается двух произвольных величин, то «не необходимо, чтобы меньшее являлось долей или долями большего», т. е. «они могут не иметь числового отношения, что свойственно только величинам» [339, стр. 129]. Этот случай Омар Хайям рассматривает специально и дает антифайретическое определение отношения, аналогичное данному Сабитом ибн Коррой.

Об определении пропорции, приведенном в книге V, он замечает, что «это хорошо сказано», но утверждает, что Евклид при этом «отклонился от истинного смысла пропорции» [339, стр. 129]. Евклидово определение Хайям называет «известным» и предлагает отличать его от «истинного» [339, стр. 130], которое он для двух данных пар величин формулирует так: «Отложим на второй все кратные первой так, чтобы остаток стал меньше первой, и отложим на четвертой все кратные третьей так, чтобы остаток стал меньше третьей, и пусть кратность первой во второй равна кратности третьей в четвертой. Далее, отложим на первой все кратные остатки второй так, чтобы остаток стал меньше остатка второй, и точно так же отложим на третьей все кратные остатки четвертой так, чтобы остаток стал меньше остатка четвертой, и пусть кратность остатка второй равна кратности остатка четвертой. Так же отложим на остатке второй все кратные остатка первой и на остатке четвертой — все кратные остатка третьей, и пусть их кратности одинаковы. Точно так же будем последовательно откладывать кратные остатков одни на других так, как мы объясняли, и пусть число остатков первой и второй равно числу соответственных остатков третьей и четвертой и так до бесконечности. В этом случае отношение первой ко второй необходимо равно отношению третьей к четвертой. Вот истинная пропорция, определенная геометрически» [339, стр. 130—131].

Как Омар Хайям, ранее пропорциональность величин определяли ал-Махани [735, стр. 50], ан-Найризи [735, стр. 52] и Ибн ал-Хайсам [735, стр. 54]. Согласно этому определению, величины A, B, C, D пропорциональны, т. е. $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, если для пары A, B в процессе нахождения общей наибольшей меры получается тот же ряд частных (конечный или бесконечный), что и для пары C, D. Другими словами, при разложении в непрерывные дроби

$$\frac{A}{B}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots\cfrac{1}{q_k}}}}\qquad\qquad \frac{C}{D}=\cfrac{1}{q_1'+\cfrac{1}{q_2'+\cfrac{1}{q_3'+\cdots\cfrac{1}{q_k'}}}}$$

оказывается, что $q_i=q_i'$ для всех $i=1, 2, \ldots, k$, (где k может быть бесконечным).

Таким же образом Омар Хайям определяет неравенства отношений:

$$\frac{A}{B}>\frac{C}{D},$$

если в указанном разложении $q_i=q_i'$ $(i=1, 2, \ldots k-1)$, но $q_k<q_k'$ для k нечетного или $q_k>q_k'$ для k четного. Так как это определение справедливо и для случая, когда одно из разложений $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ в непрерывную дробь оказывается бесконечным, то здесь получен важный критерий для сравнения по величине рационального и иррационального отношений [290, стр. 124; 339, стр. 287—288; 384, стр. 241—243].

После построения новой теории отношений возник вопрос, равносильна ли она теории отношений, изложенной в книге V «Начал», которая служила фундаментом всего разработанного в древности и широко применявшегося на средневековом Востоке учения о величине. Этот вопрос не ставился в трактате ан-Найризи, считавшего, что евклидово определение пропорциональности следует относить к «началам» науки, и что поэтому оно не требует доказательства [735, стр. 52, 61]. Но его четко формулируют и решают сначала Ибн ал-Хайсам, а затем Омар Хайям.

Ибн ал-Хайсам [735, стр. 61] предпосылает доказательству эквивалентности обеих теорий следующие утверждения:

1) если даны четыре величины и отношение первой к целой второй есть отношение третьей к целой четвертой, то отношение первой к доле второй есть отношение третьей к доле четвертой;

2) каждая величина может быть разделена пополам, и каждая половина может быть разделена пополам, и каждая половина половины может быть разделена пополам до тех пор, пока число частей не станет больше, чем заданное число;

3) если даны две различные величины, то меньшую можно удваивать, пока кратное не станет больше большей величины.

На основании этих предпосылок, из которых вторая является выражением одного из основных принципов античной математики о бесконечной делимости величин и вытекает, как и третья, из «аксиомы Архимеда» [134, кн. V, предложение 4], проводится доказательство того, что оба определения пропорциональности равносильны. Рассматриваются четыре величины A, B, C, D, предположенные пропорциональными согласно антифайретическому определению. Затем берутся равнократные от A, C и от B, D и доказывается, что для них одновременно выполняются условия: либо $mA=nb$ и $mC=nD$, либо $mA>nb$ и $mC>nD$, либо $mA<nb$ и $mC<nD$, т. е. данные величины являются пропорциональными также и в смысле теории Евклида. Доказательство проведено сначала для случая, когда данные величины имеют между собой числовое отношение, а затем для случая, когда их отношение не выра-

жается отношением целых чисел; при этом доказательство второго случая сводится к первому.

Омар Хайям свое доказательство эквивалентности обеих теорий (также сначала для числового, а затем для нечислового отношений величин) основывает на предпосылке, утверждающей существование четвертой пропорциональной к трем данным величинам. Эту предпосылку он доказывает, опираясь на 2-е и 3-е предложения, сформулированные Ибн ал-Хайсамом, которые вытекают из аксиомы Архимеда. Хотя рассуждение Хайяма с современной точки зрения недостаточно строго, его попытка доказать это важное утверждение явилась первой (насколько сейчас известно) в истории математики попыткой такого рода [290, стр. 125; 384, стр. 242]. Чтобы подчеркнуть эту заслугу Омара Хайяма, напомним, что отсутствие теоремы о существовании четвертой пропорциональной для случая произвольных величин явилось серьезным пробелом в общей теории отношений Евдокса — Евклида.

Антифайретическая теория, развитая математиками стран ислама, намного больше соответствовала их интересам, чем теория Евдокса — Евклида, так как выявляла сущность отношения с измерительной точки зрения. Определение пропорции через алгоритм Евклида давало возможность непосредственно строить рациональные приближения к иррациональным отношениям с любой степенью точности, т. е. решить одну из задач, которой средневековые математики придавали большое значение.

§ 3. Теория составных отношений

Разработка учения о составных отношениях — важнейший шаг в развитии понятия числа, также сделанный математиками стран ислама. Как сказано выше, понятие «составного отношения», соответствующее современному понятию произведения отношений, было введено Евклидом в 9 и 10 определениях книги X «Начал». Однако здесь речь шла лишь о двух частных случаях: о «двойном» и «тройном» отношениях или, иными словами, о возведении отношения в квадрат и в куб. В то же время в книге VI (предложение 23) используется понятие составного отношения для общего случая, но не определяется. Этот пробел в системе определений Евклида заставил позднейших комментаторов сформулировать общее определение составного отношения, которое и было введено в «Начала» как 5-е определение книги VI.

Попытка строго обосновать теорию составных отношений привела к теоретическому распространению понятия числа на отношения величин.

Первые известные сочинения, в которых систематически изложено учение о составных отношениях, это трактаты Ахмада ибн Юсуфа (см. гл. II, § 3, п. 18) [436, 461] и Сабита ибн Корры ал-Харрани «Книга о составлении отношений; русский перевод второго из них выполнен недавно Б. А. Розенфельдом и Л. М. Карповой [292, 293] по рукописи (2457, 15°, лл. 60 об. — 75 об.) Парижской Национальной библиотеки. Этот трактат состоит из трех глав: в двух первых излагается теория, а последняя содержит задачи на составление отношений, возникшие в вычислительной практике.

Определение составления отношений и обратной операции — выделение отношений, — выдержанное в духе Евклида, предлагается сначала для частного случая „примыкающих отношений“ $\left(\text{когда отношения имеют одинаковый член, т. е. } \frac{A}{B} \text{ и } \frac{B}{C}\right)$, а затем и для общего случая. Для примыкающих отношений оно формулируется так: „Отношение, составленное из отношений, если они примыкают друг к другу, — это отношение друг к другу тех членов, которые оказываются на краях отношений с равными членами, причем предыдущий член одного из этих отношений — предыдущий член полученного отношения, а последующий член второго отношения — последующий член полученного отношения“. Другими словами, имеется в виду, что $\frac{A}{C}=\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}$. Следовательно, Сабит ибн Корра определяет составное отношение аналогично тому, как определил Евклид двойное и тройное отношения, и не пользуется понятием „количества отношения“, фигурирующего в определении Теона. Соответственно определено и „выделение“ отношения: в случае „примыкающих отношений“ $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{B}$ выделенным отношением названо отношение $\frac{A}{C}$, а в случае „примыкающих отношений“ $\frac{A}{B}$ и $\frac{A}{C}$ — отношение $\frac{C}{B}$. Определяя составление отношений в общем случае, Сабит ибн Корра рассматривает два примыкающих отношения, равные данным, и пользуется при этом теоремой о четвертой пропорциональной; т. е. если даны отношения $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$, то вводятся также величина L такая, что $\frac{A}{B}=\frac{L}{M}$, и затем величина M такая, что $\frac{C}{D}=\frac{M}{N}$. Тогда составленным из $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ отношением называется отношение, составленное из $\frac{L}{M}$ и $\frac{M}{N}$. Аналогично определяется и выделение отношений в общем случае.

Введя эти определения, Сабит ибн Корра переходит к изучению составных отношений, являющихся следствием данного составного отношения. Например, если дано отношение $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}$, то как следствия из него получаются 18 отношений:

$$1)\quad \frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{E}{F},$$

так как

$$\frac{C}{F}=\frac{C}{D}\times\frac{D}{E}\times\frac{E}{F},\quad \frac{C}{F}\times\frac{E}{D}=\frac{C}{D}\times\frac{D}{E}\times\frac{E}{F}\times\frac{E}{D}=$$
$$=\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}=\frac{A}{B};$$

$$2)\quad \frac{A}{C}=\frac{B}{D}\times\frac{E}{F};$$

$$3)\quad \frac{A}{C}=\frac{B}{F}\times\frac{E}{D};$$

$$4)\quad \frac{A}{E}=\frac{B}{D}\times\frac{C}{F};$$

$$5)\quad \frac{A}{E}=\frac{B}{F}\times\frac{C}{D}\qquad \text{и т. д.}$$

Далее Сабит ибн Корра рассматривает многочисленные случаи, когда две или более двух величин, входящих в составные отношения, равны между собой.

Интересно, что в данном трактате для величин употребляются термины, которые в античной математике применялись только к числам. Сабит ибн Корра обосновывает это: «Мы хотим изложить здесь отношения величин таким образом, чтобы все, относящееся ко всем величинам, выполнялось в виде примеров на числах.... Поэтому величина у нас понимается или как величина в старом смысле слова, или как число». Он говорит об «умножении величины на величину» и имеет в виду при этом или (в соответствии с понятиями геометрической алгебры) построение прямоугольника с данными сторонами, или «взятие этой величины кратной по числу величин, составляющих другую величину и образующих ее меру», что совершенно противоречит духу Евклида. Так же свободно Сабит ибн Корра применяет к непрерывным величинам термин «деление».

Подобное смешение арифметической и геометрической терминологий, встречающееся, как мы видели, и в других сочинениях данного периода, явилось ярким показателем того, что в математике происходило постепенное затушевывание принципиального различия между числами и величинами, что было одним из исходных положений греческой математики. Это создало предпосылки и к теоретически обоснованному уничтожению различия между двумя указанными понятиями. Однако осуществить это и, следовательно, порвать со всеми математическими традициями было делом нелегким. Сделал такой шаг замечательный ученый и один из самых смелых мыслителей своей эпохи Омар Хайям.

Третья часть трактата «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» называется «Составление отношения и его исследование» [339, стр. 141—146]. Здесь Хайям рассматривает чрезвычайно серьезное с его точки зрения понятие составного отношения, на котором основываются «важные предложения астрономии и геометрии», и ставит цель — «дополнить этими вопросами науку «Начал», так как считает изложение Евклида несовершенным. Свою задачу Омар Хайям видит в том, чтобы дать «удовлетворительное геометрическое доказательство» евклидова определения составного отношения, т. е. ставит вопрос о доказательстве определения составного отношения, данного Сабитом ибн Коррой, исходя из определения Теона, т. е. из понятия «количества отношения». Для этого ему необходимо было распространить понятие числа на отношение.

Рассматривая прежде всего случай, когда две величины относятся между собой, как число к числу, он говорит, что «при этом предполагают единичную величину, т. е. некоторую величину, которую называют единицей и с которой связывают все остальные величины». Если же величины не имеют между собой числового отношения, то здесь имеются две возможности:

1) либо квадрат данной величины относится к квадрату единичной величины, как число к числу, либо квадрат относится к квадрату квадрата единичной величины, как число к числу и т. д., т. е. отношения степеней величины «связываются с числом»;

2) «мера отношения остается неизвестной, когда невозможно найти средство постигнуть величину этого отношения и связать его с принятой единицей».

Для обоих этих случаев Хайям утверждает, что «необходимо, чтобы каждое отношение являлось величиной, так что можно выбрать за единицу величину того же рода». При этом он ставит вопрос: «Может ли отношение величин быть по существу числом, или оно только сопровождается числом, или отношение связано с числом не по своей природе, а с помощью чего-нибудь внешнего, или отношение связано с числом по своей природе и не нуждается ни в чем внешнем» [339, стр. 142]. Отвечая на этот впрос, он допускает — вступая в противоречие с античной установкой о неделимости единицы — некоторую делимую единицу и с ее помощью вводит обобщенное понятие числа, включающее в себя и иррациональное отношение.

Рассуждение проведено следующим образом. При доказательстве предложения о том, что если A, B, C — три однородные величины, то отношение A к C составлено из отношения A к B и отношения B к C (т. е. предложения, совпадающего с евклидовым определением составного отношения), Хайям вводит единицу и предлагает сделать ее отношение к некоторой величине G таким же, как отношение A к B. При этом он говорит: «Будем смотреть на величину G не как на линию, поверхность, тело или время, но будем смотреть на нее, как на величину, отвлеченную разумом от всего этого и принадлежащую к числам, но не к числам абсолютным и настоящим, так как отношение A к B часто может и не быть числовым, т. е. нельзя найти двух чисел, отношение которых было бы равно этому отношению» [339, стр. 144—145].

Таким образом, величина G, принадлежащая, по определению Хайяма, к числам (хотя и «не к числам абсолютным и настоящим»), может оказаться и иррациональной. Чтобы обосновать такое определение, он указывает, что в вычислительной практике и землемерии взгляд на иррациональность, как на число фактически укоренился. «Вычислители и землемеры часто говорят: половина единицы или треть ее, или какая-нибудь другая доля ее, в то время как единица неделима; они рассматривают не абсолютную, настоящую единицу, из которой образуются настоящие числа, а предполагают единицу делимой. Далее они сравнивают величины с этой делимой единицей и с числами, образованными из нее. Они часто говорят: корень из пяти, корень из десяти и т. д. — их слова, действия и измерения изобилуют этими выражениями; при этом они имеют в виду число пять, состоящее из указанных делимых единиц. Следует, чтобы ты знал, что эта единица является делимой и величина, являющаяся произвольной величиной, рассматривается как число в указанном нами смысле» [339, стр. 145].

Рассуждения, в которых отношения несоизмеримых величин выступают в роли иррациональных чисел, уже до Хайяма стали обычными не только у практиков, но и в теоретических исследованиях. Подобные примеры в большом количестве имеются в арабских комментариях к книге X «Начал», рассмотренных в предыдущей главе. Однако, насколько известно сейчас, никто понятие иррационального числа не рассматривал с такой точки зрения, как Хайям. Все другие попытки обоснования этого понятия базировались на греческой теории отношений и не предполагали теоретического распространения понятия числа на отношения.

Определив отношение, как число, хотя и «не абсолютное и настоящее», Омар Хайям оперирует отношениями согласно правилам действий над числами и последовательно применяет арифметическую терминологию («равенство отношений», «умножение отношений»), как, впрочем, это делает Сабит ибн Корра.

Доказательство сформулированного выше предложения проводится следующим образом: после введения единицы и такой величины G, что $\frac{A}{B}=\frac{1}{G}$, «сделаем отношение единицы к величине D, как A к C, т. е. A относится к C, как единица к C. [Пусть далее] E относится к единице, как C к B. Тогда по равенству отношений A относится к B, как E к D. Но A относится к B, как единица к G. Поэтому E относится к D, как единица к G, т. е. эти четыре величины пропорциональны, и, следовательно, произведение единицы, являющейся третьей, на D, являющуюся второй, равно произведению E, являющейся первой, на G, являющейся четвертой. Но G есть отношение A к B, E есть отношение B к C, а D есть отношение A к C. Поэтому произведение отношения A к B на отношение B к C равно произведению единицы на D, т. е. отношению A к C. Но произведение единицы на всякую вещь есть в точности эта вещь, ни больше и ни меньше. Поэтому произведение отношения A к B на отношение B к C есть отношение A к C. Это и есть то, что мы хотели доказать» [339, стр. 145].

Таким образом, отношение — рациональное и иррациональное — у Омара Хайяма стало числом. Он четко сформулировал определение этого расширенного понятия числа, хотя и с известными оговорками, которые, принимая во внимание силу математических традиций, были вполне естественны.

Учение Хайяма о числе было продолжено другим выдающимся математиком — Насир ад-Дином ат-Туси. В знаменитом «Трактате о полном четырехстороннике» (китāб ал-шакл ал-кита), сыгравшем огромную роль в развитии тригонометрии, он изложил теорию составных отношений, рассматривая отношение как число. Это сочинение впервые было издано на французском и арабском языках в 1891 г. [463], а в 1952 г. появилось в русском переводе [176, 177, 222, 223, 267, 268, 327, 449].

Составное отношение и его свойства рассматриваются в первой книге «Трактата о полном четырехстороннике». Она состоит из 14 предложений [327, стр. 20—40]. Напомнив предварительно определение составного отношения из книги VI «Начал», основанное на понятии «количества отношения», ат-Туси доказывает, исходя из этого определения, предложение: «Если даны три однородные величины, находящиеся между собой в определенных отношениях, то отношение первой величины ко второй составлено из отношений первой величины к третьей и третьей величины ко второй». Таким образом, он, как и Омар Хайям, повторяет определение составного отношения, данное Сабитом ибн Коррой, как теорему.

В ходе доказательства ат-Туси так определяет понятие количества отношения: если даны три однородные величины A, B, C и единица, то «предположим, что эта единица измеряет величину E так же, как A измеряет C, единица измеряет величину D так же, как C измеряет B, единица измеряет величину F так же, как A измеряет B. Тогда величина E является количеством отношения $\frac{A}{C}$ величина D является количеством отношения $\frac{C}{B}$, а величина F является количеством отношения $\frac{A}{B}$» [327, стр. 21—22]. Следовательно, под количеством отношения двух величин ат-Туси понимает такую величину, которая находится к единичной величине в данном отношении. Далее ат-Туси говорит: «Поэтому каждое из этих отношений может быть названо числом, измеряемым единицей, так же как предшествующий член отношения измеряется последующим членом. Так как умножение одного числа на другое есть действие, состоящее в том, что первое число увеличивается во столько же раз, каково второе число, то составление одного отношения из двух других есть действие, состоящее в том, что количество первого отношения увеличивается во столько раз, каково количество второго отношения. Поэтому доказываемая нами теорема может быть записана в виде: величина F является произведением величины E на D». Тем самым ат-Туси с еще большей ясностью, чем Хайям, подчеркивает, что он рассматривает отношение двух непрерывных величин как число.

Известно, что впоследствии Ньютон дал общее определение числа как отношения некоторой произвольной величины к величине, однородной с ней и принятой за единицу.

* *

Рассмотрев все разделы учения о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке, можно сделать некоторые выводы.

Математики этого периода придерживались античных воззрений на число и величину, формально признавая принципиальное различие между этими понятиями. Однако, как мы убедились, происходило стирание этого различия: фактически понятие числа было распространено сначала на дроби и иррациональные (квадратные и кубические) корни, а затем на отношения произвольных однородных (соизмеримых или несоизмеримых) величин. Это явилось естественным следствием нового, по сравнению с античным, подхода к математической науке в целом, когда на равных правах с теоретическими разделами в нее были включены практическая арифметика и алгебра.

Потребности практики вызвали необходимость обратиться к решению разнообразных прикладных задач и стремиться получить при этом возможно более точные результаты, что, в свою очередь, привело к взгляду на отношения как на числа рациональные (дроби) и иррациональные (корни).

Числовая сущность иррационального проявлялась, когда оказывалось нужным приближенно выразить значение иррационального корня с помощью рациональных чисел. В обиходе математиков прочное место заняло «наивное», выражаясь словами Н. Бурбаки, понятие действительного положительного числа: «Это понятие не поддается точному определению, но его можно выразить, сказав, что число рассматривается как определенное благодаря возможности получать его приближенные значения и вводить их в вычисления» [77, стр. 146].

Однако результаты, полученные в вычислительной практике, в то же время рассматривались и с теоретической точки зрения, причем в области теории математики старались придерживаться логически завершенного учения греков. Именно этим объясняется подчеркнутое внимание, которое они обращали на классификацию квадратичных и биквадратичных иррациональностей и теорию отношений. Но новый подход к проблеме иррационального заставил переосмыслить классические теории; в результате книга X «Начал» Евклида была изложена в арифметической форме и возрождена антифайретическая теория отношений.

Пытаясь обосновать происходившее стирание противоположности между числом и величиной (выразившееся, в частности, в постоянном смешении арифметической и геометрической терминологий), математики пришли к установлению взаимооднозначного соответствия между числами и квадратными корнями, с одной стороны, и прямолинейными отрезками — с другой (Ибн ал-Багдади). Мы видели, как нарушался принцип однородности — важнейшее требование геометрической алгебры греков — и как в результате было создано своеобразное исчисление отрезков (Ибн ал-Багдади). Таким образом, можно проследить зарождение идей, которые впоследствии были сформулированы великим Декартом.

Многие важные результаты не получили теоретического развития в трудах более поздних восточных математиков. Не пытаясь дать этому исчерпывающего объяснения, укажем лишь, что после XIII в. интересы математиков стран ислама все более направляются на решения практических задач, возникающих чаще всего в астрономии. В этой области они получили замечательные результаты (например, работы ученых школы Улугбека). Практические вопросы постепенно оттесняли на задний план чисто теоретические проблемы, в том числе и проблему обоснования понятия иррационального числа. Кроме того, восточные математики в своих попытках такого обоснования слишком тяготели к классической традиции, которая в этом отношении была бесплодной.

Итак, в долгом и сложном процессе формирования понятия действительного числа труды математиков средневекового Ближнего и Среднего Востока сыграли очень большую роль, знаменуя собой начало нового периода истории математики. На заложенной ими основе базировались исследования европейских средневековых ученых, в сочинениях которых мы находим яркий пример преемственности научных идей.

Глава VIII. О ВЛИЯНИИ ТРУДОВ ВОСТОЧНЫХ УЧЕНЫХ НА РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ЕВРОПЕ

Сочинения восточных ученых, переведенные с арабского на латинский язык, оказали огромное воздействие на европейскую науку, в том числе на математику. Естественнонаучные и философские знания, почерпнутые из этих сочинений, послужили началом подъема и развития науки в средневековой Европе [27, 62, 70—72, 136, 145, 179, 204, 317, 332, 351, 358, 384, 461, 483, 548, 554, 576, 580—582, 608, 616, 625, 630, 633, 634, 774, 775, 817, 830, 840, 847, 881, 894].

Восточная наука начала проникать в Европу в X в. Главным пунктом этого проникновения были города Испании — Кордова, Севилья, Гренада, ставшие со времени захвата страны арабами важными культурными центрами. Сюда стекались ученые из различных европейских стран, особенно из Англии, Италии, Испании, и в XII в. здесь развила активную деятельность школа выдающихся переводчиков и комментаторов.

Большое значение для развития культурных и научных контактов имела торговля между европейскими государствами и странами Востока, осуществлявшаяся главным образом через Сицилию и Византию [27, 384, 580—582, 847, 881]. Значительно меньшую, хотя часто преувеличиваемую, роль в этом отношении сыграли крестовые походы [136, 728].

Вопросы, связанные с влиянием восточной науки на науку раннего европейского средневековья, чрезвычайно разнообразны и рассматривались многими авторами. Мы остановимся лишь на тех, которые касаются развития восточного учения о числе. В частности, рассмотрим латинские переводы с арабского языка и переводы «Начал» Евклида, а также скажем несколько слов о раннем этапе истории арифметики и алгебры в Европе.

§ 1. Средневековые европейские переводы математических сочинений

Математика европейского средневековья базировалась на начальных математических познаниях, сохранившихся в Европе от греко-римской науки, и на достижениях ученых Востока.

Традиции математического образования, уходившие корнями в римскую науку, были живы в Европе вплоть до XV в. [62, 581, 817]. В соответствии с этими традициями геометрия имела ту же практическую направленность, что и у римских землемеров; арифметика основывалась на действиях с помощью абака. Римская нумерация укоренилась прочно; и после введения арабских цифр операции с числами, записанными в новой системе, долго разъяснялись при помощи римских цифр [62].

Классификация наук, согласно которой они подразделялись на «тривиум» (грамматика, риторика и диалектика) и «квадривиум» (арифметика, геометрия, астрономия, музыка), также восходила к римлянам. Сведения по математике, сообщаемые учащимся, долгое время ограничивались лишь некоторыми свойствами чисел (в духе арифметики Никомаха) и разъяснением основных понятий геометрии в объеме книги I «Начал» Евклида; главный раздел астрономии составляли сведения о календаре.

Среди наиболее распространенных книг, предназначенных для обучения, можно назвать несколько сочинений энциклопедического характера, в том числе энциклопедии Марциана Капеллы (V в.), Макробия (V—VI вв.), Боэция (V—VI вв.), Кассиодора (V—VI вв.). Боэций [551, 590, 892, 927], чрезвычайно популярный в средневековой Европе автор, написал трактаты «Введение в арифметику» (основанный на переводе труда Никомаха) и «Введение в музыку» [461]. Кассиодор приписывал Боэцию также перевод на латинский язык «Начал» Евклида, но известное в настоящее время средневековое сочинение по геометрии, автором которого назван Боэций, по мнению исследователей, написано значительно позднее; оно получило название «Псевдобоэций» [384, 461, 587, 889]. Это сочинение содержит ряд определений и предложений (без доказательств) из книг I—IV «Начал».

К ученым, оставившим заметный след в ранней средневековой математике Европы, относятся ирландский монах Беда Достопочтенный (около 673—735 гг.), написавший сочинения о хронологии и пальцевом счете [384, 461], и Алькуин (около

735—804 гг.) [384, 461, 704], а к более поздним — Герберт (около 940—1003), в последние годы своей жизни ставший папой Сильвестром II [62, 72, 82, 452, 548—550].

Восточная математика известна европейцам с XI—XII вв. благодаря широко развернувшейся в это время работе переводчиков. Их труды сыграли важнейшую роль в истории науки, так как они впервые познакомили Европу с подлинными сочинениями греческих классиков, сохранившимися в арабских переводах, и с оригинальными трудами восточных ученых. Деятельность людей, возрождавших математическую науку после долгого периода, когда круг знаний по математике ограничивался учением Боэция, представляет большой интерес с точки зрения истории математики, и поэтому понятно, что она достаточно подробно освещена в литературе [376, 384, 430, 432, 439, 440, 461, 525—534, 554, 619, 623, 630, 634, 774, 775, 828, 830, 1029].

В числе переводчиков были люди различных национальностей; среди них не все владели одновременно арабским и латинским языками. Поэтому некоторые трактаты были переведены сначала на испанский и древнееврейский языки, а затем на латинский.

Математические и астрономические трактаты наряду с трудами по медицине привлекали в это время наибольшее внимание. Сочинения ал-Хорезми, ал-Фаргани, ан-Найризи, Ибн ал-Хайсама, Ибн Сины, ал-Баттани, Ибн Рушда и других скоро легли в основу естественно-научного образования, а имена их авторов в латинской транскрипции (Алгоритмус, Альдраганус, Анарициус, Альгазен, Авиценна, Альбатегниус, Аверроэс) приобрели огромную популярность как символы мудрости и учености.

К первым и наиболее выдающимся переводчикам математической литературы отосится английский бенедиктинский монах Аделард из Бата [587, 774, 830, 1029]. Из немногих сохранившихся сведений о нем можно заключить, что жил он около 1120—1130 гг. и был известным ученым своего времени, автором ряда оригинальных сочинений. Побывав в Испании, Греции, Малой Азии и Египте, он познакомился с трудами восточных математиков и перевел многие из них с арабского на латинский язык. Ему принадлежат, в частности, переводы «Начал» Евклида и таблиц ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити; имеется предположение [623], что он автор перевода арифметического трактата ал-Хорезми.

Многочисленными переводами с арабского трудов по философии, медицине, алхимии, а главное — по астрономии и математике, прославился Герардо Кремонский (1114—1187 гг.), работавший долгое время в Испании [430, 432, 433, 554, 774, 830, 1029]. Среди переведенных им сочинений — «Начала» и «Данные» Евклида, труды Птолемея, Архимеда, Менелая, Аполлония, Сабита ибн Корры, Ибн ал-Хайсама, алгебраический трактат ал-Хорезми и др.

Видными переводчиками XII в. были Роберт Честерский, который в 1145 г. перевел алгебру ал-Хорезми [630, 634], Иоанн Севильский — автор трактата «Книга Алгорисма о трактате арифметики» [440, 525, 623] и многие другие.

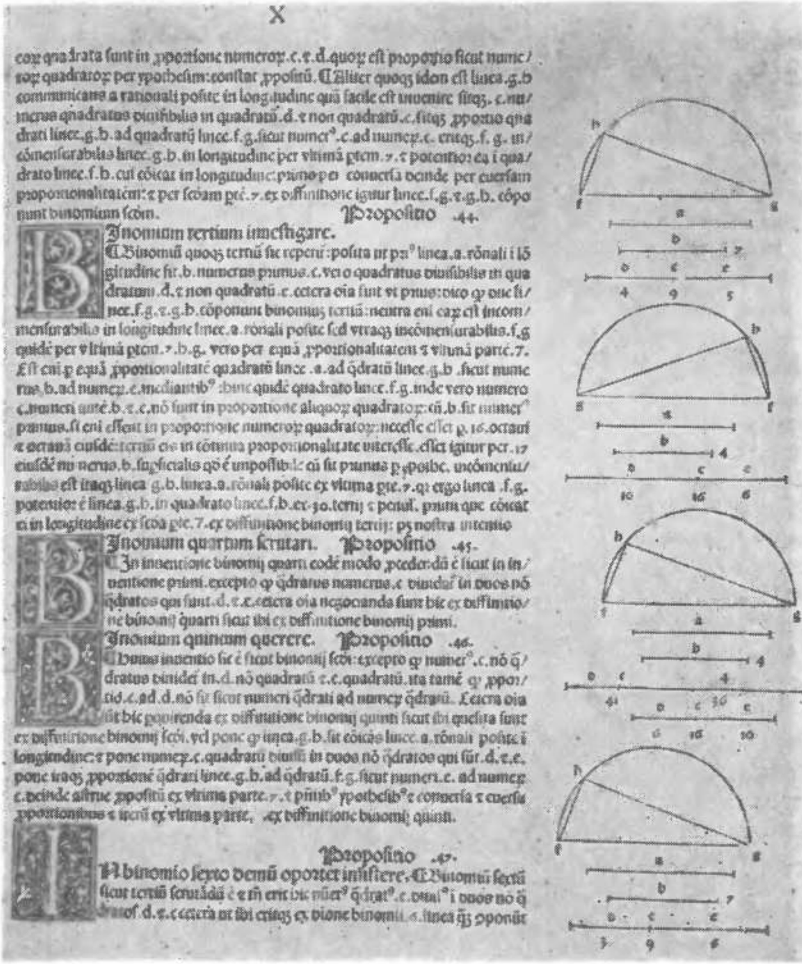
Передача в Европу математических и астрономических познаний греческих и средневековых восточных ученых происходила также через Византию. Византийская математика [384, 608] испытывала на себе, с одной стороны, эллинистическое, а с другой — индийско-арабское влияние. Об этом свидетельствуют, например, арифметическое сочинение Максима Плануда (1260—1310 гг.) и исследованный недавно византийский задачник XV в. [608].

Остановимся несколько подробнее на ранних европейских переводах «Начал» Евклида.

Впервые, насколько сейчас известно, это сочинение перевел с арабского языка Аделард из Бата приблизительно в 1120 г. (рукописи имеются в Британском музее, Оксфорде, Нюрнберге и Эрфурте). Второй по времени перевод, включающий книги XIV и XV, сделан в XII в. Герардо Кремонским. К переводу Аделарда во многом близок перевод «Начал», принадлежащий ученому XIII в. Джованни Кампано из Новары [431, 461, 532, 536*а*], которого Роджер Бэкон (1214—1294 гг.) называл выдающимся математиком своего времени [587] (рис. 24). Третий перевод сделан Германом из Каринтии.

Следует, кстати, заметить, что вплоть до XV в. Евклида, автора «Начал», путали с философом Евклидом из Мегары; эта ошибка была устранена Хр. Клавием (1537—1612 гг.) в его комментированном издании «Начал» [539]. Кроме того, считали, что Евклид дал лишь формулировки теорем, а доказательства их принадлежат Теону Александрийскому; в 1599 г. И. Бутео (1492—1572 гг.) в примечаниях к сочинению «О квадратуре круга» [461, т. II, стр. 517—519] доказал неверность этого утверждения.

Об источниках первых переводов «Начал» и связи между ними долгое время не существовало определенного представления. Некоторые авторы (Кестнер [639], Либри [683]) вообще не упоминали перевод Герардо Кремонского. С другой стороны, сходство переводов Аделарда и Кампано либо совсем не отмечалось (Ганкель [576], Кестнер [639]), либо высказывалось мнение (Либри [683], Вюстенфельд [1029]), что Кампано лишь прокомментировал перевод Аделарда.


X

Propositio .44.

Binomium tertium investigare.

Binomium quartum scrutari. Propositio .45.

Binomium quintum querere. Propositio .46.

Propositio .47.

Рис. 24. Страница из издания „Начал“ Евклида в обработке Кампано (1482 г.).

В 1870 г. Г Вейсенборн [928, 929] сравнил рукописи перевода Аделарда с печатным изданием перевода Кампано и установил различие между ними: в определениях, постулатах, аксиомах, в формулировке предложений и в порядке их следования оба перевода почти полностью совпадают, но доказательства совершенно различны (Аделард доказывает предложения кратко и часто оригинальным способом, а изложение Кампано столь же обстоятельно, как и евклидово, и мало от него отличается). Автор считает наиболее вероятным предположение о том, что эти переводы были сделаны с различных арабских источников.

К другому заключению пришел М. Курце [485, 490, 494], обнаруживший в Мюнхене рукопись трактата XII в., во многом текстуально совпадавшую как с переводами Аделарда и Кампано, так и с более ранним так называемым «Псевдобоэцием». Это дало ему возможность, во-первых, утверждать, что и до XII в. существовал полный перевод «Начал» непосредственно с греческого языка, а во-вторых, высказать предположение, что Аделард использовал этот текст и только доказательства взял из арабской версии. Что касается текста Кампано, то Курце считает его отличия от текста Аделарда результатом переделок переписчиков, вносивших свои поправки на основании имевшихся у них арабских рукописей.

Ту же мюнхенскую рукопись исследовал позднее Гейберг [590] и сделал существенно иной вывод: по его мнению, она появилась в результате соединения двух переводов, из которых один был сделан с греческого, а другой — с арабского текста. Он обратил внимание на то, что при сходстве переводов Аделарда и Кампано различия между ними столь явственны, что трудно видеть в них, как это делает Курце, варианты одной и той же версии. Гораздо более вероятным Гейберг считает предположение, что здесь мы видим различные обработки одного и того же оригинала, а так как добавления не имеют ничего общего с греческим текстом, то их источник следует искать в арабских переводах, о которых, как отмечает автор, мы, к сожалению, знаем слишком мало.

М. Кантор [461, т. II, стр. 91, 92], согласившись с тем, что, очевидно, Аделард, кроме арабского текста, имел перед собой и раннюю латинскую обработку, заметил также, что предположение об использовании Кампано перевода Аделарда опровергается, во-первых, различием в расположении материала (Аделард сначала дает доказательство предложения, а затем его формулировку, Кампано же следует обычному порядку) и, во-вторых, тем, что Аделард очень краток, а Кампано значительно более пространен и ясен. Согласно Кантору, добавления в переводах имелись в использованных обоими авторами арабских версиях и были заимствованы из них так же, как и некоторые термины (названия almuayn и elmuarif для ромба и неправильного четырехугольника).

Т. Хис [587] отметил, что спор об источниках и взаимосвязях ранних переводов «Начал» до сих пор не привел к какому-либо определенному заключению. Он считает, что переводы Аделарда и Кампана нельзя назвать независимыми, и полагает, что Кампано использовал перевод Аделарда, но расширил доказательства с помощью какой-то арабской версии «Начал».

В подтверждение существования раннего (до XI в.) латинского перевода «Начал» с греческого оригинала он приводит старинные английские стихи, в которых говорится, что Евклид был известен в Англии уже в X в., однако, как позже показал А. Ф. Елдгам (Isis, IX, 1927, 234—238), это мнение ошибочно, ибо упомянутые стихи в действительности не относятся ни к «Началам», ни к другому сочинению Евклида.

Перевод «Начал», принадлежащий Герардо Кремонскому, упоминался в списке его сочинений [439], но долгое время считался утерянным. Обнаружил его в 1901—1904 гг. А. Бьёрнбо. Он нашел три полные рукописи и ряд отрывков [429, 432] и установил авторство Герардо. Этот перевод не зависит от перевода Аделарда. По мнению Т. Хиса [587], возможно, Герардо также использовал неизвестную нам раннюю латинскую версию «Начал», однако в основном он дал точный перевод арабского текста Евклида, принадлежащего Сабиту ибн Корре, на которого сделаны многочисленные ссылки. Из высказываний Герардо видно, что он, как и Ибн Кифти [684], считал Сабита автором независимого перевода «Начал» в противоположность Якубу ан-Надиму [546], приписывавшего Сабиту лишь обработку версии Исхака ибн Хунайна. Герардо добавил также ряд замечаний и привел дополнительно доказательства, которые, по его словам, имеются в других арабских версиях «Начал».

Помимо трех рассмотренных средневековых европейских переводов «Начал» Евклида, известен также принадлежащий Герардо Кремонскому перевод комментариев ан-Найризи (в латинизированной форме Анарициус) к этому сочинению. Рукопись этого перевода была обнаружена М. Курце в Кракове и опубликована в 1899 г. в дополнительном томе к полному собранию сочинений Евклида, изданному И. Гейбергом [494, 541]. Находка М. Курце явилась в свое время большим событием. Изучение этого трактата привело к выводам, важным для истории как греческой, так и средневековой (восточной и европейской) математики [428, 430, 693, 855, 864, 866, 890].

Латинский текст комментария ан-Найризи позволил заполнить лакуны арабского текста, который сохранился в единственной известной сейчас лейденской рукописи, содержащей только книги I—VI «Начал» [424]. В частности, были обнаружены интересные извлечения из греческих комментариев к «Началам», принадлежащих Герону и ученым V—VI вв. Симпликию [423, 826] и Аганису [244, 279, 693, 849, 890].

Последняя часть краковской рукописи [494, стр. 252—389] содержит латинский перевод комментария к книге X «Начал», автор которого не указан. Этот перевод, также принадлежащий Герардо Кремонскому, существует в латинских рукописях, носящих разные названия. В парижских рукописях (7377 A/1 и 9335/16) он называется «Abbacus», в кембриджской — «De numeris et lineis» [859]. Кроме того, в средневековом списке сочинений Герардо, опубликованном Б. Бонкомпаньи [439], он фигурирует под названием «Liber judei super decimum Euclidis». Латинский текст перевода издавался дважды: в 1863 г. Бонкомпаньи [859] и в 1899 г. М. Курце [494].

Особое внимание исследователей привлек вопрос об авторе арабского сочинения, так как имя его не приведено ни в одной из рукописей. В публикации Курце авторство было приписано ан-Найризи, что вскоре опроверг А. Бьёрнбо [428]. Г. Зутер [859], исходя из заглавия парижской рукописи («Abbacus») и считая его латинизированным именем автора, на основании изучения арабских библиографических словарей пришел к выводу, что трактат принадлежит Абу Бакру Мухаммаду ибн Абд-ал-Баки ал-Багдади. Этот ученый около 1100—1120 гг. читал лекции в Багдаде и был известен как автор популярного комментария к книге X «Начал», где приводились числовые примеры к предложениям Евклида [866]. Однако, как отметил в 1936 г. Юнге [619], автор арабского комментария, который перевел Герардо Кремонский, и сейчас точно не установлен.

Приведенный выше обзор сведений об источниках и взаимозависимости ранних латинских переводов «Начал» Евклида показывает, что оставшиеся невыясненными вопросы можно решить только после сравнительного изучения всех арабских версий «Начал» и их латинских переводов.

«Начала» Евклида выдержали в Европе огромное число печатных изданий [102, 122, 295, 460, 461, 587, 588]. Первое из них (Венеция, 1482), осуществленное Эрхардом Ратдольтом [461, т. II, стр. 265—267], воспроизводило, как указано в заглавии, текст перевода Кампано [536 *a*] (теперь об этом переводе судят по изданию 1482 г., но действительно ли оно дает точный текст Кампано — не доказано [514, т. X, стр. 262]). Это издание было повторено Ратдольтом в том же 1482 г. [911]; (другие издания вышли в 1486 г. в Ульме и в 1489 г. — в Базеле).

В 1500 г. в Венеции впервые был опубликован латинский перевод «Начал» с греческого текста, выполненный Бартоломео Замберти, который, по его свидетельству, отдал этому труду 7 лет [587, 929]. Замберти подверг критике перевод Кампано, упрекая его в многочисленных неточностях и «варваризмах».

Лука Пачоли (1445—1514 гг.) переиздал в 1509 г. текст Кампано [461], исправив ошибки переписчиков, из-за которых, как он говорит, трудно узнать Евклида. В 1516 г. вышло первое совместное издание переводов Кампано и Замберти, воспроизводившееся впоследствии несколько раз.

Греческий текст «Начал» впервые был издан в Базеле в 1533 г. Вскоре стали появляться переводы «Начал» на европейские языки; так, первое немецкое издание вышло в 1562 г., итальянское (перевод Тартальи [538]) — в 1565 г., английское — в 1570 г. В переводах, чаще всего комментированных, «Начала» разъяснялись, пополнялись новыми определениями и предложениями, а иногда и исправлялись [134].

§ 2. Арифметика и алгебра в средневековой Европе

Преемственность научных традиций различных стран и народов наглядно выступает при сравнении арифметики и алгебры европейского и восточного средневековья.

Знаменательным событием в истории арифметики и алгебры явилась публикация в 1202 г. «Книги абака» (Liber abaci) [677] выдающегося итальянского математика XII—XIII вв. Леонардо Пизанского (около 1170—1250 гг.), известного также под именем Фибоначчи. В «Книге абака», которая долгое время служила своего рода энциклопедией, были собраны и систематизированы сведения, почерпнутые автором из восточной математики. Благодаря этому сочинению результаты, полученные математиками Ближнего и Среднего Востока, стали достоянием европейских ученых.

Важное место в ранней истории европейской арифметики и алгебры занимают также труды Иордана Неморария (вероятно, современника Леонардо Пизанского). Среди его сочинений по математике и механике наибольшей известностью в свое время пользовались трактаты по арифметике («Arithmetica decem libros demonstrata» [530], «Demonstratio magistri Iordani de algorismo» [461, 526—528]), алгебре («De numeris datis» [160, 485, 487, 905]) и геометрии («De triangulis» [461]). В этих сочинениях ясно заметны следы влияния восточной математической литературы; так, по словам Энестрёма [531], второй из названных трактатов Иордана Неморария «представляет собой попытку обобщить учение Евклида при учете арабской арифметики». То же можно сказать о его алгебраическом и геометрическом трактатах.

Наиболее важную роль в истории европейской науки XV—XVI вв. сыграла итальянская математическая школа: Лука Пачоли, Сципион дель-Ферро (1465—1526 гг.), Николо Тарталья (1500—1557 гг.), Джироламо Кардано (1501—1576 гг.). Не менее значительный след в истории арифметики и алгебры оставила деятельность немецких математиков: Георга Пейрбаха (1423—1461 гг.), Региомонтана (1436—1476 гг.), Андреаса Александра (нач. XVI в.), Иоганна Видмана (конец XV в.), Христофа Рудольфа (около 1500—1545 гг.), Михаэля Штифеля (около 1486—1567 гг.), Адама Ризе (1492—1559 гг.). Следует упомянуть также французских математиков Ник. Шюке (XV в.), Иог. Бутео (1492—1572), Пьера де ля-Раме (1515—1572 гг.), обычно называемого Рамусом, и др. Коротко остановимся на сочинениях некоторых из этих ученых.

Арифметика в средневековой Европе так же, как в Греции и на Востоке, подразделялась на теоретическую и практическую.

Теоретическая арифметика

Основное содержание теоретической арифметики раннего европейского средневековья исчерпывалось «Введением в арифметику» Никомаха. Это сочинение, переведенное с греческого на латинский язык еще во II в., подробно излагалось в трудах Боэция [551] и Кассиодора.

Арифметика и ее основные понятия трактовались этими авторами в пифагорейской традиции. Так, Кассиодор в сочинении «О семи науках» подробно разъясняет, что арифметика является первым разделом математики, потому что другие разделы — геометрия, музыка и астрономия — нуждаются в арифметике, тогда как она не нуждается ни в одной из этих наук. Цель арифметики Кассиодор видит в «изучении природы абстрактных чисел и того, что им присуще, например, четность, нечетность и т. д.». Вслед за Никомахом целые числа подразделялись, согласно четырем точкам зрения, во-первых, на четные (четно-четные, четно-нечетные, нечетно-четные) и нечетные (простые и составные, взаимно-простые и взаимно-составные); во-вторых, на совершенные, недостаточные, избыточные; в-третьих, на числа, рассматриваемые отдельно, и числа, рассматриваемые по отношению к другим числам; в-четвертых, на дискретные и непрерывные (линейные, плоские, телесные).

Вплоть до XVI в. эта классификация приводилась почти во всех сочинениях арифметического содержания. Основные понятия никомаховой арифметики разъясняли Леонардо Пизанский [667], Иордан Неморарий [530], Ник. Шюке [888], Лука Пачоли [639], Тарталья [481], Мавролик [698] и др. Греческий текст «Введения в арифметику» Никомаха был издан в Париже в 1538 г.

Большой интерес вызывали задачи теоретической арифметики, например, нахождение совершенных и многоугольных чисел. Так, Боэций указал четыре совершенных числа—6, 28, 496, 8128 — и утверждал (ошибочно), что всякое число такого рода должно оканчиваться либо на 6, либо на 8. В анонимной немецкой рукописи, датированной 1456 г. [488], указано пятое совершенное число 33 550 336; Лука Пачоли привел пример с четырнадцатым совершенным числом [505].

Многоугольные числа в сочинениях римских землемеров [461] трактовались ошибочно: их рассматривали как значения площадей соответствующих фигур. Эту ошибку устранил Герберт в одном из своих писем [452]. Вычислением многоугольных чисел занимались позже Кардано, Штифель и др.

Помимо задач, возникавших из никомаховой арифметики, европейских ученых уже в XIII в. привлекали другие задачи, часто восточного происхождения. Это касается прежде всего вопросов, связанных с решением неопределенных уравнений; например, у Леонардо Пизанского имеется на эту тему сочинение «Книга квадратов»*

В дальнейшем интерес к исследованию свойств чисел постоянно возрастал, задачи становились все разнообразнее. Об этом свидетельствует упомянутая немецкая рукопись XV в., в которой наряду с другими арифметическими предложениями сформулированы следующие (в современной тер-

---

* Латинский текст ее издан Бонкомпаньи в 1851 г., а французский перевод — в 1952 г.

минологии): «Квадрат четного числа всегда делится на 4»; «Никакой квадрат не может иметь вид $10n+2$, $10n+3$, $10n+8$, «Всякий квадрат должен иметь вид $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, $7n$ или $9n+1$, $9n+4$, $9n+7$, $9n$» и т. д.

Однако до конца XV в. теоретическая арифметика не обогатилась существенно новыми результатами. Повороту в ее развитии, происшедшему в начале XVI в., способствовали достижения алгебры (в частности, введение алгебраической символики, позволившее получать обобщенные результаты) и развитие понятия числа. Толчком к новым исследованиям явилось издание в 1621 г. Баше де-Мезириаком (1587—1638 гг.) «Арифметики» Диофанта. Это издание в большой мере содействовало популяризации идей Диофанта и вызвало интерес к арифметическим вопросам, которые вскоре стали предметом оживленного обсуждения. Такого рода исследованием занимались многие ученые XVI—XVIII вв.: Баше де-Мезириак, Френикль де-Бесси (1602—1675 гг.), Жак де-Билли (1602—1679 гг.), Жак Озанам (1640—1717 гг.) и такие выдающиеся математики, как Ферма (1601—1665 гг.), Паскаль (1623—1662 гг.), Декарт (1596—1650 гг.), Лейбниц (1646—1716 гг.) и Эйлер (1707—1783 гг.). Трудами Пьера Ферма и Леонарда Эйлера в этой области знаменуется начало теории чисел как науки.

Практическая арифметика

Огромное значение для развития математики в средневековой Европе имело введение индийско-арабских цифр, которые с X в. постепенно начали вытеснять издавна укоренившуюся здесь римскую нумерацию [34, 62, 70—72, 384, 461]. Арифметика, основанная на десятичной позиционной системе счисления с ее явными преимуществами, пришла на смену счету с помощью абака.

Средневековый европейский абак по сравнению с древним отличался значительными усовершенствованиями: вместо камешков, изображавших единицу и помещавшихся в соответствующие столбцы счетной доски, применяли жетоны с записанными на них цифрами, называвшиеся «апексами». До нашего времени дошли многочисленные латинские рукописи, в которых излагаются правила арифметических действий на абаке [384, 461, 549, 550]. Апексы были первыми проводниками индийской нумерации в Европе [384, стр. 336—342].

История происхождения современных цифр порождает многочисленные вопросы, на которые различные авторы дают ответы, часто противоречащие друг другу; это касается прежде всего вопроса о том, в какой зависимости находится форма наших цифр от формы индийских, восточно- и западно-арабских цифр [34, 62, 67, 71, 370, 371, 384, 461, 815, 1022]. Не останавливаясь ни на этом, ни на других проблемах такого рода, отметим лишь, что десятичная позиционная нумерация и основанная на ней арифметика достаточно быстро распространились в европейских государствах [109, 461, 568, 572, 700, 909].

Успеху новой арифметики способствовали переводы арабских математических сочинений, которые основательно изучались и постепенно приобретали популярность не только в ученой среде, но и в торговых и деловых кругах. К ним в первую очередь относятся переводы трактата ал-Хорезми «Об индийском счете» (см. гл. IV, § 3), сыгравшие наиболее серьезную роль в пропаганде восточной арифметики. Ее стали называть именем ал-Хорезми, в латинизированной форме «алгоритм» или «алгорисм» [610]. Внедрение восточной арифметики происходило в борьбе между ее сторонниками, так называемыми «алгорисмиками», и приверженцами старых методов счета с помощью абака — «абацистами».

К первым латинским сочинениям по «алгорисму», появившимся в Европе в XII—XIII вв., относятся арифметический трактат* Ник. Окреата (O'Creat); «Carmen de algorismo»** Александра де Вильдье; «Algorismus vulgaris» Джона Голивуда, известного под именем Сакробоско [491]; упомянутый выше трактат по алгорисму Иордана Неморария и другие, большей частью анонимные [461, 493, 525, 533, 534, 629, 711, 713].

«Книга абака» [677] Леонардо Пизанского явилась первым сочинением, в котором последовательно и с исчерпывающей полнотой излагалась индийская арифметика целых и дробных чисел; по плану построения она сходна с арифметическими трактатами восточных математиков. В некоторых случаях Леонардо Пизанский применяет арабские термины; например, для правила двух ложных положений сохраняется арабское название elchatayn.

В XIV—XV вв. индийская арифметика распространилась в среде купцов и вычислителей (сначала в Италии, а затем

---

* Отрывки из него опубликованы в Abhandl. zur Geschichte der math. Wiss., Hft III, 1880.

** Опубликован в Лондоне в 1839 г.

в Германии и Франции). Методы ее излагались во всех математических сочинениях.

Практической арифметике отведена значительная часть знаменитого труда Луки Пачоли «Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita», изданного в Венеции в 1494 г. [384, 461, 639, 820]. Помимо теории «искусства счета», здесь, как и у Леонардо Пизанского, излагаются правила разного рода торговых вычислений, обмена, бухгалтерского учета и т. п. Как и Леонардо, Пачоли иногда применяет арабские термины: например, правило ложного положения называется у него либо «el Catayno», либо по-итальянски «regola delle doi falsi positioni».

В сочинении Ник. Тартальи «General trattato di numeri et misure» столь же обстоятельно излагаются правила практической арифметики с приведением большого числа задач и упражнений. Первые два тома этого сочинения вышли в Венеции в 1556 г., а третий — там же в 1560 г.

В Германии [568, 572, 907] с развитием торговли и ремесел также возросла потребность широких деловых кругов в освоении методов счета. Уже в XIII в. возникли специальные школы, в которых обучались будущие вычислители (Rechenmeister), сыгравшие большую роль во внедрении индийско-арабской арифметики. В противоположность монастырским (латинским) школам, в школах для вычислителей обучались простые граждане, и преподавание в них велось на родном языке. Поэтому вскоре наряду с латинскими появились многочисленные немецкие учебники по «алгорисму» [461, 909]. Среди первых и наиболее значительных сочинений такого рода были труды Ульриха Вагнера (1482 г.), Иоганна Видмана («Behende und hubsche Rechnung auff allen Kauffmanschafft») [568, 572], Адама Ризе («Rechnung auff der Linien und Ziphern in allerley Handthierung Geschäften und Kauffmanschafft», 1581), Мих. Штифеля («Deutsche Arithmetica», 1545) и др.

Во Франции важным научным событием явилась публикация в 1484 г. сочинения Ник. Шюке «Le Triparty en le science des nombres [461, 888]; оно было широко распространено в рукописях и оказало сильное влияние на более поздних ученых. В XVI в. появились сочинения Бутео «Arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta», П. Рамуса «Arithmetice libri dvo» и другие, в которых подробно разъяснялись арифметические правила.

Изложение практической арифметики [123, 204, 384, 907], как и у восточных математиков, начиналось с описания способа записи чисел с помощью индийских цифр (например, Леонардо Пизанский говорит, что «с помощью девяти индийских знаков и знака 0, который по-арабски называется сифр*, можно записать какое угодно число»). Затем рассматривались правила действий с целыми числами.

Сложение и вычитание выполнялось обычно справа налево, но иногда и в обратном порядке. Приводилось несколько способов умножения (например, Пачоли предлагает восемь таких способов); некоторые из них непосредственно заимствованы из восточных сочинений. Несколькими способами производилось и деление, которое считалось весьма трудной операцией. Предлагалась проверка деления и умножения, чаще всего с помощью девятки или семерки. Иррациональные квадратные и кубические корни извлекали приближенными методами, описанными восточными математиками. Новый метод, связанный с разложением в цепные дроби, предложил для случая квадратного корня Шюке [888].

В следующем разделе рассматривались действия с обыкновенными и шестидесятиричными дробями [384, 531, 534, 607]. Открытие в XV в. десятичных дробей Джамшидом Гияс ад-Дином ал-Каши (см. гл. VI) не дошло до Европы; европейские математики пришли к этому открытию самостоятельно [531, 561, 773].)

Далее в учебниках по арифметике рассматривались различные задачи коммерческого характера.

Алгебра

Влияние восточной математики на европейскую можно проследить также на примере алгебры. Первым переведенным на латинский язык арабским алгебраическим сочинением был трактат ал-Хорезми [432, 521, 630, 631, 683], который неоднократно комментировался впоследствии европейскими учеными. Известно, например, что автором одного из комментариев был выдающийся нидерландский математик Адриан ван Роумен (1561—1615 гг.) [444, 771].

Были переведены с арабского и другие алгебраические трактаты [461, 529]. Один такой перевод, принадлежавший Герардо Кремонскому, опубликован Бонкомпаньи в 1851 г. [439].

В XIII в. появились европейские сочинения по алгебре, в которых эта наука, в противоположность общей арифметике (Ars minor — малое искусство), называлось большим искус-

---

* الصفر ас-сифр, по-арабски «пустой».

ством (Ars major); иногда (вплоть до XVI в.) за ней сохранялось арабское название «Algebra et almuchabala», а иногда ее именовали по-латински «Ars rei et census».

«Книга абака» Леонардо Пизанского наряду с арифметикой целых и дробных чисел содержит систематическое изложение правил «алгебры и алмукабалы». В алгебраическом трактате «О данных числах» Иордана Неморария [160, 384, 487] частично повторяется содержание труда Леонардо, но имеется и много нового; особенный интерес представляет отвлеченный характер изложения алгебры и применение букв как символов произвольного числа.

Алгебраические методы раньше всего прочно вошли в итальянскую математику [628, 683], чему в большой степени способствовали труды Леонардо Пизанского. Унаследованное от восточных математиков учение о линейных и квадратных уравнениях было той основой, на которой в XV в. продолжалось развитие алгебры. В названном выше сочинении Пачоли, в котором впервые встречаются элементы алгебраической символики [384, 461, 639], подведен итог результатам, полученным до XV в.; на это сочинение опирались в своем творчестве выдающиеся итальянские алгебраисты XVI в. Ферро, Тарталья, Кардано и другие, нашедшие алгебраическое решение кубического уравнения — задачи, оказавшейся непосильной для греков и математиков средневекового Востока [204, 351, 461, 683].

Своеобразным путем шло развитие алгебры в Германии [461, 517, 568, 572, 906, 924, 925], куда она была принесена из Италии в середине XV в. [488] и распространилась под названием «правила коссе» или «искусства коссе» (от итальянского слова cose — вещь, соответствующего арабскому «шай» и латинскому res и обозначавшего неизвестную в уравнении [512]). Вначале вычислители, постигшие это искусство и прославившиеся умением решать с его помощью трудные практические задачи, держали алгебраические методы в секрете, но затем появились и печатные труды по алгебре. Огромной заслугой немецких «коссистов» в истории математики является разработка алгебраической символики и прежде всего—введение специальных знаков для обозначения алгебраических операций.

Среди первых немецких математиков, о которых известно, что они знали алгебру, были Пейрбах, Региомонтан, Видман, Андреас Александр.

Иоганн Видман впервые применил знаки + и — для обозначения сложения и вычитания. Известно, что он читал лекции и написал учебник по алгебре [517, 925].

Вопрос о личности и трудах математика начала XVI в. Андреаса Александра был поднят в литературе сравнительно недавно [516, 518, 923]. Сейчас считается, что немецкая алгебра, опубликованная в 1902 г. М. Курце («Die Algebra des Initius Algebras ad Ilem geometram magistrum suum») — это перевод латинского труда Андреаса на немецкий язык. Сочинение по алгебре («Die Coß») написал также Адам Ризе; текст ее издан в 1892 г.

Большое значение для развития алгебры имела книга Хр. Рудольфа, „Die Coß", вышедшая в 1525 г., и её переработка, осуществленная Мих. Штифелем [833], а также знаменитое произведение Штифеля „Arithmetica integra" [834].

Видным немецким алгебраистом XVI в. был также Иоганн Шейбель (Scheubelius, 1494—1570 гг.); в 1552 г. в Париже вышло его сочинение „Algebrae compendiosa fasilisque descriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula", в котором дано систематическое изложение алгебры по образцу сочинений Рудольфа и Штифеля.

Среди французских сочинений XVI в. по алгебре следует упомянуть „De arte magna seu de occulte parte numerorum, que et Algebra, et Almucabala vulgo dicitur" Ж. Госселина (1577) [445]; здесь в последний раз в европейской литературе арабское слово „almucabala" встречается в заглавии книги.

В Англии в 1556 г. Роберт Рекорд издал учебник по алгебре „Whetstone of witte", написанный в форме вопросов и ответов [461]; в этом учебнике впервые для обозначения равенства был применен знак

Влияние восточной математики на европейскую можно проследить и на целом ряде терминов, имеющих арабское происхождение [512, 513, 520—522, 524, 862].

§ 3. Учение об иррациональном числе в европейской математике XII—XVII вв.

Продолжая развивать математику в тех направлениях, в которых она оформилась на Востоке, средневековые европейские ученые также пытались теоретически обосновать операции с числовыми иррациональностями и пошли дальше по пути формирования понятия действительного числа. Как и их предшественники, они исходили при этом из греческой теории отношений. Эта теория [461] изложена в трудах Брадвардина, Орема, Луки Пачоли; последний в числе источников упоминает сочинения Сабита ибн Корры.

Существенно новые шаги в развитии теории отношений сделаны в XVI в., когда в поставленном восточными математиками вопросе о количественной характеристике отношения была достигнута еще большая определенность.

Так, Хр. Клавий (1537—1612 гг.) в комментарии к «Началам» Евклида [539] вводит понятие «знаменователя» рационального отношения и выражает его с помощью рационального числа. Таким образом, арифметические действия над рациональными отношениями оказываются столь же законными, как и действия над рациональными числами.

Еще больший прогресс был достигнут в «Геометрическом труде» Григория из Санкт-Винцента (1584—1667 гг.), который рассматривал «знаменователи» не только у рациональных, но и у иррациональных отношений и, следовательно, полностью арифметизировал теорию отношений [354, 355].

Развитие этих идей привело позднее к тому взгляду на число, которое нашло выражение в определении, данном Ньютоном: «Под числом мы понимаем не столько собрание единиц, сколько отвлеченное отношение какого-либо количества к другому, принятому за единицу». Процесс формирования понятия действительного числа закончился лишь в конце XIX в., когда Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором было дано тематически строгое определение действительного числа.

Для подтверждения мысли о преемственности традиций в учении о числе у математиков Востока и Европы мы несколько подробнее рассмотрим вопрос о судьбе книги X «Начал» в европейской математике.

Теорию квадратичных иррациональностей европейские ученые, как и восточные математики, излагали в комментариях к «Началам» Евклида и в специальных главах алгебры.

Первое известное изложение книги X «Начал» находится в 12-й главе «Книги абака» Леонардо Пизанского. Он повторяет уже знакомое нам определение: «Корень из какого-либо числа — это такое число, которое, будучи умножено на себя, производит само число», и вслед за восточными авторами отмечает: «Некоторые числа имеют корень и называются квадратами, а некоторые не имеют; их корни называются глухими (surdae), потому что их нельзя найти в числах» [677 стр. 353]. Здесь дается буквальный перевод арабского термина (аçам — глухой) для обозначения понятия иррациональности. До Леонардо Пизанского его применил Герардо Кремонский в своем переводе неизвестного комментария к книге X «Начал»: «Глухая величина... это та, которую нельзя выразить словом, как корни чисел, не являющихся квадратными» [494, стр. 253].

Леонардо Пизанский предлагает способ приближенного извлечения иррационального корня, но рассматривает его как среднее геометрическое между двумя отрезками, построенное циркулем и линейкой.

Во второй части 14-й главы некоторые предложения книги X „Начал" изложены „с помощью чисел" Здесь мы встречаем определения евклидовых иррациональностей в арифметической форме, данные ранее арабскими авторами, например, ал-Каласади, но для обозначения рациональной величины применено слово riti, непосредственно происшедшее от греческого термина ῥητοί. Вероятно, Леонардо Пизанский имел перед собой какой-то латинский перевод „Начал" с греческого оригинала. Первая биномиаль (primum binomium) определена следующим образом: „Первая биномиаль есть совокупность числа и корня, причем степень числа превосходит степень корня" Свои определения шести биномиалей Леонардо Пизанский сопровождает числовыми примерами (выраженными словесно): $4+\sqrt{7}$, $\sqrt{112}+7$, $\sqrt{112}+\sqrt{84}$, $4+\sqrt{10}$, $\sqrt{20}+3$, $\sqrt{20}+\sqrt{8}$.

Формулируются теоремы об извлечении корня из биномиалей. Примечательно, что, как и восточные авторы, Леонардо Пизанский смешивает геометрическую и арифметическую терминологии. Например: «Корень из третьей биномиали есть линия, которая называется бимедиальной (bimedialis), или из двух средних (mediis) второй; под этим понимается сумма двух корней из корней, соизмеримых только в степени, из которой один, будучи умножен на другой, производит среднее, т. е. корень из неквадратного числа» [677, т. I, стр. 357].

Аналогично определяются вычеты (recisi) и формулируются теоремы об извлечении корней из них.

В следующих разделах 14-й главы рассматриваются правила умножения корней на корни и числа [677, т. I, стр. 358], на корни из корней [677, т. I, стр. 359], находятся два корня из корня, которые, будучи перемножены, производят рациональное (riton), дается правило извлечения корня

$$a+\sqrt{b}=\sqrt{a^2+b+2\sqrt{a^2b}} \text{ и т. д.}$$

Вопрос об источнике, из которого Леонардо Пизанский познакомился с книгой X «Начал», обсуждался в литературе

[520, 521, 523], причем высказывалось предположение, что он узнал о ней от какого-то византийца. Приведенные выше арабские комментарии к книге X показывают, что Леонардо Пизанский продолжал восточную традицию, излагая предложения на языке арифметики. Новым у Леонардо является вопрос о «триномиалях», т. е. о суммах трех корней, и об их умножении.

Интересный результат в теории иррациональных величин получен Леонардо Пизанским в его трактате «Floβ» [677, т. I, стр. 227—252] при решении кубического уравнения

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20;$$

он ставит вопрос: возможно ли вообще решение этого уравнения в иррациональностях книги X, и доказывает, что ответ должен быть отрицательным.

В трактате Луки Пачоли „Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita“ [461, 639] теория квадратичных иррациональностей также рассматривается в арифметической форме. В вопросах истолкования понятия числа и иррационального корня этот автор стоит на той же позиции, что и его предшественники. В первом разделе своего сочинения он излагает учение о числах в традиционном, т. е. никомаховом, стиле. Для иррациональных корней, как и у Леонардо, приводятся рецепты для их приближенного вычисления („approximatio radicum in surdis“). Обзор содержания книги X „Начал“ Пачоли дает в разделе „Практические операции алгебры и алмукабалы“ Применяя, как уже сказано, символы для обозначения корня $\left(\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }\right.$, соответственно изображаются знаками* R или $R2$, $R3$, $R4$ или $\left.RR\right)$, операций сложения $(\tilde{p})$, вычитания $(\tilde{m})$ и др., он излагает правила действий с корнями, а затем переходит к „иррациональным линиям из X книги Евклида“ и к арифметической интерпретации её предложений. В тех случаях, когда Пачоли выходит за ее пределы (например, при операциях с триномиалями), он допускает ошибки.

В книге X „Начал“ в Европе, как и раньше на Востоке, видели одну из важнейших глав алгебры, и алгебраисты по-видимому, были основательно с нею знакомы. Об этом свидетельствует, например, мюнхенская рукопись XV в. (см. выше), написанная частично на немецком, частично на

* Знак R перечеркнут внизу косой чертой.

латинском языке [488]. В ней со ссылкой на ал-Хорезми разъясняются понятия квадрата (census), корня (radix) и числа („Machmet in dem peuch algebra und almolcabola hat gepruchet dise wort census, radix, numerus“) и даются примеры использования правил алгебры. При решении одного из них возникает необходимость разделить число на „биномиаль“. Автор разъясняет понятие биномиали и отсылает читателя к „десятой книге Евклида, в которой идет речь об этих иррациональных линиях“ [488, стр. 60]. Он проявляет хорошее знакомство с нею и, четко отделяя прикладные вопросы от теоретических, относит эту книгу к теории. По его словам, практические задачи, сводящиеся к действиям с иррациональными корнями, иногда нельзя решить точно; он объясняет это различием между числом и величиной: „Никто не продаст тебе ничего за корень из десяти, так как это не число; и если разложить в дроби, никогда не получишь корня из этого числа“ [488, стр. 40]. Для точного решения таких задач необходимо знакомство с „глухими“ (surdis) корнями, но это — дело ученых, а не купцов („pro doctis et non pro mercatoris“), так как последние „измеряют все свои доходы единицами, а не иррациональными корнями“ Автор говорит о глухом „числе“, но здесь же подчеркивает, что оно не является числом („surdus numerus non est numerus“), „потому что число — это то, что измеряется единицей“.

Большое внимание уделено книге X „Начал“ и в трудах математиков XVI в.

Тартатья в „General trattato di numeri, et misure“ после правил приближенного извлечения корней и операций с иррациональными корнями подробно излагает (кн. V, стр. 87—96) правила „действий с биномиалями и вычетами“.

В сочинении Кардано „Practica arithmeticae et mensurandi singularis“ учение о квадратичных иррациональностях выступает как составная часть науки о числе. Он различает следующие виды чисел: целое, дробное иррациональное (surdus — глухое) и именованное (denominatus).

Под целыми числами Кардано понимает числа, „составленные из единиц и от единицы берущие свое начало“, под дробными — числа, которые „обозначаются двумя буквами и имеют обратное отношение к целым числам“ Иррациональное число Кардано определяет так же, как и восточные математики: „Глухими числами называются те, относительно которых нельзя само по себе сказать, что они собой представляют; называются же глухими, потому что не могут быть услышаны. Их нельзя ни услышать, ни выразить.

Таким является квадратный корень из 7, обозначающий число, которое, будучи, умножено на себя, даст 7" Вслед за Лукой Пачоли Кардано различает следующие виды „глухих" чисел: абсолютное (например, $\sqrt{7}$), соединенный корень (radix ligata), например, $\sqrt{7}+\sqrt{10}$, универсальный корень (radix universalis), например, $\sqrt{7+\sqrt{4}}$ Наконец, под „именованным" числом Кардано понимает корень, квадрат, куб и другие степени неизвестной в уравнении.

В 44-й главе сочинения Кардано рассматриваются иррациональные величины, данные в книге X «Начал». Обращает на себя внимание трактовка этого учения, знакомая нам по арабским комментариям: число и линия применяются как эквивалентные понятия. Кардано дает следующие определения: «Рациональная линия есть, например, 10 и всякое другое число; корень же из 10 и любого неквадратного числа — это действительно иррациональная или рациональная в степени. Иррациональными в степени являются RR. 10 и большинство биноминальных величин, например, R. 3. $\tilde{p}$ R. 2». Утверждая, что «поскольку число этого вида есть линия, то оно принимает те же свойства», Кардано иллюстрирует такое утверждение примерами: делит «линию» 10 в среднем и крайнем отношении на «части»:

$$\sqrt{125}-5 \text{ и } 15-\sqrt{125}.$$

Затем на числовых примерах иллюстрирует предложения об извлечении корней из биномиалей и т. д.

В последней главе критикуются ошибки Луки Пачоли, допущенные при изложении книги X «Начал» Евклида.

Книга X «Начал» подробно рассматривается также в сочинениях немецких математиков Андреаса Александра, Хр. Рудольфа и Мих. Штифеля.

В 1524 г. Рудольф опубликовал на немецком языке книгу по алгебре, сыгравшую большую роль в популяризации этой науки. В 1553 г. она была переиздана в обработке и с дополнениями Штифеля [833]. Во введении Штифель писал, что Рудольф в своей книге столь ясно и точно изложил „удивительное и вполне философское искусство счета, называемое коссом", что сам он без затруднения понял по ней это искусство. Рудольф оперирует понятиями „глухих и биномиальных чисел" („Surdischen und Binomischen zalen") и, так как они представляют наибольшую трудность, предлагает читателю ознакомиться с ними в последнюю очередь.

В ходе изложения ставится вопрос о правомерности деления единицы, «которую древние и новые ученые считают неделимой, и строят на этой основе всю теоретическую арифметику»; на него дается ответ: «Такое деление единицы допускается вычислителями ввиду большой пользы, получаемой при этом». В применении долей единицы следует видеть образец того, как следует рассматривать «все алгоритмы всех дробных чисел, будь они глухие, биномиальные или вычеты, или, как их можно назвать по-иному, иррациональные числа» [833, л. 9 об.].

В 10-й и 11-й главах Рудольф излагает теорию книги «Начал» в арифметической форме и приводит много примеров. В дополнении к этой главе Штифель разъясняет подробнее, «как Евклид рассматривает биномиали и вычеты и что получает из этого»; Штифель ставит цель показать это «кратчайшим образом и наболее просто, чтобы и немецкий читатель имел представление о тех вещах, которые во все времена считались самыми трудными из всего Евклида» [833, л. 118]. Эта простота достигается благодаря применению алгебраических символов; Штифель пишет, что в качестве биномиалей Евклид берет «такие числа, у которых одна часть есть обычное число (например, 3, 4, 5 и т. д.), а другая часть — глухое число, обозначаемое знаком V» [833, л. 118 об.]. С помощью этих обозначений «каждый простой вычислитель также легко может понять, что у Евклида является биномиалью или не биномиалью, а что вычетом или не вычетом» [833, л. 119]. Для биномиалей рассматриваются примеры $12+\sqrt{6}$, $\sqrt{120}+6$, $\sqrt{12}+\sqrt{6}$. Глухим числом по-прежнему называется „число, из которого нельзя извлечь корень" [833, л. 85 об.]

В сочинении «Arithmetica integra» [834] Мих. Штифель на теорию квадратичных иррациональностей также обращает большое внимание; изложение книги X «Начал» Евклида (в арифметической форме) занимает половину этого труда.

Таким образом, вплоть до XVI в. европейская математика в учении о квадратичных иррациональностях следовала арабской традиции. Как и восточные математики, европейские ученые продолжали придерживаться евклидовой классификации иррациональных величин, представляемых в арифметической форме, если не считать, что область рассматриваемых иррациональностей была расширена прежде всего за счет «триномиалей», а затем и «мультиномиалей». В то же время вопрос о сущности иррационального, о том, «являются ли иррациональные числа числами или нет», в это время встал уже со всей определенностью, как это видно из сочинения Штифеля «Arithmetica integra» [834], из «Арифметики »Мавролика (1494—1575) гг.) [698], работ Виеты (1540—1603 гг.) [458] и др., где, как и в рассмотренных выше трудах, излагалось учение об иррациональных величинах.

Идея о соответствии между объектами арифметики и геометрии все глубже проникает в математику. По словам Мавролика, «поскольку арифметика является инструментом всякого исчисления, а числа — суть термины, которыми обозначается любая величина, то несомненно, что с помощью чисел можно осуществить исчисление всех величин» [698, стр. 83]; под числами понимаются не только целые и дроби, но и иррациональные корни.

С полной определенностью высказался на этот счет Симон Стевин (1548—1620 гг.) в «Трактате о несоизмеримых величинах». Он сформулировал тезис о том, что «нет никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел» [832, стр. 202], и заявил, что иррациональные корни равноправны с рациональными числами и что можно говорить лишь об их несоизмеримости.

Итак, теория книги X «Начал», изложенная в арифметической форме, сыграла весьма существенную роль в формировании понятия положительного действительного числа. И дальше при рассмотрении вопроса об иррациональных величинах математики часто возвращались к классификации Евклида, о чем свидетельствует, например, сочинение Валлиса (1616—1703 гг.) «Mathesis universalis» [922].

Однако в европейской математике, как и раньше в восточной, уделялось большое внимание этой теории, изложенной, как и у Евклида, геометрически. Такое изложение мы встречаем в европейских комментариях к «Началам», например, в редакциях «Начал», принадлежащих Н. Тарталье [538] и Хр. Клавию [539]. Клавий пишет: «Я не могу согласиться с мнением тех, которые полагают, что для ее понимания необходим раздел арифметики, в котором идет речь о корнях из чисел рациональных и, как их называют, иррациональных. Напротив, я решительно утверждаю, что о полном понимании этих разделов арифметики судят по этой десятой книге». Он считает, что «те, кто размышляют об алгебре, могут сами, когда захотят, легко приложить сущность доказательств этой книги к числам, тем более, что не очень давно это добросовестно осуществил прославленный арифметик Мих. Штифель в двух книгах сочинения, озаглавленного «Arithmetica integra» [539, стр. 99].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Геометрия, БСЭ, т. X, изд. 2-е, 1952.
2. Александров А. Д. Общий взгляд на математику, В сб. «Математика, ее содержание, методы и значение», т. I, М., 1956.
3. Алимов Н. Г. Теория действительных чисел с точки зрения исторического процесса ее возникновения, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, М., 1950.
4. Алимов Н. Г Величина и отношение у Евклида ,В сб. «Историко-математические исследования», вып. VIII, М., 1955.
5. Андронов И. К., Собиров Г. С. О математических рукописях ученых XI—XIII веков Средней Азии, хранящихся в библиотеке проф. Андронова И. К., В сб., «Вопросы истории и методики элементарной математики», вып. II, Ученые записки Душанбинского пединститута, т. 47, Душанбе, 1965.
6. Аристотель. Физика, перевод В. И. Карпова, М., 1937.
7. Аристотель. Метафизика, перевод А. О. Кубицкого, М.—Л., 1934.
8. Аристотель. Аналитики первая и вторая, перевод Б. А. Фохта, М., 1952.
9. Архимед. Сочинения, перевод, вступ. статья и коммент. И. Н. Веселовского, М., 1962.
10. Ахадова М. А. Геометрическая часть «Книги знания» Ибн Сины, Ученые записки Бухарского госпединститута, вып. 12, Бухара, 1964.
11. Ахадова М. А. Арифметическая часть «Книги знания» Ибн Сины, Ученые записки Бухарского госпединститута, вып. 12, Бухара, 1964.
12. Ахадова М. А. Физико-математические сочинения Ибн Сины на таджикском языке, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, Ташкент, 1965.
13. Ахмедов С. А. Преподавание арифметики и ступени ее развития в Средней Азии, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. пед. наук, Ташкент, 1962.
14. Ахмедов Б. А. Улугбек и политическая жизнь Мавераннахра первой половины XV в. В кн. «Из истории эпохи Улугбека», Ташкент, 1965.
15. Ахмедов С. А. Способы умножения в трудах математиков Средней Азии, на узбекском языке, журн. «Совет мактаби», 1965, № 5.
16. Бадалов М. Э. Анализ «Сердцевины счета» (лубоб ал-хисаб) — руководства по математике Махмуда бен ал-Вусуди, В сб. «Вопросы истории и методики элементарной математики», вып. II, Ученые записки Душанбинского госпединститута, т. 47, Душанбе, 1965.

17. Бадалов М. Э. Тетрадь математических вычислений, употреблявшаяся в медресе XIX в. в Средней Азии, В сб. «Вопросы истории и методики элементарной математики», вып. II, Ученые записки Душанбинского госпединститута, Душанбе, 1965.
18. Бартольд В. В. Несколько слов об арийской культуре в Средней Азии, Среднеазиатский вестник, СПб., 1896, июнь.
19. Бартольд В. В. К истории арабских завоеваний в Средней Азии, Записки Восточного отделения Императорского русского археологического общества, т. 17, СПб., 1907
20. Бартольд В. В. О погребении Тимура, Записки Восточного отделения Императорского русского археологического общества, т. XXVIII, вып. 1—2, Пг., 1915.
21. Бартольд В. В. Улугбек и Ходжа Ахрар, Записки Восточного отделения Императорского русского археологического общества, т. XXIII, Пг., 1916.
22. Бартольд В. В. Отчет о командировке в Туркестанский край летом 1916 г., «Изв. Императорской Академии наук», Пг. 1916.
23. Бартольд В. В. Улугбек и его время, Пг., 1918.
24. Бартольд В. В. Культура мусульманства, Пг., 1918.
25. Бартольд В. В. Ислам, Пг., 1918.
26. Бартольд В. В. Восточно-иранский вопрос, Пг., 1922.
27. Бартольд В. В. История изучения Востока в Европе и России, изд. 2-е, Л., 1925.
28. Бартольд В. В. Иран, Ташкент, 1926.
29. Бартольд В. В. История культурной жизни Туркестана, Л., 1927.
30. Бартольд В. В. Ученые мусульманского Ренессанса, Записки коллегии востоковедов при Азиатском музее АН СССР, т. V, Л., 1930.
31. Бахмутская Э. Я. Степенные ряды для sin Θ и cos Θ в работах индийских математиков XV—XVIII вв., В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М.—Л., 1960.
32. Бахмутская Э. Я. Бесконечные ряды в работах математиков Южной Индии в XV—XVIII вв., В сб. «Из истории науки и техники стран Востока», вып. II, 1961.
33. Башмакова И. Г. Арифметические книги «Начал» Евклида, В сб. «Историко-математические исследования», вып. I, М.—Л., 1949.
34. Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Происхождение систем счисления, Энциклопедия элементарной математики, т. I, М.—Л., 1951.
35. Башмакова И. Г. Дифференциальные методы в работах Архимеда, В сб. «Историко-математические исследования», вып. VI, М., 1953.
36. Башмакова И. Г., Маркушевич А. И. «Начала» Евклида, БСЭ, т. XXIX, изд. 2-е, 1954.
37. Башмакова И. Г Трактат Архимеда «О плавающих телах», В сб. «Историко-математические исследования», вып. IX, М., 1956.
38. Башмакова И. Г. Трактовка некоторых проблем математического анализа в древнегреческой математике, Труды III Всесоюзного математич. съезда, т. I, М., 1956.
39. Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в Древней Греции, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М., 1958.
40. Башмакова И. Г. Рецензия на книгу Б. Л. Ван дер Вардена «Пробуждающаяся наука», УМН, т. XV, вып. 2 (92), 1960.
41. Башмакова И. Г Об античной математике первых веков нашей эры, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIV, М., 1961.
42. Башмакова И. Г. Цикл работ по истории античной математики,

Автореферат дисс. на соиск. ученой степени доктора физ.-мат. наук, М., 1961.
43. Башмакова И. Г О некоторых проблемах античной математики, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XV, М., 1963.
44. Беленицкий А. М. Картина мира по Бируни, Ученые записки ЛГУ, Л., 1949, № 98.
45. Беленицкий А. М. Великий среднеазиатский энциклопедист XI в. ал-Бируни о горных богатствах Средней Азии, «Природа», 1949, № 8.
46. Беленицкий А. М. Бируни, Определение конечных границ мест для проверки расстояний населенных пунктов, Ученые записки ЛГУ, серия вост. наук, вып. I, 1949.
47. Беленицкий А. М. Глава «О железе» минералогического трактата Бируни, В сб. «Краткие сообщения Ин-та истории материальной культуры», вып. XXXIII, М., 1950.
48. Беленицкий А. М. О «Минералогии» Бируни, В сб. «Бируни», М., 1950.
49. Беленицкий А. М. Геолого-минералогический трактат Ибн Сины, «Изв. АН ТаджССР», отд. общ. наук, 1953, № 4.
50. Беленицкий А. М. Об исследовании Бируни удельных весов металлов, В сб. «Краткие сообщ. Ин-та народов Азии АН СССР», т. 44, М., 1961.
51. Беляев Е. В. Арабы, ислам и арабский халифат в раннее средневековье, М., 1965.
52. Березкина Э. И. Древнекитайский трактат «Математика в девяти книгах», В сб. «Историко-математические исследования», вып. X, М., 1957.
53. Березкина Э. И. Арифметические вопросы в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах», В сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. I, М., 1960.
54. Березкина Э. И. О математическом трактате Сунь-цзы, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М., 1960.
55. Березкина Э. И. Математический трактат Сунь-цзы, перевод с древнекитайского, В сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. III, М., 1963.
56. Бертельс Е. Э. Сообщение о Международном конгрессе востоковедов, посвященном тысячелетию со дня рождения Авиценны, Вестник АН СССР, вып. 9., М., 1954.
57. Бируни — великий узбекский ученый средневековья, Сб. статей; изд. АН УзССР под ред. В. Ю. Захидова, А. А. Семенова, Я. Г Гулямова, Ташкент, 1950.
58. Бируни, Сб. статей под ред. С. П. Толстова, изд. АН СССР, М.—Л., 1950.
59. Бируни. О янтаре (Кухруба), перевод А. М. Беленицкого с комментариями А. М. Беленицкого и Г Г Леммлейна, В сб. «Бируни», М., 1950.
60. Бируни. Памятники минувших поколений, избр. произведения, т. I, перевод и примечания М. А. Салье, Ташкент, 1957
61. Бируни. Индия, избранные произведения, т. II, перевод и примечания Ю. Н. Завадовского и А. Б. Халидова, Ташкент, 1963.
62. Бобынин В. В. Отзыв о сочинениях Н. М. Бубнова, СПб., 1911.
63. Бобынин В. В Древнеиндийская математика и отношение к ней Древней Греции, Изв. физ.-мат. общ-ва, (2), 22, Казань, 1917.
64. Богоутдинов А. М. Великий мыслитель средневековья, «Вестник АН СССР», 1952, № 6.
65. Богомолов С. А. Актуальная бесконечность, М.—Л., 1934.
66. Боев Г. П. Лекции по истории математики, Саратов, 1956.

67. Боев Г. П. О происхождении и эволюции наших цифр, Ученые записки Саратовского госуниверситета, вып. мех.-мат. наук, т. 70, 1961.
68. Борисов А. Я. Авиценна как врач и философ, «Изв. АН СССР», отд. обществ. наук, вып. 1—2, 1938.
69. Бретаницкий Л. С., Розенфельд Б. А. Архитектурная глава трактата «Ключ арифметики» Гияс-ад-дина Каши, «Искусство Азербайджана», 1956, № 5.
70. Бубнов Н. М. Происхождение и история наших цифр, палеографическая попытка, Киев, 1908.
71. Бубнов Н. М. Арифметическая самостоятельность европейской культуры, Киев, 1908.
72. Бубнов Н. М. Подлинное сочинение Герберта об абаке, или система элементарной арифметики классической древности, Киев, 1911.
73. Булатов М. С. Мавзолей Саманидов и основы теории зодчества Средней Азии IX—X вв. Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. архитектуры, Ташкент, 1965.
74. Булгаков П. Г Фахриев секстант в «Геодезии» Бируни, «Общественные науки в Узбекистане», 1963, № 6.
75. Булгаков П. Г Глобус Бируни, «Общественные науки в Узбекистане», 1965, № 1.
76. Булгаков П. Г Определение границ мест для уточнения расстояний между населенными пунктами [Геодезия], В кн. «Абу Рейхан Бируни, Избранные произведения», т. III, Ташкент, 1966.
77. Бурбаки Н. Очерки по истории математики, перевод с франц. И. Г Башмаковой, под ред. К. А. Рыбникова, М., 1963.
78. Вайман А. А. Вавилонские числа, В сб. «Историко-математические исследования», вып. X, М., 1957.
79. Вайман А. А. Вавилонские геометрические рисунки пространственных фигур, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М., 1960.
80. Вайман А. А. Шумеро-вавилонская математика III—I тысячелетия до н. э., М., 1961.
81. Вайман А. А. Вавилонская геометрия рациональных отрезков, В сб. «Вопросы истории физ.-мат. наук», М., 1963.
82. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука, Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции, перевод И. Н. Веселовского, М., 1959.
83. Васильев А. В. Целое число, Пг., 1922.
84. Васильев А. В. Числовые суеверия, Казань, 1886.
85. Ващенко-Захарченко М. Е. «Начала» Евклида с пояснительным введением и толкованием, Киев, 1880.
86. Ващенко-Захарченко М. Е. Исторический очерк математической литературы индусов, Киев, 1882.
87. Веселовский И. Н. Египетская наука и Греция, Труды Ин-та истории естествозн. АН СССР, т. II, М., 1948.
88. Веселовский И. Н. Вавилонская математика, Труды Ин-та истории естествозн. и техники АН СССР, т. 5, М., 1955.
89. Веселовский И. Н. Архимед, М., 1957.
90. Веселовский И. Н. Книга лемм Архимеда в переводе Тебита Бен Коры с разъяснениями ученого Альмохтассо Абильгасана Гали бен Ахмада Насуэнского, перевод с латинского и коммент., В кн. «Архимед, Сочинения», М., 1962, стр. 391—400.
91. Веселовский И. Н. Способы записи чисел в древнегреческой математике, В кн. «Архимед, Сочинения», М., 1962, стр. 625—628.
92. Вилейтнер Г. Как рождалась современная математика, перевод

с немецкого А. А. Мочульского, под ред. А. Я. Хинчина, изд. 2-е, М.—Л., 1933.
93. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики, М.—Л., 1935.
94. Волин С. Е. К истории древнего Хорезма, Вестник древней истории, 1941, № 1.
95. Володарский А. И. О математическом трактате Шридхары «Патиганита», В сб. «Физико-математические науки в странах Востока», вып. I, М., 1966.
96. Володарский А. И. Об анонимных комментариях к математическому трактату средневекового индийского ученого Шридхары «Патиганита», В сб. «8-я Научн. конфер. аспирантов и мл. научн. сотр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР», М., 1965.
97. Воробьева М. Г., Рожанская М. М. Астрономическое значение Кой-Крылган-Калы, В сб. Труды Хорезмской экспедиции, т. V, М., 1966.
98. Вороновский Д. Г Астрономы Средней Азии от Мухаммеда ал-Хаваразми до Улугбека и его школы (IX—XVI вв.), В сб. «Из истории эпохи Улугбека», Ташкент, 1965.
99. Выгодский М. Я. Понятие числа в его развитии, В сб. «На борьбу за материалистическую диалектику в математике», М.—Л., 1931.
100. Выгодский М. Я. Математика древних вавилонян, УМН, 1941, № 7, 8.
101. Выгодский М. Я. Алгебра и арифметика в древнем мире, М.—Л., 1941.
102. Выгодский М. Я. «Начала» Евклида, В сб. «Историко-математические исследования», вып. I, М.—Л., 1949.
103. Выгодский М. Я. Происхождение знака нуля в вавилонской математике, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XII, М., 1959.
104. Выгодский М. Я. Происхождение правила двух ложных положений, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М., 1960.
105. Вяткин В. Л. Отчет о раскопках обсерватории Улугбека в 1908—1909 гг., «Изв. Русского комитета по изучению Средн. и Вост. Азии», серия II, 1912, № 11.
106. Вяткин В. Л. Мирза Улугбек и его обсерватория в Самарканде, В сб. «Мирза Улугбек», Ташкент, 1925.
107. Гейберг И. Л. Естествознание и математика в классической древности, перевод С. П. Кондратьева, под ред. и с предисл. А. П. Юшкевича, М.—Л., 1936.
108. Гельфанд М. Б. Теория иррациональности у Эвклида, «Математика и физика в средней школе», 1936, № 6.
109. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России, М.—Л., 1946.
110. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. Об истории математики и ее значении для математики и других наук, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М., 1958.
111. Гнеденко Б. В. О некоторых задачах истории математики, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М., 1958.
112. Гнеденко Б. В. Роль истории физико-математических наук в развитии современной науки, В сб. «История и методология естественных наук», вып. V, М., 1966.
113. Григорян С. Н. Великие мыслители Средней Азии, М., 1958.
114. Григорян С. Н. Из истории философии Средней Азии и Ирана VII—XII вв., М., 1960.

115. Григорьев Г. В. Тали-Барзу как памятник домусульманского Согда, В сб. «Краткие сообщения Ин-та истории матер. культуры», XIII, М., 1946.
116. Григорьян А. Т. Котов В. Ф. О некоторых вопросах истории античной механики, В сб. «Историко-математические исследования», вып. X, М., 1957.
117. Гулямов Я. Г. Бируни об исторической гидрографии низовьев Аму-Дарьи, В сб. «Бируни — великий узбекский ученый средневековья», Ташкент, 1950.
118. Гулямов Я. Г История орошения Хорезма с древнейших времен до наших дней, Ташкент, 1957.
119. ад-Даббах Дж. Книга измерения фигур Бану Муса, перевод с арабского и примечания, В сб. «Историко-математические исследования, вып. XVI, М., 1965.
120. ад-Даббах Дж., Краснова С. А. Книга о построении трех конических сечений Ибрахима ибн Синана ибн Сабита ибн Корры, перевод с арабского, примечания С. А. Красновой, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XVI, М., 1965.
121. Декарт Р. Геометрия, вступ. статья А. П. Юшкевича, М.—Л. 1938.
122. Депман И. Я. Георг Петр Домкино (о первом издании «Начал» Евклида на русском языке), Труды Ин-та истории естествозн. АН СССР, т. II, 1948.
123. Депман И. Я. История арифметики, М., 1959.
124. Джалалов Г. Д. Секстант как главный инструмент обсерватории Улугбека, «Астроном. журн.», вып. 4, М., 1947.
125. Джалалов Г Д. Бируни и астрономическая наука, В сб. «Бируни — великий ученый средневековья», Ташкент, 1950.
126. Джалалов Г Д. Бируни и картография, «Изв. АН УзССР», Ташкент, 1950, № 1.
127. Джалалов Г. Д. Отличие «Зидж Гурагони» от других подобных зиджей, В сб. «Историко-астрономические исследования», вып. I, М., 1955.
128. Джалалов Г Д. К вопросу о составлении планетных таблиц Самаркандской обсерватории, В сб. «Историко-астрономические исследования», вып. I, М., 1955.
129. Джалалов Г Д. Гияс ад-Дин Чусти (Каши) — крупнейший астроном и математик XV в., Ученые записки Ташк. госпединститута, вып. VII (физ.-мат.), 1957.
130. Джалалов Г Д. Некоторые замечательные высказывания астрономов Самаркандской обсерватории, В сб. «Историко-астрономические исследования», вып. IV, М. 1958.
131. Джалалов Г Д. Индийская астрономия в книге Бируни «Индия», В сб. «Историко-астрономические исследования», вып. VIII, М., 1962.
132. Джалилов А. Согд накануне арабского нашествия и борьба согдийцев против арабов в первой половине VIII в., Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. истор. наук, М., 1954.
133. Дильс Г. Античная техника, перевод с немецкого, М.—Л., 1934.
134. Евклид. Начала, перевод и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, при ред. участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского, М.—Л., т. I, кн. I—VI, 1948; т. II, кн. VII—X, 1949; т. III, кн. XI—XV, 1950.
135. Жуковский В. А. Древности Закаспийского края, Развалины старого Мерва, СПб., 1894.
136. Заборов М. А. Крестовые походы, М., 1956.
137. Завадовский Ю. Н. Ибн Сина и его философская полемика с Би-

руни, Материалы научн. сессии АН УзССР, посв. 1000-летнему юбилею Ибн Сины, Ташкент, 1953.

138. Завадовский Ю. Н. Источники для биографии Ибн Сины, Тезисы докладов и сообщений 1-ой Всесоюзной конференции востоковедов, Ташкент, изд. АН УзССР, 1957.

139. Завадовский Ю. Н. Десять вопросов Бируни относительно «Книги о Небе» Аристотеля и ответы Ибн Сины, перевод с арабского, В сб. «Материалы по истории прогрессивной общественно-философской мысли в Узбекистане», Ташкент, 1957

140. Завадовский Ю. Н. Восемь вопросов Бируни относительно «Физики» Аристотеля и ответы Ибн Сины, перевод с арабского, В сб. «Материалы по истории прогрессивной общественно-философской мысли в Узбекистане», Ташкент. 1957

141. Занд М. Жизнеописание Абу Али Хусейна Ибн Абдаллаха Ибн Сины, рассказанное им самим и записанное его учеником Абу Убейдом ал-Джузджани, Альманах «Литературный Таджикистан», вып. 5, Душанбе, 1953.

142. Захидов В. Ю. Бируни как мыслитель, «Изв. АН СССР», серия истории и философии, т. VI, М., 1949. № 2.

143. Захидов В. Ю. Великий мыслитель X—XI вв., В сб. «Бируни—великий узбекский ученый средневековья», Ташкент, 1950.

144. Захидов В. Ю. Бируни как мыслитель, В сб. «Бируни», М., 1950.

145. Зубов В. П., Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Об исследованиях по истории математики Средних веков, В сб. «Историко-математические исследования, вып. XV, М., 1963.

146. Зубов В. П. Аристотель, М., 1963.

147 Зубов В. П. Развитие атомистических представлений до начала XIX в., М., 1965.

148. Зутер Г История математики, перевод с немецкого, СПб., 1905.

149. Ибн Сина. Материалы научн. сессии АН УзССР, посв. 1000-летнему юбилею Ибн Сины, изд. АН УзССР, Ташкент, 1953.

150. Ибн Сина. Даниш-намэ, перевод и вводная статья А. М. Богоутдинова, Душанбе, 1957

151. Ибн Сина о себе, Отрывки из «Книги знания», «Книги исцеления» и «Канона», перевод М. А. Салье, А. М. Беленицкого и Ю. Н. Завадовского, В сб. «Материалы по истории прогрессивной общественно-философской мысли в Узбекистане», Ташкент, 1957

152. Ибн Сина. Канон врачебной науки, перевод на русский и узбекский языки, т. I—V, Ташкент, 1954—1960.

153. Ибн Сина. О душе, Об образовании гор и минералов, Отрывки из «Книги спасения» и «Книги исцеления», перевод А. В. Сагадеева, В сб. «Избранные произведения мыслителей стран Ближнего и Среднего Востока», под ред. и со вступ. статьей С. Н. Григоряна, М., 1961.

154. Ибн ал-Хайсам. Книга комментариев к введениям книги Евклида «Начала», перевод и примечания Б. А. Розенфельда, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М., 1958.

155. Иванов П. П. К истории развития горного промысла в Средней Азии, М.—Л., 1932.

156. Из истории эпохи Улугбека, Сб. статей под ред. А. К. Арендса, Ташкент, 1965.

157. Избранные произведения мыслителей стран Ближнего и Среднего Востока, под ред. и со вступ. статьей С. Н. Григоряна, М., 1961.

158. Иностранцев К. А. О до-мусульманской культуре Хивинского оазиса, Журн. Мин. народного просвещения, 1911, февраль.

159. Иностранцев К. А. К истории до-мусульманской культуры

Средней Азии, Записки Восточного отделения Императорского русского археологического общества, т. 22, СПб., 1917
160. Иордан Неморарий. О данных числах, перевод С. Н. Шнейдера, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XII, М., 1959.
161. Ирисов А. Абдурайхон Бируни, Ташкент, 1960 (на узб. языке).
162. История УзССР, т. I, Ташкент, 1955.
163. Каган В. Ф. Архимед, изд. 2-е, М.—Л., 1951.
164. Каган В. Ф. Основная геометрия, М.—Л., 1949.
165. Каримов У. И. К вопросу о взглядах Ибн Сины на химию, В сб. «Материалы научн. сессии АН УзССР, посв. 1000-летнему юбилею Ибн Сины», Ташкент, изд. АН УзССР, 1953.
166. Каримов У. И. Классификация наук по Ибн Сине, В сб. «Материалы Всесоюзной конф. востоковедов в Ташкенте 4—11 июня 1957», Ташкент, 1958.
167. Карпова Л. А., Краснова С. А. О математическом трактате ал-Бируни «Об определении хорд в круге при помощи свойств ломаной линии, вписанной в него», В сб. «Вопросы истории физ.-мат. наук», М., 1963.
168. Кары Ниязов Т. Н. Обсерватория Улугбека в свете новых данных, В сб. «Материалы научной сессии АН УзССР, Ташкент, 1947.
169. Кары-Ниязов Т. Н. Астрономическая школа Улугбека, М., 1950.
170. Кары-Ниязов Т. Н. Улугбек — великий узбекский ученый XV века, Природа, 1952, № 10.
171. Кары-Ниязов Т. Н. Великий ученый и мыслитель, В сб. «Материалы научн. сессии АН УзССР, посв. 1000-летнему юбилею Ибн Сины», Ташкент, изд. АН УзССР, 1953.
172. Кары-Ниязов Т. Н. Очерки культуры социалистического Узбекистана, М., 1955.
173. Кары-Ниязов Т. Н. О некоторых результатах, полученных обсерваторией Улугбека, Доклад на XV Международном конгрессе востоковедов, М., 1960.
174. Кары-Ниязов Т. Н. О культурном наследии узбекского народа, Ташкент, 1960.
175. Кары-Ниязов Т. Н. Улугбек — великий астроном XV в. В сб. «Из истории эпохи Улугбека», Ташкент, 1965.
176. Касумханов Ф. А. Теория непрерывных величин и учение о числе в работах Мухаммеда Насирэддина Туси, Труды Ин-та истории естествозн. и техники АН СССР, т. 1, 1954.
177. Касумханов Ф. А. Теория непрерывных величин и учение о числе в работах азербайджанского ученого XIII века Мухаммеда Насирэддина Туси, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, М. 1956.
178. Ал-Каши Джемшид Гиясэддин. Ключ арифметики, Трактат об окружности, перевод Б. А. Розенфельда, под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, комментарии А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда, М., 1956.
179. Колмогоров А. Н. История математики, БСЭ, XXVI, изд. 2-е, 1954.
180. Кольман Э. Бесконечность в древнегреческой математике, Труды Ин-та истории естествозн. и техники АН СССР, т. 10, М., 1956.
181. Кольман Э. О некоторых нерешенных вопросах истории античной математики, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М., 1958.
182. Кольман Э. История математики в древности. М. 1961.
183. Колчин Б. А. Несколько замечаний к главе «О железе» минерало-

гического трактата Бируни, В сб. «Краткие сообщ. Ин-та истории матер. культуры», вып. XXXIII, М.—Л., 1956.

184. Крамар Ф. Д. Об исследованиях Омара Хайяма и Насирэддина Туси по теории параллельных линий, Алма-Ата, 1964.

185. Крамар Ф. Д. Об основных направлениях в развитии геометрических исчислений, Труды 1-ой Казахстанской межвуз. научн. конф. по матем. и механике, Алма-Ата, 1965.

186. Крамар Ф. Д. Развитие геометрических исчислений, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени доктора физ.-мат. наук, Алма-Ата, 1966.

187. Краснова С. А. Геометрические построения на сфере в странах ислама, В сб. «Вопросы истории естествозн. и техн.», вып. 18, М., 1965.

188. Краснова С. А. К истории геометрических построений, Проективные метрики, Ученые записки Коломенского пединститута, т. 8, вып. каф. матем., Коломна, 1964.

189. Краснова С. А., Розенфельд Б. А., Кубесов А. К. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в Средние века, Математика в школе, 1964, № 3, 4.

190. Краснова С. А. Геометрические построения на Ближнем и Среднем Востоке в Средние века, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, М., 1965.

191. Крачковские В. А. и И. Ю. Древнейший арабский документ в Средней Азии, Согдийский сб. Ин-та востоковедения и Тадж. базы АН СССР, М., 1934.

192. Крачковский И. Ю. Гомер и Бируни, «Изв. АН СССР», отд. литературы и языка, т. IV, вып. 5, 1945.

193. Крачковский И. Ю. Математическая география у арабов, В кн. «Научное наследие», ест.-научн. серия, т. I, М.—Л., 1948.

194. Крачковский И. Ю. Арабские энциклопедии средневековья, Труды Ин-та книги, документа и письма, т. II, Л., 1932.

195. Крачковский И. Ю. Очерки по истории русской арабистики, М.—Л., 1950.

196. Крачковский И. Ю. Бируни и его роль в истории географии, В сб. «Бируни», М., 1956.

197. Крачковский И. Ю. Арабская географическая литература, избр. произведения, т. IV, М.—Л., 1957

198. Кубесов А. Развитие идей Архимеда в работах Насир-ад-Дина ат-Туси, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, М., 1963.

199. Кубесов А. Комментарии Насир ад-Дина ат-Туси к сочинению Архимеда «О шаре и цилиндре», «Вестник АН КазССР», Алма-Ата, 1963, № 6.

200. Кубесов А. Инфинитезимальные методы Насирэддина Туси, «Изв. АН АзербССР», 1963, № 4.

201. Кубесов А. Насирэддин Туси, журн. «Билим жане Енбек», 1963, № 9 (на казахском языке).

202. Кулиева Г. З. Материалистические тенденции в определении основных понятий геометрии у математиков средневекового Востока в IX—XI веках, Ученые записки Азерб. госуниверситета, серия физ. мат. и хим. наук, 1962, № 4.

203. Кулиева Г. З. Теория составных отношений Ибн ал-Хайсама, Ученые записки Азерб. госуниверситета, 1963, № 4.

204. Кэджори Ф. История элементарной математики с указанием на методы преподавания; перевод с англ., под ред. с примечан. и добавл. И. Ю. Тимченко, Одесса, 1910; 2-е изд., Одесса, 1917

205. Лапшин В. И. О квадратуре круга у индийцев и бесконечных рядах,

которыми выражается отношение окружности к диаметру. Журн. Министерства народного просвещения, ч. XX, СПб., 1838.
206. Латынин Б. А. Вопросы истории ирригации древней Ферганы, В сб. «Краткие сообщения Ин-та этнографии АН СССР», М.—Л., т. XXVI, 1957.
207. Лебедев В. И. Как постепенно обобщалось понятие о числе, Пг., 1919.
208. Леммлейн Г. Г. Минералогические сведения Бируни, В сб. «Бируни», М., 1950.
209. Леонов Н. И. Улугбек — великий астроном XV века (1394—1449) М., 1950.
210. Леонов Н. И. Научный подвиг самаркандских астрономов XV века, М., 1958.
211. Лунин Б. В. Из истории русского востоковедения и археологии в Узбекистане, Ташкент, 1957.
212. Лурье С. Я. К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию, Архив истории науки и техники, вып. 1, 1933.
213. Лурье С. Я. Приближения в древнегреческой математике, Архив истории науки и техники, вып. 4, 1934.
214. Лурье С. Я. Теория бесконечно малых у древних атомистов, М.—Л., 1935.
215. Лурье С. Я. Приближенные вычисления в древней Греции, Труды Ин-та истории науки и техники (1), вып. 4, 1936.
216. Лурье С. Я. Архимед, М., 1945.
217. Лурье С. Я. Очерки по истории античной науки, М.—Л., 1947.
218. Мамедбейли Г. Д. Из истории Марагинской обсерватории, Труды совещания по истории естествознания 24—26 декабря 1946 г., М.—Л. 1948.
219. Мамедбейли Г. Д. Выдающийся азербайджанский ученый, «Изв. АН АзССР», 1951, № 9.
220. Мамедбейли Г. Д., Халилов З. И. Предисловие к книге «Мухаммед Насирэддин Туси, Трактат о полном четырехстороннике», Баку, 1952.
221. Мамедбейли Г. Д. Марагинская астрономическая обсерватория и пекинская обсерватория XIII века, В сб. «Историко-астрономические исследования», вып. III, 1957
222. Мамедбейли Г. Д. Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных и теории отношений, Баку, 1959.
223. Мамедбейли Г. Д. Основатель Марагинской обсерватории Насирэддин Туси, Баку, 1961.
224. Маркс К. Британское владычество в Индии, К. Маркс, Ф. Энгельс, Избранные произведения в двух томах, т. I, М., 1955, стр. 305.
225. Маркушевич А. И. О классификации иррациональностей в X книге «Начал» Евклида, В сб. «Историко-математические исследования»», вып. I, М., 1948.
226. Массон М. Е. Обсерватория Улугбека, Ташкент, 1941.
227. Массон М. Е. К истории черной металлургии Узбекистана, Ташкент, 1947.
228. Материалы по истории прогрессивной общественно-философской мысли в Узбекистане, под ред. И. М. Муминова, Ташкент, 1957.
229. Матвиевская Г. П. К истории математики Средней Азии, Ташкент, 1961.
230. Матвиевская Г. П. Бируни и естественные науки, Ташкент, 1963 (на узб. языке).
231. Матвиевская Г. П. О математических рукописях из собрания института востоковедения АН УзССР, «Изв. АН УзССР», серия физ.-мат. наук, вып. 9, Ташкент, 1965, № 3.

232. Медовой М. И. Об одном случае применения отрицательных чисел у Абу-л-Вафы, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, 1958.
233. Медовой М. И. Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы (арабские канонические дроби), В сб. «Вопросы истории естествознания и техники», вып. 8, М., 1959.
234. Медовой М. И. Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, 1960.
235. Медовой М. И. Абу-л-Вафа и средневековая бесцифровая вычислительная техника в странах ислама, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, М., 1960.
236. Милованов В. Астрономические познания самаркандских астрономов (по поводу раскопок обсерватории Улугбека), Протоколы Туркестанского кружка любителей археологии, Ташкент, 1913.
237. Мордухай-Болтовский Д. Д. К истории пятой книги «Начал» Евклида, Математическое образование, СПб., 1916.
238. Морочник С. Б., Розенфельд Б. А. Омар Хайям — поэт, мыслитель, ученый, Душанбе, 1957.
239. Мухамедиев Х. М. Планиметрическая часть «Китоб-аш-Шифо», Ученые записки Ленинабадского госпединститута, вып. XIV, 1962.
240. Ан-Насави, Абу-л-Хасан Али ибн Ахмад. Достаточное об индийской арифметике, перевод М. И. Медового, примечания М. И. Медового и Б. А. Розенфельда, В сб., «Историко-математические исследования», вып. XV, М., 1963.
241. Нейгебауер О. Лекции по истории античных математических наук, перевод, примечания и предисл. С. Я. Лурье, М.—Л., 1937
242. Нильсен В. А. Архитектурный облик обсерватории Улугбека в Самарканде, Труды Ин-та истории и археологии АН УзССР, т. V, 1953.
243. Осипов М. П. Письмо о раскопках обсерватории Улугбека, Известия Русского астрономического общества, № 1, вып. XV, 1909.
244. Петросян Г Б., Розенфельд Б. А. Доказательство Аганиса пятого постулата Евклида, «Известия АН АрмССР», серия физ.-мат. наук, т. 13, 1960, № 1.
245. Пигулевская Н. В., Якубовский А. Ю., Петрушевский И. П. Строева Л. В. Беленицкий А. М. История Ирана с древнейших времен до конца XVIII в., Л., 1958.
246. Пигулевская Н. В. Города Ирана в раннем средневековье, М.—Л. 1956.
247. Платон. Теэтет, перевод с греческого и примечания В. Сережникова, М.—Л., 1936.
248. Попов Г Н. Архимед, Исчисление песчинок (Псаммит), перевод, краткий обзор работ Архимеда и примечания, Пг. 1923; изд. 2-е, М.—Л. 1932.
249. Пугаченкова Г А. Ремпель Л. И. Выдающиеся памятники архитектуры Узбекистана, Ташкент, 1958.
250. Пугаченкова Г А. Самарканд, Бухара, М., 1961.
251. Пугаченкова Г А. Архитектурные памятники Мавераннахра эпохи Улугбека, В сб. «Из истории эпохи Улугбека», Ташкент, 1965.
252. Раздымаха Г С. Физико-математические знания в древнейших рабовладельческих государствах Двуречья по документам хозяйственной отчетности, Наукові записки Кам'янець-Подільского udинституту, вып. VI, Каменецк-Подольск, 1958.
253. Раздымаха Г С. Математика Двуречья по экономической документации (на укр. языке), Історико-математичний збірник, т. 2, Киев, 1961.
254. Раздымаха Г. С. Проблемы межевания земли в вавилонской гео-

метрии (на укр. языке), Історико-математичний збірник, т. 3, Киев,
дования», вып. XI, М., 1958.

255. Р а и к А. Е. Десятая книга «Начал» Евклида, В сб. «Историко-математические исследования», вып. 1, 1948.

256. Р а и к А. Е. Из ранней истории алгебры, Квадратные уравнения, Ученые записки Пермского госуниверситета, т. VIII, вып. 1, 1953.

257 Р а и к А. Е. О биквадратных уравнениях у вавилонян, Ученые записки Пермского госуниверситета, т. IX, вып. 4, 1955.

258. Р а и к А. Е. Из истории математики, Квадратные уравнения в «Началах» Евклида, В сб. «В помощь учителю», вып. 2, Саранск, 1955.

259. Р а и к А. Е. Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов, В сб. «Историко-математические исследования». вып. XI, М. 1958.

260. Р а и к А. Е. Две лекции о египетской и вавилонской математике, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XII, М., 1959.

261. Р а и к А. Е. Некоторые вопросы арифметики вавилонян, В сб. «Вопросы истории физ.-мат. наук», М., 1963.

262. Р а и к А. Е. О вавилонской клинописной таблице Plimpton 322, Ученые записки Мордовского ун-та, Саранск, вып. 41, 1964.

263. Р а й н о в Т. И. Великие ученые Узбекистана (IX—XI вв.), Ташкент, 1943.

264. Р а й н о в Т. И. Ал-Бируни — великий ученый Средней Азии, «Изв. АН СССР», отд. литературы и языка, т. VIII, вып. 2, М., 1949.

265. Р о з е н В. Р «Индия» Бируни, Записки Восточного отделения русского археологического общества, т. III, СПб., 1888.

266. Р о з е н б е р г Ф. А. О согдийцах, Записки коллегии востоковедов, т. I, Л., 1925.

267 Р о з е н ф е л ь д Б. А. О математических работах Насирэддина Туси, В сб. «Историко-математические исследования», вып. IV, М., 1951.

268. Р о з е н ф е л ь д Б. А. О математических работах Мухаммеда Насирэддина (на азерб. языке), Изв. АН АзССР», 1953, № 4.

269. Р о з е н ф е л ь д Б. А. О математических работах Омара Хайяма, УМН; 8 3 (55), 1953.

270. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Ю ш к е в и ч А. П. Примечания к математическим трактатам Омара Хайяма, В сб. «Историко-математические исследования», вып. VI, 1953.

271. Р о з е н ф е л ь д Б. А. Новые исследования по предыстории неевклидовой геометрии, Дополнение II к кн. Каган В. Ф. «Основания геометрии», ч. 2, М., 1956.

272. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Ю ш к е в и ч А. П. Комментарии к трактатам Гиясэддина Каши, В кн. ал-Каши «Ключ арифметики, Трактат об окружности», М., 1956, стр. 324—380.

273. Р о з е н ф е л ь д Б. А. О математических работах Джемшида Гиясэддина Каши, Ученые записки Азерб. университета, 1957

274. Р о з е н ф е л ь д Б. А. О математических работах Омара Хайяма, Ученые записки Азерб. университета, 9,1957

275. Р о з е н ф е л ь д Б. А. Доказательства пятого постулата Евклида средневековых математиков Хасана ибн ал-Хайсама и Льва Герсонида, перевод и коммент., В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М. 1958.

276. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Ю ш к е в и ч А. П. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в Средние века, Советское востоковедение, 1958, № 3, 6.

277 Р о з е н ф е л ь д Б. А., Ю ш к е в и ч А. П. Предыстория неевклидовой геометрии на средневековом Востоке, Доклад на XV Международном конгрессе востоковедов, М., 1960, июль.

278. Розенфельд Б. А. Попытка квадратичного интерполирования у Абу Райхана ал-Бируни, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XII, 1959; Розенфельд Б. А. «Письмо в редакцию», В сб. «Историко-математические исследования», XV, М., 1963.
279. Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. О трактате Насир ад-Дина ат-Туси о параллельных линиях, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М., 1960.
280. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Примечания к трактату Насир ад-Дина ат-Туси о параллельных линиях, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М., 1960.
281. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. О трактате Кази-заде ар-Руми об определении синуса одного градуса, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М., 1960.
282. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Примечания к трактату Кази-заде Руми, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М. 1960.
283. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Доказательства пятого постулата Евклида у Сабита ибн Корры и Шамс ад-Дина ас-Самарканди, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIV, М., 1961.
284. Розенфельд Б. А. Книга Архимеда о построении круга, разделенного на семь равных частей, перевод Абу-л-Хасана Сабита ибн Курры ал-Харрани, перевод с арабского и коммент., В кн. «Архимед, Сочинения», М., 1962, стр. 401—416.
285. Розенфельд Б. А. Теоремы Архимеда, сохранившиеся в передаче ал-Бируни, перевод с арабского и коммент., В кн. «Архимед, Сочинения». М., 1962, стр. 416—421.
286. Розенфельд Б. А. Ал-Бируни, Книга о касающихся кругах Архимеда, убитого в двести двенадцатом году до рождества, перевод с арабского и коммент., В кн. «Архимед, Сочинения», М., 1962, стр. 422—440.
287. Розенфельд Б. А., Краснова С. А., Рожанская М. М. О математических работах Абу-р-Райхана ал-Бируни, В сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. III, М., 1963.
288. Розенфельд Б. А., Краснова С. А. Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него, ученого Абу-Райхана Мухаммада ибн Ахмада ал-Бируни, перевод с арабск. и примечания, В сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. III., М., 1963.
289. Розенфельд Б. А. Книга Абу-р-Райхана Мухаммада ибн Ахмада ал-Бируни об индийских рашиках, перевод и примечания, В сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. III, М. 1963.
290. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям, М., 1965.
291. Розенфельд Б. А., Кубесов А. К., Собиров Г. С. Кто был автором римского издания «Изложение Евклида Насир ад-Дина ат-Туси?», В сб. «Вопросы истории естествозн. и техн.», вып. 20, М., 1966.
292. Розенфельд Б. А., Карпова Л. М. Трактат Сабита ибн Корры о составных отношениях, В сб. «История и методология естественных наук», вып. V, М., 1966.
293. Розенфельд Б. А., Карпова Л. М. Книга о составлении отношений Сабита ибн Корры, перевод, коммент. и вступ. статья, В сб. «История физико-математических наук в странах Востока», вып. 1, М., 1966.
294. Ар-Руми, Кази-заде. Об определении синуса одного градуса, перевод Б. А. Розенфельда, коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIV, М., 1961.

295. Рыбников К. А. Русские издания «Начал» Евклида, УМН, 1941, № 9.
296. Рыбников К. А. История математики, т. I, М., 1960; т. II, М., 1963.
297. Сабит ибн Курра. О построении описанной около шара телесной фигуры с четырнадцатью основаниями, перевод И. Н. Веселовского, В кн. «Архимед, Сочинения», М., 1962, стр. 387—390.
298. Сабит ибн Курра ал-Харрани. Книга о том, что две линии, проведенные под углом, меньшим двух прямых, встречаются, перевод и примечания Б. А. Розенфельда, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XV, М., 1963.
299. Сабо А. О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования, В сб.«Историко-математические исследования», вып. XII, М., 1959.
300. Садыков Х. У. Бируни и его работы по астрономии и математической географии, М., 1953.
301. Салье М. А. Об освещении так называемой «арабской культуры» в Средней Азии, Труды Ин-та востоковедения АН УзССР, вып. 3, Ташкент, 1954.
302. Салье М. А. Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми — великий узбекский ученый, Ташкент, 1954.
303. Салье М. А. Абу Райхан ал-Бируни, Ташкент, 1961 (на узб. языке).
304. Семенов А. А. Письменности, существовавшие на территории Средней Азии, «Изв. тадж. филиала АН СССР», 1946, № 12.
305. Семенов А. А. Бируни — выдающийся ученый средневековья, В сб. «Бируни — великий ученый средневековья», Ташкент, 1950.
306. Сикора И. И. О памятнике Улугбеку, Ташкент, 1915.
307. Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П. Рецензия на кн. «Омар Хаййам, «Трактаты», перевод Б. А. Розенфельда, вступ. статья и коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, УМН, т. XVIII, вып. 6 (114), 1963.
308. Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П. О математических работах школы Улугбека, В сб. «Из истории эпохи Улугбека», Ташкент, 1965.
309. Смирнова О. И. Из истории арабских завоеваний в Средней Азии, «Советское востоковедение», 1957, № 2.
310. Собиров Г. С. Умножение и деление целых чисел в «Трактате по счислению» ал-Кушчи, В сб. «Вопросы истории и методики элементарной математики», вып. 1 (Ученые записки Душанбинского госпединститута, т. 34), Душанбе, 1962.
311. Собиров Г. С. Анализ творчества Алаэддина ибн Мухаммеда Али ал-Кушчи и его деятельности в развитии математических наук на Среднем и Ближнем Востоке, Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, Душанбе, 1963.
312. Собиров Г. С. «Хулосат ул-хисоб» Бахоэддина, В сб. «Вопросы истории и методики элементарной математики», вып. I. (Ученые записки Душанбинского госпединститута, т. 34) Душанбе, 1962.
313. Собиров Г. С. Анализ математических трудов ал-Кушчи, В сб. «Вопросы истории и методики элементарной математики», вып. II, (Ученые записки Душанбинского Госпединститута, т. 47), Душанбе, 1965.
314. Собиров Г. С. Положительные и отрицательные числа у ал-Кушчи, В сб. «Вопросы истории и методики элементарной математики», вып. II (Ученые записки Душанбинского Госпединститута, т. 47), Душанбе, 1965.
315. Собиров Г. С. Свойства натуральных чисел в трудах аш-Шерози,

В сб. «Вопросы истории и методики элементарной математики», вып. III, Душанбе, 1967
316. Собрание восточных рукописей АН УзССР, под ред. и при участии А. А. Семенова, Ташкент, т. I—V; 1952—1958; т. VI под ред. и при участии А. А. Семенова и Д. Г Вороновского, 1963.
317. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики, перевод с немецкого издания И. Б. Погребысского, М., 1964.
318. Субботин М. Ф. Астрономические работы Улугбека, В сб. «Мирза Улугбек», Ташкент, 1925.
319. Султанов Р. М. Насирэддин Туси о постулате параллельности, «Изв. АН АзССР», Баку, 1951, № 10.
320. Тереножкин А. И. Согд и Чач, В сб. «Краткие сообщ. Ин-та истории материальной культуры», т. XXIII, М.—Л., 1950.
321. Толстов С. П. Древности Верхнего Хорезма, «Вестник древней истории», 1941, № 1.
322. Толстов С. П. Древний Хорезм, М., 1948.
323. Толстов С. П. По следам древне-хорезмийской цивилизации, М.—Л., 1948.
324. Толстов С. П. Бируни и его время, «Вестник АН СССР», 1949, № 4 (та же работа напечатана в сб. «Бируни — великий ученый средневековья», Ташкент, 1950; «Бируни», М.—Л., 1950).
325. Толстов С. П. Бируни и проблема древней средневековой истории Хорезма, В сб. «Материалы Всесоюзной научной конференции востоковедов в Ташкенте», Ташкент, 1958.
326. Тревер К. В. Александр Македонский в Средней Азии, «Вопросы истории», 1947, № 5.
327. Туси Мухаммед Насирэддин. Трактат о полном четырехстороннике (шаклул гита), под ред. Г. Д. Мамедбейли и Б. А. Розенфельда, Баку, 1952.
328. Ат-Туси Насирэддин. Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий, перевод Б. А. Розенфельда, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М., 1960.
329. Ат-Туси Насир ад-Дин. Сборник по арифметике с помощью доски и пыли, перевод С. А. Ахмедова и Б. А. Розенфельда, примечания С. А. Ахмедова, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XV, М., 1963.
330. Файзуллаев А. Ф. Мухаммад Ҳоразмий, Ташкент, 1965, (на узб. языке).
331. ал-Фараби. Комментарии Абу Насра ал-Фараби к трудностям во введении к первой и пятой книге Евклида, перевод М. Ф. Бокштейна, введение и примечания Б. А. Розенфельда, «Проблемы востоковедения», 1959, № 4.
332. Фаццари Г Краткая история математики с древнейших времен, кончая средними веками (перевод с итальянского), М., 1923.
333. Фрейман А. А. Согдийский рукописный документ астрологического содержания (календарь), «Вестник древней истории», 1938, № 2/3.
334. Фрейман А. А. Хорезмийский язык, Записки Ин-та востоковедения АН СССР, т. VIII, М.—Л., 1939.
335. Хайруллаев М. М. Об изучении научного наследия Абу Насра Фараби в Узбекистане, «Общественные науки в Узбекистане», 1961, № 4.
336. Хайруллаев М. М. Фараби и его философские сочинения, Ташкент, 1963 (на узб. языке).
337. Хайруллаев М. М. Вопросы мышления в философской системе Фараби, «Общественные науки в Узбекистане», 1964, № 8, 9.
338. Хайям Омар. Математические трактаты, перевод Б. А. Розен-

фельда с примечаниями Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича; В сб. «Историко-математические исследования», вып. VI, М., 1953.

339. Хаййам Омар. Трактаты, перевод Б. А. Розенфельда, под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, вступ. статья и коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, М., 1964.

340. Хайям Омар. Первый алгебраический трактат, перевод и примечания С. А. Красновой и Б. А. Розенфельда, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XV, М., 1963.

341. Хасанов Х. Х. Три карты, имеющие отношение к Бируни, «Изв. узб. фил. геогр. об-ва СССР», т. V, 1961.

342. Хасанов Х. Х. О «Метеорологии и климатологии» Бируни, Труды Ташкентского госуниверситета, вып. 193, география, Ташкент, 1962.

343. Хасанов Х. Х. Вопросы географического районирования земли в трудах Абу Райхана Бируни, «Изв. узб. фил. геогр. об-ва СССР», т. VII, 1963.

344. Хасанов Х. Х. Карта мира из книги Бируни «Ат-тафхим», «Общественные науки в Узбекистане», 1963, № 8.

345. Хатипов А. Э.-А. Теория параллельных Омара Хайяма, Труды Узб. госуниверситета, новая серия, № 78, Самарканд, 1958.

346. Хатипов А. Э.-А. О первой книге геометрического трактата Омара Хайяма, Труды Самарк. госуниверситета, новая серия, вып. 107, Самарканд, 1960.

347. Хатипов А. Э.-А. Краткие очерки из истории математики и астрономии в Средней Азии, Труды Самарк. госуниверситета, новая серия, вып. 119, Самарканд, 1962.

348. Хатипов А. Э.-А. Теория параллельных линий на средневековом Востоке, Труды Самарк. госуниверситета, новая серия, вып. 144, Самарканд, 1964.

349. Аль-Хорезми Мухаммад. Математические трактаты, перевод Ю. Х. Копелевич и Б. А. Розенфельда, коммент. Б. А. Розенфельда, Ташкент, 1964.

350. Цейтен Г. История математики в древности и в средние века, перевод с франц. издания П. С. Юшкевича, предисл. М. Я. Выгодского, М.—Л., 1932.

351. Цейтен Г. История математики в XVI и XVII веках, перевод с немецкого П. Новикова, обработка, примечания и предисл. М. Я. Выгодского, М.—Л., 1936; 2-е изд., М.—Л., 1938.

352. Чвалина А. Архимед, перевод с немецкого В. И. Контовта, М.—Л., 1934.

353. Челеби, Мариам. Правила действий и исправление таблиц (отрывок), перевод с французского и примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича, В кн. «Джемшид Гиясэддин ал-Каши, Ключ арифметики, Трактат об окружности», М. 1956.

354. Черкалова Л. И. Отношение и число в конце XVI — начале XVII в., Докл. на научн. конф. Ярославск. госпединститута, Ярославль, 1962, I, № 3.

355. Черкалова Л. И. Формирование понятия действительного положительного числа в XVI—XVII вв., Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук, М., 1965.

356. Чистяков И. И. Числовые суеверия, М., 1927.

357. Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, т. 1—2 (перевод с франц.), М., 1883.

358. Шереметьевский В. П. Очерки по истории математики, М., 1940.

359. Шишкин В. А. Обсерватория Улугбека и ее исследование, Труды Ин-та истории и археологии АН УзССР, т. 5, Ташкент, 1953.

360. Шишкин В. А. Изобразительное искусство народов Средней Азии по материалам археологических исследований, В сб. «Материалы I Всесоюзной конференции востоковедов в Ташкенте», Ташкент, 1958.
361. Шишкин В. А. О древних культурных связях Средней Азии, В сб. «Материалы II совещ. археол. и этногр. Ср. Азии», М.—Л., 1959.
362. Шишкин В. А. Варахша, Ташкент, 1961.
363. Шишкин В. А. Самаркандская обсерватория Улугбека, В сб. «Из истории эпохи Улугбека», Ташкент, 1965.
364. Шредер Л. Ю. Пифагор и индийцы, «Журнал Министерства народного просвещения», СПб., 1888, № 10—11.
365. Штольц О. Величины и числа, перевод с немецкого, «Математическое образование», 1914, № 1—3.
366. Щеглов В. П. К вопросу о географических координатах и азимуте секстанта обсерватории Улугбека в г. Самарканде, «Астрономический журнал», вып. 2, 1953.
367. Щеглов В. П. Астрономические теории Бируни, Вступ. статья к кн. «Бируни, Избр. произ.», т. I, Ташкент, 1957.
368. Щеглов В. П. Обсерватория Улугбека в Самарканде, М., 1958.
369. Энгельс Ф. Диалектика природы, М., 1951.
370. Юсупов Н. П. Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке, Казань, 1933.
371. Юсупов Н. П. Из истории математики народов Ближнего Востока, Труды II Всесоюзного матем. съезда, т. 2, М., 1936.
372. Юшкевич А. П. О первом русском издании трудов Эвклида и Архимеда, Труды Ин-та истории естествознания АН СССР, т. II, М., 1948.
373. Юшкевич А. П. О методе исчерпывания древних математиков, Труды совещания по истории естествознания (24—26 дек. 1946 г.), М.—Л., 1948.
374. Юшкевич А. П. Омар Хайям и его «Алгебра», Труды Ин-та истории естествознания АН СССР, т. II, М., 1948.
375. Юшкевич А. П. О математике народов Средней Азии в IX—XV веках, В сб. «Историко-математические исследования», вып. IV, М., 1951.
376. Юшкевич А. П. Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми, Труды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, т. I, М., 1954.
377. Юшкевич А. П. Исчерпывания метод, БСЭ, т. XIX, изд. 2-е, 1952.
378. Юшкевич А. П., Розенфельд Б. А. Примечания к математическим трактатам Джемшида Гиясэддина ал-Каши, В сб. «Историко-математические исследования», вып. VII, М. 1954.
379. Юшкевич А. П. О достижениях китайских ученых в области математики, В сб. «Историко-математические исследования», вып. VIII, 1955; Оп же, В сб. «Из истории науки и техники Китая», М., 1955.
380. Юшкевич А. П., Розенфельд Б. А. Джемшид Гиясэддин ал-Каши, В кн. «Джемшид Гиясэддин Ал-Каши; Ключ арифметики, Трактат об окружности», М., 1956, стр. 320—324.
381. Юшкевич А. П. О новых работах в СССР по истории математики, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М., 1958.
382. Юшкевич А. П. История математики, В кн. «Математика в СССР за сорок лет (1917—1957), т. I, М., 1959.
383. Юшкевич А. П., Розенфельд Б. А. Математика в странах Востока в средние века, В сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. I, М., 1960.

384. Юшкевич А. П. История математики в Средние века, М., 1961.
385. Юшкевич А. П. О квадратуре параболы Сабита ибн Корры, В сб. «История и методология естественных наук, вып. V, М., 1965.
386. Якубовский А. Ю. Развалины Ургенча, Л., 1930.
387. Якубовский А. Ю. Самарканд при Тимуре и Тимуридах, Л., 1933.
388. Якубовский А. Ю. Время Авиценны, «Изв. АН СССР», отд. истории и философии, М., 1938, № 3.
389. Якубовский А. Ю. Живопись древнего Пянджикента, «Изв. АН СССР», отд. истории и философии, т. VII, М., 1950, № 5.
390. Якубовский А. Ю. Абу Али Ибн Сина и его время, «Вопросы истории», вып. 9, М., 1952.
391. Якубовский А. Ю. Ибн Сина, Материалы научн. сессии АН УзССР, посвящ. 1000-летнему юбилею Ибн Сины, Ташкент, 1953.
392. Яновская С. А. К теории египетских дробей, Труды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, т. I, М., 1947.
393. Яновская С. А. Из истории аксиоматики, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М., 1958.
394. Adhan A. La science chez les turcs ottomans du commencement juqu'a la fin du Moyen-age, Archeyon, XIX, 1937.
395. Afnan S. M. Avicenna: his life and work, London, 1958.
396. Ahrens W. Studien über die magischen Quadraten der Araber, Der Islam, Bd, 7, 1917, 186—250.
397. Ahrens W. Nochmals die magischen Quadrate, Der Islam, Bd. 14, 1925.
397 a. Amir-Moéz A. R. Comparison of the methods of Ibn Esra and Karchi, Scripta mathem., vol. 23, 1957.
398. Amir-Moéz A. R. Discussion of difficulties in Euclid by Omar al-Khayyami, Scripta mathem., vol. 24, No. 4, 1959, 175—303.
399. Amir-Moéz A. R. A paper of Omar Khayyam, Scripta math., vol. 26, 1963, 323—337.
400. Anawati G. G. Essai de bibliographie avicenniènne, Caire, 1950.
401. Apollonius de Perga. Les coniques, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1923.
402. Apostle H. G. Aristotle's philosophy of mathematics, Chicago, 1952.
403. Arberry A. J. (ed.) The legacy of Persia, Oxford, 1953.
404. Arberry A. J. Avicenna: his life and times, in: «Avicenna: scientist and phylosopher», London, 1958.
405. Arnold T., Guillaume A. (ed.) The legacy of Islam, Oxford, 1931.
406. Avicenna nella storia della cultura mediaevala, Relationi e discus. (15 apr. 1955), Roma, 1957.
407. Avicenna: scientist and phylosopher (a millenary symposium), London, 1958.
408. Avicenna. Le Livre de Science, vol. II (phys.-math.), trad. par M. Achena et A. Masse, Paris, 1958.
409. Awicenna. Warszawa, 1953.
410. Baker M. Alhazen's problem, Its bibliography and an extension of it, Amer. math. monthly, vol. 4, 1881.
411. Barani S. N. Muslim researches in geodesy, in: «Al-Biruni commemor. volume», Calcutta, 1951, 1—59.
412. Barani S. N. Ibn Sina and Alberuni, A study in similarities and contrastes, In «Avicennas commemoration volume», Calcutta, 1956.
413. Barani S. N. Al-Biruni and his magnum opus al-Qanunu'l Mas'udi, Introductory discource to «Al-Qanunu'l Mas'udi», Hyderabad, 1956.
414. Bashmakova I. G. Differential methods in Archimedes works,

Actes du VIII Congr. Int. d'Hist. des. Sci., Florence, 1956, vol. I, 120—122.
415. Becker O. Eudoxos-Studien, I, Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys., Abt. B, Bd. II, Berlin, 1932.
416. Becker O. Eudoxos-Studien, II, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys., Abt. B. Bd. III, Berlin, 1936.
417. Becker O. Eudoxos-Studien, III. Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys., Abt. B. Bd III, Berlin, 1936.
418. Becker O. Grundlagen der Mathematik in geschichtlichen Entwicklung, Freiburg — München, 1954.
419. Becker O. Das mathematische Denken der Antike, Göttingen, 1957.
420. Bell E. T. The development of mathematics, N. Y.— London, 1945.
421. Bergsträsser G. Zu den magischen Quadraten, Der Islam, Bd. 12, 1923, 227.
422. Bergsträsser G. Pappos' Kommentar zum zehnten Buch von Euklid's Elementen, Beiträge zu Text und Übersetzung, Der Islam, Bd. 21, 1933, 195—222.
423. Besthorn R. O. Über den Commentar des Simplicius zu den Elementa, Bibl. math., F. 2, Bd. 6, 1892, 65—6.
424. Besthorn R. O., Heiberg J. L. Codex Leidensis 399, 1, Euclidis elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschü cum commentariis al-Nairizii, Arabice et latine ediderunt, I—III, Havniae, 1893—1910.
425. Biruni. Rasa'il u'l-Biruni, Osmania Oriental Publ. Bureau, Hyderabad — Deccan, 1948.
426. Al-Biruni commemoration volume, A. H. 362 — A. H. 1362, Calcutta, 1951.
427. Biruni Abu-r-Rayhan. Al-Quanun al-Mas'udi, vol. I—II, Hyderabad — Deccan, 1954—1955.
428. Björnbo A., Recension: M. Curtze, Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis, Bibl. math., 3 Folge, Bd. II, 1901, 363—366.
429. Björnbo A. A. Studien über Menelaos Sphärik, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss. Hft. XIV, 1902.
430. Björnbo A. Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert, Bibl. math., F. 3., Bd. III, 1902.
431. Björnbo A. Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz, Bibl. math., F. 3, Bd. IV, 1903, 238—245.
432. Biörnbo A. A. Gerardo von Cremona Übersetzung von Alkwarizmis Algebra und Euklids Elementen, Bibl. math., F. 3, Bd. VI, 1905, 239—248.
433. Björnbo A. A., Vogl S. Alkindi, Tideus und Pseudo-Euklid. Drei optische Werke, herausgegeben und erklärt, Abhandl. zur Cesch. d. math. Wiss., 26 3, 1911.
434. Bjornbo A. Al-Chwarizmi's trigonometriske Tavler, Festkrift til H. G. Zeuten, Köbenhavn, 1909, 1—26.
435. Björnbo A., Besthorn B. (ed. H. Suter). Die astronomischen Tafeln des Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi in der Bearbeitung des Moslama al-Madjriti, Royal Danish Academy, Copenhagen, 1914.
436. Björnbo A. Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectore), mit Bemerkungen von H. Suter, hrsg. und ergänzt von H. Bürger und K. Kohl, Abhandl. zur Gesch. d. Naturwiss. u. Med., Hft. 7, Erlangen, 1924.
437. Boilot R. D. J. L'oevre d'al-Beruni, Essai bibliographique, Mélanges de l'Inst. Dominicain d'Etudes Orientales du Caire, 2 161, 1955.
438. Boncompagni B. Intorno all'opera d'Albiruni sull'India, Bull.

di bibl. e di storia delle sci. matem., t. 2, 1869, 153—206.
439. Boncompagni B. Della vita e della opere di Gherardo Cremonese, Roma, 1851.
440. Boncompagni B. Trattati d'aritmetica publicati de Baldassare Boncompagni, I. Algorithmi de numero indorum, II, Joanni Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice, Roma, 1857.
441. Bond J. D. The development of trigonometric methods down to the close of the fifteenth century, Isis, vol. 4, 1922, 295—323.
442. Bortolotti E. L. L'algebra nella storia e nella preistoria della scienze, Osiris, vol. I, 1936, 184—230.
443. Bosch F. Ueber die quadratischen Irrationalitäten in der griechische Mathematik, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Verein., Bd. 41, 1931, 59—72.
444. Bosmans H. Le fragment du commentaire d'Adrien Romain sur l'algèbre de Muhamed ben Musa el-Chowarezmi, Ann. de la. Soc. Sci. de Bruxelles, 30 : 2, 1906.
445. Bosmans H. Le «De arte magna» de Guillaum Gosselin, Bibl. math., F 3, Bd. 7, 1906, 44—66.
446. Boyer Ch. Fundamental steps in the development of numeration, Isis, vol. 35, No. 100, 1944.
447. Boyer Ch. B. The history of the calculus and its conceptual development, N. Y., 1959.
448. Braunmühl A. v. Nassir Eddin Tusi und Regiomontan, Abhandl. d. Leop.-Carol. Akad. d. Naturwiss. Bd 71, 1898, 33—67.
449. Braunmühl A. v. Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie, Bd I, Leipzig, 1900.
450. Brockelmann C. Geschichte der arabischen Literatur, Bd I—II, Leipzig; 2 Aufl., Leiden, 1943—1944 Supplementband I — 1937, Suppl. II—1938, Suppl. III—1942.
451. Bruins E. M. Nouvelles découvertes sur les mathématiques babyloniènnes, Paris, 1951.
452. Bubnov N. Gerberti postea Silvestri papae Opera mathematica, Berlin, 1899.
453. Buchner F. Die Schrift über den Qarastûn von Thabit b. Qurra, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 52/53, 1920/21, 141—188.
454. Burckhard J. J. Die astronomischen Tafeln von Al-kwarizmi, Verhandl. d. Schweizer. Naturforsch. Ges., 1956, 73—75.
455. Burgess E., Whitney G. The Surya Siddhanta, Journ. of Amer. Orient. Soc., vol. 6, 1859/1860.
456. Bürger H., Kohl K. Zur Geschichte des Transversalensatzes, des Ersatztheorems, der Regel der vier Grössen und des Tangentensatzes, Abhandl. zur Gesch. d. Naturwiss. u. Med, Hft 7, Erlangen, 1924, 40—91.
457. Bürk A. Die Apastamba-Sulvasûtra, Zeitschr. d. deutsch. Morgenländ. Ges., Bd 55, 1901, 543—591; Bd 56, 1902, 327—391.
458. Busard H. L. L. Über einige Papiere aus Vietas Nachlaβ in der Pariser Bibliothèque Nationale, Centaurus, vol. 10, 1964, No. 2, 65—126.
459. Cantor M. Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker, Halle, 1863.
460. Cantor M. Über einen Codex des Klosters Salem, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 10, 1865.
461. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd I—II, Aufl. 3, Leipzig, 1900—1907.
462. Cantor M. Über die älteste indische Mathematik, Archiv d. Math. u. Phys., Bd 8, 1904, 63—72.
463. Carathéodory A. P. Traité du quadrilatère, Constantinople, 1891.

464. Cardano. Hieronimi C. Cardani medici mediolanensis practica Arithmeticae, et Mensurandi singularis, 1539.
465. Cardano H. Hieronimy Cardani Artis Magnae sive de Regulis algebraicis, lib. unus, 1545.
466. Carmody T. L. The Astronomical Works of Thabit b. Qurra, Berkly and Los Angelos, 1960.
467. Carra de Vaux B. L'Almageste d'Abul Wefa Albuzdjani, Journ. as., sér. 8, t. 19, 1892, 408—71.
468. Carra de Vaux B. Les sphères célectes selon Nasir-Eddin Attusi. In: P. Tannery, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, Paris, 1893, 337—361.
469. Carra de Vaux B. Sur le sens exact du mot «al-djebr», Bibl. math., F. 2, Bd 11, 1897.
470. Carra de Vaux B. Une proposition du Livre des Fils de Mousa sur les calculs approchés, Bibl. math., F. 2, Bd 12, 1898, 1—2.
471. Carra de Vaux. Sur l'histoire de l'arithmétique arabe, Bibl. math., F. 2, Bd 13, 1899, 33—36.
472. Carra de Vaux B. Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées a Héron, Philon et Archimède, Bibl. math., F. 3, Bd. I, 1900, 28—38.
473. Carra de Vaux B. Avicenne, Paris, 1900.
474. Carra de Vaux B. Les penseures de l'Islam, 1921, Paris.
475. Carra de Vaux B. Al-Farabi, Enzyclopädie des Islam, Bd 2, 1927, 55—57.
476. Carra de Vaux B. Astronomy and Mathematics, in: «The Legacy of Islam», Oxford, 1931.
477. Casiri M. Bibliotheca arabico-hispalensis-Escurialensis, Matrite, 1760.
478. Chasles M. Rapport sur un mémoire de M. F. Woepcke, intitulé: Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, d'après indications tirées d'un manuscrit arabe, Comptes rendus de l'Acad. de sci., t. 37, Paris, jul.-déc. 1853, 553—568.
479. Cheikho L. The inclination and latitude of lands, Beirut, 1908.
480. Christensen S. A. Ueber Gleichungen vierten Grades im zehnten Buch der Elemente Euclid's, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 34, 1889, hist.-lit. Abt. 201—217.
481. Clark W. E. The Aryabhatiya of Aryabhata. Chicago, 1930.
482. Colebrooke H. T. Algebra with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara, London, 1817; Calcutta, 1927.
483. Crombie A. C. Augustine to Galileo. The history of science a. D. 400—1650, London, 1952.
484. Curtze M. Quadrat- und Kubikwurzeln bei den Griechen nach Heron's neu aufgefundenen Μετρικα, Zeitschr. für Math. u. Phys., hist.-lit. Abt., Bd 42, 1897, 113—120.
485. Curtze M. Über eine Handschrift der Königl. Bibliothek, Dresden, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 28, 1883, hist-lit. Abt., 1—13.
486. Curtze M. Der liber trium fratrum de geometria, Nova acta d. Ksl. Leop.-Carol. Akad. d. Naturforscher, Bd 49, No. 2, Halle, 1885, 108—167.
487. Curtze M. Commentar zu dem «Tractatus de numeris datis» des Jordanus Nemorarius, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 36, 1891.
488. Curtze M. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im XV Jhr., Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft 7, 1895, 31—74.
489. Curtze M. Mathematisch-historische Miscellen, Bibl. math., F. 2,

Bd 9, 1895, 1—8.
490. Curtze M. Zur Geschichte der Übersetzungen der Elementa im Mittelalter, Bibl. math., F. 2, Bd 10, 1896, 1—3.
491. Curtze M. Petri Philomeni de Dacia in Algorismus vulgarem Joannis de Sacrobosco commentarius, Havniae, 1897.
492. Curtze M. Die Quadratwurzelformel des Heron bei den Arabern und bei Regiomontan und damit Zusammenhängendes, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 42, 1897, hist-lit. Abt., 14.
493. Curtze M. Über eine Algorismus Schrift des XII Jahrhunderts, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft 8, 1898.
494. Curtze M. Anaritii in decem libros priores commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 1569 servata (Euclides opera omnia, ed. Heiberg I. L., Supplementum), Lipsiae, 1899.
495. Czwalina A. Berechnung von Quadratwurzeln bei den Griechen, Archiv für Gesch. d. Math. d. Naturwiss u. d. Technik, Bd X, Hft 3, 1927/8, 334—335.
496. Czwalina A. Die Arithmetik des Diophantos aus Alexandria, Göttingen, 1952.
497. Datta B. The science of the Sulba, A study in early Hindu geometry, Calcutta, 1932.
498. Datta B., Singh A. N. History of Hindu mathematics, vol. 1—2, Lahore, 1935—1938.
499. Davidian M. L. Al-Biruni on the time of day from shadow length, Journ. of Amer. Orient. Soc., vol. 80, 1960, 330—335.
500. Delambre J. B. J. Histoire de l'astronomie du Moyen-age, Paris. 1819.
501. Demme C. Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes und Hero, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 31, hist.-lit. Abt., Leipzig, 1886, 1—27.
502. Demme C. Bemerkungen zu den Regeln des Ahmes und des Bandhayana über die Quadratur des Kreises, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 31, hist.-lit. Abt., 1886, 132—134.
503. De Morgan A. Irrational Quantity, Penny Cyclopaedia, 1837, t. 13, 35—38.
504. Deubner F. ...Nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters, Leipzig/Jena, 1959.
505. Dickson L. E. History of the theory of numbers, vol. 1, Washington, 1919.
506. Dilgan H. Nassireddin Toussi, grande scienciato matematico, Actes du VIII Congr. Int. d'Hist. des sci., Florence, 1956.
507. Dilgan H. Büjük matematikci Ommer Hayyam, Istanbul, 1959.
508. Dilgan H. Demonstration du V postulat d'Euclide, Traduction de l'ouvrage Aschkal-ut-teessis de Samarkandi, Rev. hist. sci., Appl. 13, 1960, 191—6.
509. D'Ooge M. L. Nicomachus of Gerasa, Introduction to arithmetic. Transl. into english, with studies in greek arithmetik by E. S. Robbins and L. C. Karpinski, Ann Arbor, 1938.
510. Dorn B. Drei in der Kais. öffentlichen Bibliothek zu St. Petersburg befindliche astronomische Instrumente mit arabischen Inschriften, Mem. de l'Acad. Imp. des Sci. de St.-Pet., sér. VII, t. IX, No. 1.
511. Duhem P. Sur l'Algorithmus demonstratus, Bibl. math., F. 3, Bd VI, 1905, 9—15.
512. Eneström G. Anfrage 47, Bibl. math., F. 2, Bd 8, 1894, 96.
513. Eneström G. Sur l'origine du terme «Surdus» (-incommensurable), Bibl. math., F. 3, Bd I, 1900, 516.

514. Eneström G. Kleine Bemerkungen zur 2. Auflage von Cantors «Vorlesungen». Bibl. math. F. 3, Bd I, 1900, 499—500; Bd VII, 1907, 284.
515. Eneström G. Sur le «Liber augmenti et diminutionis» compilé par Abraham, Bibl. math., F. 3, Bd I, 1900, 274—275.
516. Eneström G. Ein verschollener deutscher Cossist aus dem Anfange des sechzehnten Jahrhunderts, Bibl. math., F. 3, Bd III, 1902, 355—360.
517. Eneström G. Ist Johannes Widman Verfasser der «Dresdener Algebra»?, Bibl. mathem., F. 3, Bd IV, 1903, 90.
518. Eneström G. Über den deutschen Mathematiker Andreas Alexander, Bibl. math., F. 3, Bd IV, 1903, 290—291.
519. Eneström G. Ist Jordanus Nemorarius Verfasser der Schrift «Algorithmus demonstratus»?, Bibl. math., F. 3, Bd V, 1904, 9—14.
520. Eneström G. Woher hat Leonardo Pisano seine Kenntnisse der Elementa des Euklides entnommen? Bibl. math., F. 3, Bd V, 1904, 414—415.
521. Eneström G. Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch historischer Kenntnisse, Bibl. math., F 3, Bd V, 1904, 404—405.
522. Eneström G. Über zwei ältere Benennungen der fünften Potenz einer Größe, Bibl. math., F. 3, Bd VI, 1905, 324—325.
523. Eneström G. Woher haben Leonardo Pisano und Jordanus Nemorarius ihre Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung entnommen? Bibl. math., F. 3, Bd VI, 1905, 214—215.
524. Eneström G. Bemerkung über zwei ältere Benennungen der fünften Potenz einer Größe, Bibl. math., F. 3, Bd VI, 1905, 410.
525. Eneström G. Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni herausgegebene Liber algorismi de practica arismetrice, Bibl. math., F. 3, Bd VI, 1905, 114.
526. Eneström G. Über zwei angebliche mathematische Schulen im christlichen Mittelalter, Bibl. math., F. 3, Bd VII, 1906/7, 252—62.
527. Eneström G. Über die «Demonstratio Jordani de algorismo», Bibl. math., F. 3, Bd VII, 1906/7, 24—37.
528. Eneström G. Über eine dem Jordanus zugeschriebene kurze Algorismusschrift, Bibl. math., F. 3, Bd VIII, 1907/8, 135—153.
529. Eneström G. Über eine im Mittelalter übersetzte arabische Schrift algebraischen Inhalts, Bibl. math., F. 3, Bd VIII, 1908, 416.
530. Eneström G. Über die Arithmetica des Nemorarius, Bibl. math., F. 3, Bd IX, 1909.
531. Eneström G. Über das angebliche Dezimalbruchzeichen einiger der ältesten gedruckten Rechenbücher, Bibl. math., F 3, Bd X, 1909/10, 238—243.
532. Eneström G. Über die Geschichte der Sternvielecke im Mittelalter, Bibl. math., F. 3, Bd X, 1909/10, 277
533. Eneström G. Über den Algorismus de integris, Bibl. math., F. 3, Bd XIII, 1913.
534. Eneström G. Über den Algorismus de minutiis, Bibl. math., F. 3, Bd XIV, 1914.
535. Encyclopädie des Islam, Leiden-Leipzig, Bd. I—IV, 1913—1936, New edition: The Encyclopaedia of Islam.
536. Erani T. (ed.) Discussion of difficulties of Euklid by Omar Khayyam, Teheran, 1936.
536a. Euclidis Elementa geometriae Comment. Johannus Campanus, Venezia, Erhard Ratdold, 1482.
537. Euclidis elementorum geometricorum Libri Tredecim ex traductione

doctissimi Nasiridini Tusini, Nunc primum arabice impressi, Romae, M. D. XCIV.
538. Euclide Megarense philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice.... Nicolo Tartalea Brisciano... In Venetia, Appresso Curtio Troiano, 1565.
539. Euclidis Elementorum libri XV, Accesit XVI, de Solidum Regularium cuiuslibet intraquodlibet comparatione... Auctore Christophoro Clavio Bambergensi, Coloniae, Expresis Joh. Baptistae Ciotti, 1591.
540. Euclides restitutus, sive prisca geometriae elementa, breuius et facilius contexta. Alphonso Borellio in Messanensi pridem, nunc vero in Pisana Academia Matheseos Professore. Pisis, ex Officina Fracisci Honophri, 1658 superiorum permissu.
541. Euclides. Opera omnia, ed. J. L. Heiberg et H. Menge, Lipsiae, 1888, vol. I—V.
542. Eves H. Omar Khayyam's solution of cubic equations, Math. teach., 1958, 51, No. 4, 285—286.
543. Al-Farabi, Ihsa' al-'ulum, ed. of arabic text together with arabik preface and notes by Uthman Muh. Amina, Cairo, 1950.
544. Fiorini M. Le projezioni cartografiche di Alberuni. Boll. di soc. geogr. italiana, 3 ser., t. 4, 1891, 287—294.
545. Flügel G. Lexicon bibliographic et encyclopeadic a Haji Khalfa compositum, t. I—VII, Lipsiae, 1835—1838.
546. Flügel G., Roediger J., Müller A., Ibn Abi Jaqub el-Nadim, Kitab el-Fihrist, Bd I—II, Leipzig, 1871—1872.
547. Frank J. Zur Geschichte des Astrolabs, Sitz. der phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 48/49, 1916/1917, 275—305.
548. Friedlein G. Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern, Erlangen, 1861.
549. Friedlein G. Das Rechnen mit Columnen vor dem 10. Jahrhundert, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 9, 1864, 297—330; Bd 10, 1865, 241—282.
550. Friedlein G. Gerberts Regeln der Division. Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 9, 1864, 145—171.
551. Friedlein G. Anicii Manlii Torquati Severini Boetii, De institutione arithmetica libri duo, De institutione musica libri quinque, Accedit geometria quae fertur Boetii, Ex libris manuscriptis ed., Lipsiae, 1867.
552. Fridlein G. Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, Leipzig, 1873.
553. Fritz K. The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, Ann. of Math., vol. 46, No. 2, 1945, 242—264.
554. Fück J. Die arabischen Studien in Europa bis in den Anfang des 20. J., Leipzig, 1955.
555. Gandz S. On the origin of the term «root», Amer. math. monthly, vol. 33, 1926, 261—265.
556. Gandz S. The origin of the term Algebra, Amer. math. monthly, vol. 33, 1926.
557. Gandz S. Did the arabes known the abacus? Amer. math. monthly, vol. 34, 1927.
558. Gandz S. Mishnat ha middot, the first Hebrew geometry of about 150 c. F, and the Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarismi, the first arabic Geometry (c. 820), representation the arabic version of the Mishnat ha-middot, Berlin, 1932.
559. Gandz S. The rule of three in arabic and hebrew sources, Isis, vol. 22, No. 63—64, 1934, 220—222.

560. G a n d z S. The sources of Al-Khowarizmi's Algebra, Osiris, vol. I, 1936.
561. G a n d z S. The invention of the decimal fraction and the application of the exponential calculus by Immanuel Bonfils of Tarascon, Isis, vol. 25, 1936.
562. G a n d z S. The origin and development of the quadratic equation in babylonian, greek and early arabic algebra, Osiris, vol. III, 1937, 405—557.
563. G a n d z S. The Algebra of Inheritans. A Reabilitation of al-Khuwarizmi, Osiris, vol. V, 1938.
564. G a n d z S. The origin of the ghubar numerals, or the Arabian abacus and the articuli, Isis, vol. 16, 19.
565. G a n g u l i S. India's contribution to the theory of indeterminate of the first degree, Journ. of Ind. math. Soc., vol. 19, 1931.
566. G a n g u l i S. Notes on indian mathematics, A criticism of G. R. Kaye interpretation, Isis, vol. 12, 1930, No. 37, 132—145.
567. G a r t z J. C. De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis, Halae, 1823.
568. G e r h a r d t G. J. Geschichte der Mathematik in Deutschland, München, 1877.
569. G i b b H. The arab conquests in Central Asia, London, 1923.
570. G o l d s t e i n B. R. A treatise on number theory from a tenth century arabic source, Centaurus, vol. 10, 1964, No. 3, 129—160.
571. G ö r l a n d A. Aristoteles und die Mathematik, Marburg, 1899.
572. G ü n t h e r S. Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525, Berlin, 1887.
573. G ü n t h e r D. Über die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft 4, 1882, 1—129.
574. H a a r b r ü c k n e r. Muhammad Ibn Ibrahim el Ansari, arabische Enzyklopädie der Wissenschaften vornehmlich in pädagogischer Hinsicht, Jahresbericht über die Luisenstädtische Realschule zu Berlin, 1859.
575. H a l m a. La composition mathématique de Claude Ptolémée, 2 ed., Paris, 1927.
576. H a n k e l H. Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig, 1874.
577. H a r t n e r W., S c h r a m m M. Al-Biruni and the theory of solar apogee. What was original in arabic science, Symposium on the hist. of sci., Oxford, 1961.
578. H a r t n e r W. Abu Kamil Shudja b. Aslam b. Muh. b. Shudja al-Hasib al-Misri, The Encyclopaedia of Islam, New Edition.
579. H a r t n e r W. Al-djabr wa'l-Mukābala, The Encyclopaedia of Islam, New Edition, vol. II, fasc. 28, 360—362.
580. H a s k i n s C. H. Studies in the history of mediaevel science, Cambridge, 1924.
581. H a s k i n s C. H. Arabic science in western Europe, Isis, vol. 7, No. 23, 1925, 478—488.
582. H a s k i n s C. H. Studies in medieval culture, Oxford, 1929.
583. H a s s e H., S c h o l z H. Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik, Charlottenburg, 1928.
584. H a u s e r F. Kitab al-hijal der Banu Musa, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 53/54, Beiheft I, 1922.
585. H e a t h T. L. Diophantos of Alexandria. A Study in the history of Greek Algebra, Cambridge, 1885; 2 ed. 1910.
586. H e a t h Th. L. Archimedes, London, 1920.

587. Heath Th. L. The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary, vol. I—III, Cambridge, 1908; 2-nd ed. 1926.
588. Heath Th. L. A manual of greek mathematics, Oxford, 1931.
589. Heath Th. L. Mathematics in Aristotle, Oxford, 1949.
590. Heiberg J. L. Litterargeschichtliche Studien über Euklid, Leipzig, 1882.
591. Heiberg J. L. Die arabische Tradition der Elemente Euklid's, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 29, 1884, hist.-lit. Abt., 1884, 1—22.
592. Heiberg J. L. Beiträge zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 35, hist.-lit. Abt., 1890, 41—58, 81—100.
593. Heiberg J. L., Wiedemann E. Ibn al Haithams Schrift über die parabolische Hohlspiegel, Bibl. math., F. 3, Bd X, 1910.
594. Heiberg J. L., Wiedemann E. Ibn al Haithams Schrift über parabolische Hohlspiegel, Bibl. math., F. 3, Bd XI, 1910/1911, 193—208.
595. Heiberg J. L. Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum, München, 1925.
596. Hell J., Wiedemann E. Geographisches aus dem Mas'udischen Kanon von Al-Beruni, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 44, 1912.
597. Heller S. Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Dialog «Theaetet», Centaurus, vol. 5, 1956, No. 1, 1—58.
598. Hjelmslev J. Eudoxus' axiom and Archimedes' lemma, Centaurus, vol. 1, 1950, No. 1, 2—11.
599. Hochheim A. Kafi fil Hisab des Abu Bekr Alhusein Alkarchi, I—III, Halle, 1878—1880.
600. Hofmann J. E. Erklärungsversuche für Archimedes Berechnung von $\sqrt{3}$, Archiv für Gesch. d. Math., d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd XII, 130, 387—408.
601. Hofmann J. E. Über die Annäherung von Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung, Bd 43, 1934, 187—210.
602. Hofmann J. E. Ergänzende Bemerkungen zum «Geometrischen Irrationalitätsbeweis der Alten Griechen», Centaurus, vol. 5, No. 1, 59—72.
603. Hultsch F. Der Lehrsatz über die Fläche des Dreiecks, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 9, 1864, 241.
604. Hultsch F. Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 27, 1882, hist.-lit. Abt., 4—60.
605. Hultsch F. Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes, Nachr. von d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1893, 367—428.
606. Hultsch F. Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen, Bibl. math., F. 3, Bd I, 1900, 8—12.
607. Hultsch F. Die Sexagesimalrechnung in den Scholien zu Euklids Elementen, Bibl. math., F. 3, Bd V, 1904, 225—233.
608. Hunger H., Vogel K. Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts, 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis Phil. gr. 65, Text, Übersetzung und Kommentar, Wien, 1963.
609. Hunrath K. Ueber das Ausziehung der Quadratwurzel bei Griechen und Indern, Hadersleben, 1883.
610. Hunrath K. Zum Verständnis des Wortes Algorismus, Bibl. math., F. 2, Bd I, 1887, 70.
611. Ibn Chaldun. Prolegomena zu seinem Geschichtswerke, hrsg. von

Quatremiere, übers. von MacGuckin de Slane, Notices et extr. des manuscrits de la Bibl. Imp., t. 16—21.
612. Ibn Sinan. Rasa'il, Hyderabad, 1367h (1948).
613. Ikram P. The cultural heritage of Pakistan, Karachi, 1955.
614. Jacob U., Wiedemann E. Zu Omer-i-Chajjam, Der Islam, Bd III, 1912, 42—62.
615. Jones P. S. Irrationals or incommensurables, IV. The transitional period, Math. teacher, vol. 49, 1956, No. 6, 469—471.
616. Jordan L. Materialen zur Geschichte der arabischen Zahlzeichen in Frankreich, Archiv für Kulturgeschichte, Bd 3, Berlin, 1905.
617. Junge G. Besonderheiten den griechischen Mathematik, II, Jahresbericht der deutsch. Math.-Vereinigung, Bd 35, Hft 9—12, 251—268.
618. Junge G., Thomson W. The commentary of Pappus on book X of Euclid's Elements, Cambridge, 1930.
619. Junge G. Das Fragment der lateinischen Übersetzung des Pappus-Kommentars zum 10. Buche Euklids (Nr. 7377A, Fol. 68—70 der Bibl. Nationale zu Paris), Quellen u. Stud. zur Gesch. der Math., Astron. u. Phys., Abt. B, Bd 3, H. I, 1936, 1—17.
620. Jourdain A. Mémoires sur l'observatoire de Méragah et sur quelques instruments employés pour y observer, suivi d'une notice sur la vie et les ouvrages de Nassir-Eddin, Magasin encyclopedique, t. 6, 1809.
621. Juschkewitsch A. P., Rosenfeld B. A. Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter, Sowjetische Beiträge zur Geschichte d. Naturwiss., herausg. G. Harig. Berlin, 1960.
622. Jouschkewitch A. P. Sur certaines particularités du développement des mathématiques arabes, Actes du VIII Cong. Int. d'Hist. des Sci., Florence, 1956, vol. I, 156—159.
623. Juschkewitsch A. P. Über ein Werk des Abu 'Abdallah Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi al Magusti zur Arithmetik der Inder, Schriftenreihe Geschichte der Naturwiss., Technik und Medizin, Beiheft 1964 (zum 60. Geburtstag von G. Harig), 21—63.
624. Juschkewitsch A. P. Note sur les determinations infinitésimales chez Thabit ibn Qurra, Arch. Int. d'Hist. des Sci., No. 66, Janv.—Mars 1964, 37—45.
625. Juschkewitsch A. P. Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig, 1964.
626. Al-Kachi, Jamshid Ghiyath al-Din. The extraction on the «n»-th root in the sexagesimal notation. A study of chapter 5, treatise 3 ef Miftah al-hicab. With translation and commentary by Abdul-Kader Dakhel, ed. by Wasfi A. Hijab and E. S. Kennedy, Beyruth, 1960.
627. Kapp A. G. Arabische Übersetzer und Kommentatoren Euklids, sowie deren math.-naturwiss. Werke auf Grund des Ta'rikh al-Hukama' des Ibn al-Qifti, I—III, Isis, vol. 22—24, 1934—1936.
628. Karpinski L. C. An Italian algebra of the fifteenth century, Bibl. math., F 3, Bd XI, 1910/1911, 209—219.
629. Karpinski L. C. Two twelfth century Algorisms, Isis, vol. 3, 1921, 396—413.
630. Karpinski L. C. Robert of Chester's translation of algebra of Al-Khowarizmi, Bibl. math., F. 3, Bd XI, 1911, 125—131.
631. Karpinski L. C. The algebra of Abu Kamil Shoja ben Aslam, Bibl. math., F. 3, Bd XII, 1911/12, 40—55.
632. Karpinski L. C. The algebra of Abu Kamil, Amer. math. monthly, vol. XXI, No. 2, 1914, 37—48.
633. Karpinski L. C. Hindu numerals among the Arabs, Bibl. math., F. 3, Bd XIII, 1913, 97—8.

634. Karpinski L. C. Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of Al-Khowarismi, N. Y., 1915.
635. Karpinski L. C. Origines et developpement de l'algebre, Scientia, t. 26, N LXXXVIII-8, 1919.
636. Karpinski L. C. Importance of the Greek algebraical problems, Isis, vol. 22, 1934/1935, No. 63, 104—105.
637. Kary-Niyazov T. N. On some results obtained by the Ulughbek observatory, M., 1960.
638. Kasir D. S. The Algebra of Omar Khayyam, N. Y., 1931.
639. Kästner A. G. Geschichte der Mathematik, seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts, Göttingen, 1796.
640. Kaye G. R. The source of Hindy mathematics, Journ. of the Royal As. Soc., 1910, 749—760.
641. Kaye G. R. Some notes on Hindu mathematical methods, Bibl. math., F. 3, Bd XI, 1910/1911, 289—299.
642. Kaye G. R. Indian mathematics, Isis, vol. 2, 1917/19, No. 6.
643. Kaye G. R. Ancient hindu spherical astronomy, Journ. of As. Soc. of Bengal, vol. 15, 1919.
644. Kaye G. R. Influence grecque dans le développement des mathématiques hindoues, Scientia, vol. 26, 1919, No. 81.
645. Kaye G. R. Hindy astronomy, Mem. of the archeol. Survey of India, No. 18, Calcutta, 1924.
646. Kazim M. A. Al-Biruni and trigonometry, in: «Al-Biruni commemoration volume,» Calcutta, 1951, 160—171.
647. Kennedy E. S. Al-Kashi's Plate of conjunctions, Isis, vol. 38, 1947, 56—59.
648. Kennedy E. S. An islamic computer for planetary latitudes, Journ. of Amer. Orient. Soc., vol. 71, 1951, 13—21.
649. Kennedy E. S. A fifteenth-century lunar eclipse computer, Scripta math., No. 17, 1 : 2, 1951, 91—97.
650. Kennedy E. S. A survey of Islamic Astronomical tables, Trans. Amer. Phylos. Soc., vol. 46, ch. 2, 1956.
651. Kennedy E. S. Parallax theory in islamic astronomy, Isis, vol. 47, 1956.
652. Kennedy E. S., Transue W. R. A medieval iterative algorism, Amer. math. monthly, vol. 63, No. 2, 1956, 80—83.
653. Kennedy E. S., Ahmad Muruwwa. Biruni on the solar equation, Journ. of Near Eastern Stud., 1958, 17, 112—125.
654. Kennedy E. S. Biruni on the solar equation, Journ. of Near Eastern Stud., vol. 17, 1958, 112—121.
655. Kennedy E. S. The Sasanian Astronomical handbook Zij-i Shah, Journ. of the Amer. Orient. Soc., vol. 78, 1958, 246—262.
656. Kennedy E. S. Al-Biruni on transits, Amer. Univers. of Beyruth, 1959.
657. Kennedy E. S., Roberts V. The planetary theory of Ibn al-Shatir, Isis, vol. 59, 1959, No. 161, 227.
658. Kennedy E. S. The planetary equatorium of Jamshid Ghiyath al-Din al-Kashi (d. 1429), Princeton, 1960.
659. Kennedy E. S. A letter of Jamshid al-Kashi to his father, Orientalia, XXIX, 1960, 191—213.
660. Kennedy E. S., Muhammad Agha. Planetary visibility tables in islamic astronomy, Centaurus, vol. 7, 1960, 134—140.
661. Kennedy E. S. Al-Kaschi's treatise on astronomical instruments, Journ. of Near Eastern Stud., vol. 20, 1961.

662. Kennedy E. S. Al-Biruni on determining the meridian, Math. teacher, vol. 56, 1963, 635—7.
663. Khanikoff N. Analysis and extracts of Kitab miran al-hikma (Book of the balance of Wisdom), an arabic work on the waterbalance, written by al-Khazini in the twelfth century. Journ. of the Amer. Orient. Soc., 1859, vol. 6, 1—128.
664. Klamroth M. Ueber den arabischen Euklid, Zeitschr. d. deutsch. Morgenländ. Ges., Bd 35, 1881, 270—326.
665. Klamroth M. Ueber die Auszüge aus griechischen Schriftstellern bei al-Ja'qubi, IV, Mathematiker und Astronomen, Zeitschr. d. Deutsch. Morgenländ. Ges., Bd 42, 1888.
666. Klein J. Die griechische Logistik und Entstehung der Algebra, Quellen und Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys., Abt. B, Bd 3, Hft I, 18—105; Hft II, 122—235, Berlin, 1933.
667. Kohl K. Zu Ibn al-Haithams Optik, Archiv f. Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd 3, 1910.
668. Kohl K. Über den Aufbau der Welt nach Ibn al-Haitham, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 54/55, 1922/1923, 140—179.
669. Kohl K. Über das Licht des Mondes, Eine Untersuchung von Ibn al. Haitham, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlagen, Bd 56/57, 1924/1025, 305—398.
670. Kohl K. Zur Geschichte der Dreiteilung des Winkels, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 54, 1925, 180—189.
671. Krause M. Die Sphaerik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abu Nasr Mansur b. 'Ali b.' Irak, mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematiker, Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, phil.-hist. Kl., F. 3, No. 17, Berlin, 1936.
672. Krause M. Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. Phys. Bd 3, Abt. B, Hft II, 1936, 437—532.
673. Krause M. Al-Biruni, ein Iranischer Forscher des Mittelalters, Der Islam, Bd 26, 1940, 1—15.
674. Krenkow F. Abu'r-Raichan Al-Beruni, Islamic culture, vol. VI, No. 1—4, 1932.
674a. Kushyār ibn Labban. Principles of Hindu Reckoning. A translation with introduction and notes by M. Levey and M. Petruck of the Kitāb fi usūl hisab al-hind, The University of Wisconsin Press, 1965.
675. Kutsch W. S. J. Thābit b. Qurra's arabischen Übersetzung der Arithmetike Eisagoge des Nikomachos von Gerasa zum ersten Mal herausgegeben, Beyruth, 1959.
676. Landau R. Arab contribution to civilization, San Francisco, 1958.
677. Leonardo Pisano. Scritti di Leonardo Pisano mathematico del secolo decimoterzo, publicati di Baldassare Boncompagni, vol. I, (Liber Abbaci), 1857; vol. II (Practica geometriae), 1862.
678. Lesley M. Biruni on rising times and daylight lengths, Centaurus, vol. 5, No. 2, 1957, 121—141.
679. Levey M. Some notes in the albegra of Abu Kamil Shuja'; a fusion of Babylonian and Greek algebra, Enseign. math., (2), 4, 1958, 77—92.
680. Levey M., Petruck M. Modern fundamental operations in an early Arabic form: 'Anabi's hebrew commentary on ibn Labban's Kitāb fī usūl hisab al-hind, Enseign. math. 8, 1962, No. 3—4, 291—302.
681. Levi della Vida G. Appunti e quesiti di storia litteraria araba, Rivista degli studi orient., vol. XIV, 1933, Fasc. III, 249—283.
682. Ley H. Studie zur Geschichte der Materialismus im Mittelalter, Berlin, 1957.

683. Libri G. Histoire des sciences mathématiques en Italie, t. I-IV, Paris, 1838.
684. Lippert J. und Müller A. (ed.). Ibn el Qifti, Tarich el Hukama, Berlin, 1903.
685. Lokotsch K. Avicenna als Mathematiker, besonders die planimetrischen Bücher seiner Euklidübersetzung, Erfurt, 1912.
686. Loria G. Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique, Paris, 1929.
687. Luckey P. Der Rauminhalt des ägyptischen Pyramidenstumpfes, Zeitschr. d. math.-naturwiss. Unterricht, Bd 63, 1932, 389—91.
688. Luckey P. Was ist ägyptische Geometrie?, Isis, vol. 20, 1933, 15—52.
689. Luckey P. Tabit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen, Ber. d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, Bd 93, 1941, 93—114.
690. Luckey P. Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters, Forsch. u. Forschritte, Jg. 24, Hft. 17/18, 1575.
691. Luckey P. Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik, Math. Ann., Bd. 120, Hft. 2, 1948.
692. Luckey P. Die Rechenkunst bei Gamsid b. Mas'ud al-Kasi mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens, Abhandl. für d. Kunde d. Morgenlandes, Bd. XXI, Wiesbaden, 1950.
692a. Luckey P. Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Gamsid b. Mas'ud al-Kasi, Berlin, 1953.
693. Mansion P. Sur le commentaire d'Anaritius relatif aux éléments d'Euclide, Ann. de la Soc. Sci. de Bruxelles, t. 24, 1900, 47—49.
694. Marre A. Le Messahat de Mohammed ben Moussa, extrait de son Algèbre, Nouvelles Ann. de Math., t. 5, 1846.
695. Marre A. Khélasat al Hisáb on Essence du calcul de Behaeddin Mohammed ben al-Hosain al-Aamouli, Nouvelles ann. de Math., t. 5, 1846, 263—323.
696. Marre A. Le Talkhys d'Ibn Albanna, publié et traduit (d'aprés un ms. inédit de la Bibliothèque Bodléyènne, coté Marsh. 371, No. CCXII du Catalogue d'Uri), Atti dell'Acad. Pontifica dei Nuovi Lincei, t. 17, Rome, 1864.
697. Martin T. H. Les signes numeraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-age, Rome, 1864.
698. Maurolyc. D. Francisci Maurolyci Abbatis Messanensis, Mathematici celleberrimi, Arithmeticorum libri duo. Nunc primum in Lucem Editi, Venetiis, 1575.
699. Mayer L. A. Islamis astrolabists and their works, Geneva, 1956.
700. Menninger K. Zahlwort und Ziffer, 2. Aufl., Göttingen, 1958.
701. Mez A. Renaissance des Islams, Heidelberg, 1922.
702. Michel P. H. Les nombres figurés dans l'arithmétique pythagoriciènne, Paris, 1958.
703. Mieli A. La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondial, Leyden, 1938,
704. Migne J. F. Alcuini opera omnia, Paris, 1851.
705. Mossaheb G. H. Hakim Omare Khayyam as an algebraist, Teheran, 1339 (1960).
706. Mussaheb G. H. Djabr-u-mukabala-ji-Khayyam, Teheran, 1317h (1938).
707. Müller C. Die Mathematik der Sulvasutra, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Bd. 7, Leipzig, 1929.
708. Müller C. Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näher-

ungswerte der $\sqrt{3}$, Quellen und Studien zur Gesch. d. Math., Astron u. Phus., Bd. II, 1932, 281—285.
709. Mžik, H. v. Das «Buch der Abbildung der Länder», Handschrift der Hofbibliothek in Wien, Mitteil. d. Geogr. Ges. in Wien, Bd. 62, 1919, 145—149.
710. Mzik H. v. Al-Huwarezmi, Das kitab Surat al-ard, Leipzig, 1926.
711. Nagl A. Über eine Algorismusschrift des XII Jahrhunderts und über die indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen in christlichen Abendländer, Zeitschr. für Math. u. Phus., Bd. 24, hist.— lit. Abt., 1889, 129—146, 161—170.
712. Nagl. A. Das quadripartitum des Joannes de Muris und das praktische Rechnung im vierzehnten Jahrhundert, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft 5, 1890, 137—146.
713. Nagl A. Der arithmetische Tractat von Radulph von Laon, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft. 5, 1890, 85—146.
714. Nagl A. Die Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft. 9, 1899, 335—357.
715. Nallino C. Al-Huwarismi e il suo rifacimento della Geografia di Tolomeo (Surat al-ard), Roma, 1895.
716. Nallino C. A. Al-Battani sive Albategnii, Onus Astronomicum, arabice editum, latine versum, ad. notationilus instructum, I—III, Milano, 1899—1907
717. Nallino C. A. Raccolta di scritti editi et inediti, vol. 1—4, Roma, 1939.
718. Natucci A. Storia della teoria degle equazioni, Period. matem., 1963, 41, No. 1, 1—16.
719. Nesselmann G. H. F. Die Algebra der Griechen, Berlin, 1842.
720. Nesselmann G. H. F. Beha-eddin's Essenz der Rechenkunst, Berlin, 1843.
721. Neugebauer O. Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Berlin, 1926.
722. Neugebauer O. Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys. Abt. B, Bd. I, 1930/1931, 428—483.
723. Neugebauer O. Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys., Bd. I, 1931, 30—380.
724. Neugebauer O. Mathematische Keilschrift-Texte, I—III, Berlin, 1935—1937.
725. Neugebauer O. Zur geometrischen Algebra, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys., Abt. B, Bd. III, 1936, 245—259.
726. Neugebauer O. The exact sciences in Antiquity, 2 ed., Brown University Press, Providence, Rhode Island, 1957.
727. Neugebauer O. The astronomical tables of al-Khowarizmi, hist.-filos. Skrifter udgivet of Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Bd. 4, No. 2, Kobenhavn, 1962.
728. Newhall A. The crusades, N. Y., 1927.
729. Nix L. Das 5. Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arab. Übersetzung d. Thabit, Ibn Corrah, Leipzig, 1889,
730. O'Leary D. L. How greek science passed to arabs, London, 1948.
731. Ore O. Number theory and his history, N. Y.—Toronto—London, 1948.
732. Peet T. E. (ed.) The Rhind Mathematical Papyrus, London, 1923.
733. Pinès S. La théorie de la rotation de la terra á l'époque d' Al-Biruni, Journ. as., 244, 1956, 301—302.
734. Pinès S. La théorie de la rotation de la terre á l'époque d' Al-Biruni,

Actes du VIII Congr. Int. d'Hist. de Sci. vol. I, Florence, 1956, 299—303.

735. Plooij E. B. Euclid's conception of ratio and his definition of proportional, magnitudes as criticized by arabian commentators, Rotterdam, 1950.

736. Ramanujacarya N., Kaye G. R. The Triśatikā of Srīdharācarya, Bibl. mathem., F. 3, Bd. XIII, 1912/1913.

737. Rangācārya M. The Ganita-Sāra-Sangraha of Mahāvīracārya, Madras, 1912.

738. Ar-rasailu'l-mutafarriqa fi-l-chai'at li-l-mutaqaddimin wa mu'asiray il-Biruni, Osmania Oriental Publications Bureau, Hyderabad — Deccan, 1948.

739. Reidemeister K. Die Arithmetik der Griechen, Hamburgen math. Einzelschriften, Hft. 26, Leipzig — Berlin, 1940.

740. Reynolds J. H. The Hakemite tables of Ebn Jounis, Nature, vol. 128, 1931, 913—914.

741. Riese A. Rechnung auff der Linien und Federn auff allerley handthirung gemacht durch Adam Riesen, Gedruckt anno 1579.

742. Risler J. C. La civilisation arabe, Paris, 1955.

743. Ritter H. Schriften Ja'qub ibn Ishak al-Kindi's in Stambuler Bibliotheken, Archiv Orientalni, 1932, 4—363.

744. Roberts V. The Solar and Lunar theory of Ibn ash-Shatir, A Pre-copernican Copernican model, Isis, vol. 48, No. 154, 1957, 428—432.

745. Rodet L. L'algèbre d'Alkarizmi et les méthodes indiens et grecques, Journ. as., sér. 7, t. 11, 1878, 5—100.

746. Rodet L. Leçons de calcul d'Aryabhata, Journ. as., sér. 7, t. 13, 1879, 393—434.

747. Rodet L. Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquete d'Alexandre, Bull. de la Soc. math. de France, t. 7, 1879, 98—102.

748. Rodet L. Sur les méthodes d'approximation chez les anciens, Bull. de la Soc. math. de France, t. 7, 1879, 159—167.

749. Rosen F. The algebra of Mohammed ben Musa, London, 1831.

750. Rosen F. Ein wissenschaftlicher Aufsatz Umar-i-Khayyams, Zeitschr. d. deutsch. Morgenländ. Ges., Bd 4 (79), 1925, 133—135.

751. Rosenfeld B. A. New researches in prehistory of Lobatschevsky's geometry and in the history of its interpretations, Actes du VIII Congr. Int. d'Hist. d. Sci., Florence—Milan, 3—9 sept. 1956, vol. 1, 138—140.

752. Rosenfeld B. A., Juschkewitsch A. P. The prehistory of non-Euclidean Geometry in the medieval East., M., 1963.

753. Rosenthal F. Al-Kindi and Ptolemy, Studi orientalistici in onore di Giorgio Levi della Vida, vol. 2, Roma, 1956.

754. Rudolff G., Hochheim A. Die Astronomie des Mahmûd ibn Muhammed ibn 'Omar al-Gagmînî, Zeitschr. d. deutsch. Morgenländ. Ges., Bd 47, 1893, 213—275.

755. Ruchen-Ali. Commentary in the «Khoolasut-ool-Hisab» by Buhaeood-Deen, Calcutta, 1812.

756. Ruska J. Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst, Sitz. Heidelberger Akad. d. Wiss., phylos.-hist. Kl., 2 Abh., Jg 1917.

757. Ruska J. Über das Fortleben der antiken Wissenschaft im Orient, Archiv für Gesch. d. Math., d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd X, Leipzig, 1927, 112—135.

758. Ruska J. Zur Geschichte der arabischen Algebra und Rechenkunst, Der Islam, Bd 9, 1919, 116—117.

759. Ruska J. Al-Biruni als Quelle für das Leben und Schriften al-Rasi's, Isis, vol. 5, 1922.
760. Ruska J. Die 70 Bücher des Jabir ibn Hayyān, Festgabe für E. O. von Lippman, Berlin, 1927.
761. Ruska J. Zahl und Null bei Jabir ibn Hayyān, mit einem Exkurse über Astrologie im Sasanidenreiche, Archiv für Gesch. d. Math, d. Naturwiss. und d. Technik, Bd XI, Leipzig, 1928.
762. Ruska J. Die Alchemie des Avicenna, Isis, vol. 21, 1934.
763. Ruska J. The history of Jabir Problem, Islamic culture, Bd 11, 1937, 303—312.
764. Sabra A. J. (ed.). Omar Khayyam, Explanation of the difficulties in Euclid's postulats, Alexandria, 1961.
765. Sacerdote G. Il trattato del pentagono e del decagono di Abu Kamil Shogia, Festschrift zum achtzigen Geburtstage Moritz Steinschneider, Leipzig, 1896.
766. Sachau E. The chronology of ancient nations, London, 1879.
767. Sachau E. Chronologie der orientalischen Völker von Albiruni, Leipzig, 1923.
768. Sachau E. Alberuni's India, vol. I—II, London, 1887—1888; 2 ed. 1910.
769. Salih Zéky Efendi. Notation algébrique chez les orientaux, Journ. as., sér. 9, t. 10, 1898 (janv.—févr.), 35—52.
770. Samplonius Y. Die Konstruktion des regelmässigen Siebenecks nach Abu Sahl al-Qûhî Weigan ibn Rustam, Yanus, vol. 50, 1963, 227—249.
771. Sarton G. Adrian van Roomen's commentary on Al-Khwarizmi (c. 1598), Isis, vol. 21, 1934, 209.
772. Sarton G. Simon Stevin of Bruges (1548—1620), Isis, vol. 21, 1934, 241—303.
773. Sarton G. The first explanation of decimal fractions and measures (1585), Isis, vol. 23, 1935.
774. Sarton G. Introduction to the history of science, vol. I—III, Baltimore, 1927—1948.
775. Sarton G. Appreciation of ancient and medieval science during the Renaissance (1450—1600), Philadelphia, 1953.
776. Sarton G. Ancient science and modern civilization, Univers. of Nebrasca, 1954.
777. Sayili A. Thâbit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem, Isis, vol. 51, part 1, 1960, 35—37.
778. Sayili A. The introductory section of Habash's astronomical tables known as the «Dascene» Zij, Ar. text, with turkish and english transl., Ankara Univers. Dil ve Tarih, Cografya Fakültesi Dergisi, 13, 1955, 133—151.
779. Sayili A. Al Khazini's treatise on astronomical instruments, Ar. text, with turkish and english transl., Ankara Univers., Dil ve Tarih, Cografya Fakültesi Dergisi, 14, 1956, 1—19.
780. Sayili A. Abdülhamid ibn Turk'ün «Katişik Denklemlerde Mantikî Zaruretler» adli yarsi ve zamanin cebri (Logical necessities in mixed equations by 'Abd al-Hamîd ibn Turk and the algebra of his time), Text in turkish, english and arabic, Türk Tarih Kurumy Jayinlardan, VII Seri, No. 41, Ankara, 1962.
781. Schirmer O. Studien zur Astronomie der Araber, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 58/59, 1926/1927, 33—88.
782. Schoeneborn W. Ueber die Methode, nach der die alten Griechen (insbesondere Archimedes und Heron) Quadratwurzeln berechnet haben, Zeitschr. für Math. u. Phys., hist.-lit. Abt., Bd 28, 1883.

783. Schoy C. Drei planimetrische Aufgaben der arabischen Mathematikers Abu'l Jud Muhammad ibn al-Lith, Isis, vol. 7, 1925.
784. Schoy C. Längenbestimmung und Zentralmeridian bei den älteren Völkern, Mitteil. d. K. K. Geograph. Ges. in Wien, vol. 58, 1915, 27—62.
785. Schoy C. Erdmessungen bei den Arabern, Zeitschr. d. Ges. für Erdkunde zu Berlin, I—IV, 1917, 431—445.
786. Schoy C. Abhandlung von al-Fadl b. Hatîm an-Nairîzî über die Richtung der Qibla, übersetzt und erläutert, Bayer. Akad. der Wiss., math. Kl., 1922.
787. Schoy C. Originalstudien aus al-Qanun al-Mas'udi, Isis, vol. 5, 1923, 51—74.
788. Schoy C. Beiträge zur arabischen Trigonometrie, Isis, vol. 5, 1923.
789. Schoy C. Die Bestimmung der geographischen Breite der Stadt Gazna, mittels Beobachtungen im Meridian durch den arabischen Astronomen und Geographen Al-Bîrûnî, Ann. der Hydrographie und Maritimen Meteorologie, Hft. 2, Jg. 53, 1925, 41—47.
790. Schoy C. Graeco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Vizeköniglichen Bibliothek zu Kairo, Isis, vol. 8, 1926.
791. Schoy C. Al-Bîrûnî's method of approximation of chord 40°, Amer. math. monthly, vol. 33, 1926, 95—96.
792. Schoy C. Al-Bîrûnî's computation of π, Amer. math. monthly, vol. 33, 1926, 323—325.
793. Schoy C. Behandlung einiger geometrischen Fragepunkte durch muslimische Mathematiker, Isis, vol. 8, 1926.
794. Schoy C. 'Alî ibn 'Isâ, Das Astrolab und sein Gebrauch, Isis, vol. 9, 1927, 239.
795. Schoy C. Die trigonometrische Lehren des persichen Astronomen Abu'l Raihân Muhammad ibn Ahmad al-Bîrûnî, dargestellt nach al-Qânûn al-Mas'ûdi, Hannover, 1927.
796. Sédillot J. J. Traité des Instruments astronomiques des Arabes, t. 1—2, Paris, 1832—1834.
797. Sédillot L. A. Découverte de la variation par Aboul Wefa, Journ. as., sér. 3, t. 16, 1835, 420—438.
798. Sédillot L. A. Récherches nouvelles pour servir à l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux. Notice de plusieurs opuscules mathématiques qui composent le manuscrit arabe No. 1104, Ancien fonds de la Bibliothèque du Roi, Extrait et notices des manusctits, t. XIII, 1837.
799. Sédillot L. A. Sur les emprunts que nous avons fait a la science arabe, Bullet. di bibliogr. e di storia delle sci. mat. e fys. t. 8,1875, 63—78.
800. Sédillot L. A. Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, Paris, 1845—1849.
801. Sédillot L. A. Prolégomènes des Tables astronomiques d'Oloug-Beg, Paris, 1853.
802. Sédillot L. A. De l'algèbre chez les Arabes, Journ. as., sér. 5, t. 2, 1853, 323—350.
803. Seemann H. J. Die Instrumente der Sternwarte zu Marâgha nach den Mitteilungen von al'Urdî, Sitz. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd. 60, 1928, 15—126.
804. Seeman H. J., Mittelberger Th. Das kugelförmige Astrolab, Abhandl. zur Gesch. d. Naturwiss., Hft 8, 1915, 32—40.
805. Sengupta P. C. Brahmagupta on interpolation, Bull. Calcutta Math. Soc., vol. 23, 1931, 125—128.
806. Sengupta P. Ch. Brahmagupta. The Khandakhâdyaka, Calcutta, 1934.

807. Shukla K. S. The Sūrya-siddhānta with the commentary of Paramesvara, Lucknow University, 1957
808. Shukla K. S. (ed.). The Patiganita of Sridharacarya with the ancient sanscrit commentary, Lucknow, Dep. Math. and Astron. Lucknow Univ., 1959,
809. Siggel A. Gābir ibn Ḥayyān, Das Buch der Gifte, Arabische Text in Faximile, übersetzt und erläutert, Akad. d. Wiss. u. d. Lit. (Mainz), Veröffentl. d. Orient. Komission, Bd XII, Wiesbaden, 1958.
810. Simon M. Zu Hwarizmi's hisâb al gabr wal muqâbala, Archiv d. Math. u. Phys., Reihe 3, Bd 18, 1911.
811. Simon M. Zu Brahmaguptas Diophantischen Gleichungen zweiten Grades, Archiv d. Math. u. Phys., Bd 20, 1913, 280—281.
812. Singh A. N. On the Indian method of root extraction, Bull. of the Calcutta math. Soc., vol. 18, 1927, 123—140.
813. Singh A. N. On the use of series in Hindu mathematics, Osiris, vol. I, 1936.
814. Smith D. E. The Ganita-Sara-Sangraha of Mahaviracarya, Bibl. math., F. 3, Bd IX, 1908/1909, 106—110.
815. Smith D. E., Karpinski L. C. The Hindu-Arabic numerals, Boston — London, 1911.
816. Smith D. E. Euclid, Omar Khayyam and Saccheri, Scripta math., 3 : 1, 1935, 5—10.
817. Stahl W. H. Dominant traditions in early medieval latin science, Isis, vol. 50, 1959, 95—124.
818. Stäckel P. Über die Geschichte der Terme Binom, Polynom usw., Bibl. math., F. 3, Bd IV, 1903, 91.
819. Steck M. Proklus Diadochus, Kommentator zum ersten Buch von Euklids «Elementen», Halle, 1945.
820. Steigmüller H. Lucas Pociuolo, Eine biographische Skizze, Zeitschr. für Math. und Phys., Bd 34, hist.-lit. Abt. 1889, 81—102, 121—128.
821. Steinschneider M. Die «mittlern» Bücher der Araber und ihre Bearbeiter, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 10, 1865, 456—498.
822. Steinschneider M. Diophantus bei den Arabern im neunten Jahrhundert, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 10, 1865, 499.
823. Steinschneider M. Alfarabi. Des arabischen Philosophen Leben und Schriften, mit besonderer Rücksicht auf die Geschichte der Griechischen Wissenschaft unter den Arabern, Mém. de l'Acad. des Sci. de St.-Pétersburg, sér. 7, t. 13, No. 4, 1869.
824. Steinschneider M. Euklid bei den Arabern. Eine bibliographische Studie, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 31, 1886, 81—110.
825. Steinschneider M. Die Söhne des Musa ben Schakir, Bibl. math., F. 2, Bd 1, 1887, 44—48, 71—75.
826. Steinschneider M. Miscellen zur Geschichte der Mathematik, Simplicius, der Mathematiker, Bibl. math., F. 2, Bd 6, 1892, 7—8.
827. Steinschneider M. Die arabischen Bearbeiter des Almagest, Bibl. math., F. 2, Bd 6, 1892.
828. Steinschneider M. Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters, Berlin, 1893.
829. Steinschneider M. Die arabischen Übersetzungen aus dem Griechischen, Zweiter Abschnitt: Mathematik, Zeitschrift der deutsch. Morgenländ. Ges., Bd 50, Leipzig, 1896, 161—219, 337—417.
830. Steinschneider M. Die europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts, Sitzungsber. d. Wiener Akad., phil.-hist. Kl., Bd 149, 1904; Bd 151, 1905.

831. S t e v i n S. L'arithmétique, Reneuë corrigee et augmentee de plusiers traictez et annotation par Albert Girard... A Leide, 1625.
832. S t e v i n S. The principal works of Simon Stevin, vol. II, Mathematics, Ed. by D. J. Struik, Amsterdam, 1958.
833. S t i f e l M. Die Coss Christoffs Rudolffs mit schöner Exempeln der Koss gebessert und sehr gemehrt, Zu Konigsberg in Preussen gedrückt, 1553.
834. S t i f e l M. Arithmetica Integra, Norimbergae, 1594.
835. S t o r y W E. Omar Khayyam as a mathematician, Boston, 1918.
836. S t r u i k D. J. A concise history of mathematics, N. Y., 1948.
837. S t r u i k D. J. Omar Khayyam matematician, Math. teacher, **1958**, No. 4, 280—285.
838. S t r n u k D. J. Simon Stevin and the decimal fractions, Math. teacher, 1959, No. 6, 474—8.
839. S t r u w e W W., T u r a j e w V A. (ed.). Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museum der schönen Künste in Moskau, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math, Astron. u. Phys., Abt. A, Bd. I, Berlin, 1930.
840. S u l l i v a n J. W. W. The history of mathematics in Europe, London, 1925.
841. S u t e r H. Die Mathematiker auf den Universitäten des Mittelalters, Zürich, 1887.
842. S u t e r H. Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidsausgabe, Bibl. math., F 2, Bd. 6, 1892, 3—6.
843. S u t e r H. Das Mathematiker-Verzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft 6, 1892, 1—87.
844. S u t e r H. Zur Geschichte der Trigonometrie, Bibl. math., F. 2, Bd. 7, 1893, 1—8.
845. S u t e r H. Zu Rudolff und Hochheim, Die Astronomie des Gagminî, Zeitschr. d. deutsch. Morgenländ. Ges., Bd 47, 1893, 718—719.
846. S u t e r H. Einige Beiträge zur Geschichte der arabischen Mathematiker und Astronomen, Bibl. math., F. 2, Bd 11, 1897, 83—86.
847. S u t e r H. Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Übergang vom Orient an den Okzident, Aarau, 1897.
848. S u t e r H. Über zwei arabische mathematische Manuskripte der Berliner Kgl. Bibliothek, Bibl. math., F. 2, Bd 12, 1898, 73—78.
849. S u t e r H. Rezension: Besthorn R. O., Heiberg J. L., Codex Leidensis 399, I, Euclidis elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Nairizii, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 44, 1899, 60—62.
850. S u t e r H. Zur Frage über die Lebenszeit des Verfassers des Mulahhas fi'l-hei'a, Mahmûd b. Muh. b. 'Omar al-Gagmînî, Zeitschr. d. deutsch. Morgenländ. Ges., Bd 53, 1899, 539—540.
851. S u t e r H. Die Kreisquadratur des Ibn el-Haitam. Zum ersten Mal nach den Manuskripten der Kgl. Bibliothek in Berlin und Vatikans herausgegeben und übersetzt, Zeitschr. für Math. u. Phys. hist.-lit. Abt. Bd 44, 1899, 33—47.
852. S u t e r H. Notizen über arabischen Mathematiker und Astronomen, Bibl. math., F. 2, Bd 13, 1899.
853. S u t e r H. Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft X, Leipzig, 1900.
854. S u t e r H. Das Rechenbuch des Abû Zakarîjâ el-Hassâr, Bibl. math., F. 3, Bd II, 1901, 12—40.
855. S u t e r H. Über die im «Liber augmenti et diminutionis» vorkommenden Autoren, Bibl. math., F. 3, Bd III, 1902, 350—354.
856. S u t e r H. Nachträge und Berichtigungen zu «Mathematiker und

Astronomen der Araber und ihre Werke», Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft XIV, 1902, 170—172.
857. Suter H. Über Geometrie der Söhne des Musa ben Schakir, Bibl. math., F 3, Bd III, 1902, 259—272.
858. Suter H. Der Verfasser des Buches «Gründe der Tafeln des Chowarezmi», Bibl. math., F. 3, Bd IV, 1903, 127.
859. Suter H. Über einige noch nicht sicher gestellte Autorennamen in den Übersetzungen des Gerhard von Cremona, Bibl. math. F 3, Bd IV, 1903, 24—27.
860. Suter H. Zur Geschichte der Mathematik bei den Indern und Arabern, Verhandl. d. III. Int. Math.-Kongress in Heidelberg, Leipzig, 1904, 556—561.
861. Suter H. Zu dem Buche «De superficierum divisionibus» des Muhammed Bagdadinis, Bibl. math., F. 3, Bd VI, 1905, 321—322.
862. Suter H. Über die Bedeutung des Ausdruckes «Regula coeci», Bibl. math., F. 3, Bd VI, 1905, 112.
863. Suter H. Nachtrag zu meiner Überzetzung des Mathematiker — Verzeichnisses im Fihrist des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm, Zeitschr. für Math. u. Phys., hist.-lit. Abt., Bd 38, 1893, 126—127.
864. Suter H. Zur Frage des von Nairîzî zitierten Mathematiker Diachasimus, Bibl. math., F. 3, Bd VII, 1906/1907, 396.
865. Suter H. Über das Rechenbuch des Alî ben Ahmed el-Nasawî, Bibl. math., F. 3, Bd VII, 1906/1907, 113—119.
866. Suter H. Über den Kommentar des Muhammed ben 'Abdelbaqi zum zehnten Buche des Euclides, Bibl. math., F. 3, Bd VII, 1906/1907, 234—251.
867. Suter H. Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematiker, Bibl. math., F. 3, Bd VIII, 1907/1908, 23—36.
868. Suter H. Die Abhandlung Qostā ben Lugās und zwei andere Anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern, Bibl. math., F. 3, Bd IX, 1908/1909, 111—122.
869. Suter H. Al-Battani sive Albatenii opus astronomicum, Bibl. math., F. 3, Bd IX, 1908/1909, 83—88.
870. Suter H. Eine Indische Methode der Berechnung der Kugeloberfläche, Bibl. math., F. 3, Bd IX, 1908/1909, 196—199.
871. Suter H. Zur Trigonometrie der Araber, Bibl. math., F. 3, Bd X, 1909/1910, 156—160.
872. Suter H. Die Abhandlung des Abū Kâmil Shogā'b. Aslam «Über das Fünfeck und Zehneck», Bibl. math., F. 3, Bd X, 1909/1910, 15—42.
873. Suter H. Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kāmil el-Misri, Bibl. math., F. 3 ,Bd XI, 1910/1911, 100—120.
874. Suter H. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l-Reihan Muh. el-Biruni, Bibl. math., F. 3, Bd XI, 1910/1911, 11—78.
875. Suter H. Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von el-Hasan b. el-Hasan b. el-Haitam, Bibl. math., F. 3, Bd XII, 1911/1912, 289—332.
876. Suter H. Über die Ausmessung der Parabel von Thâbit b. Kurra al-Harrani, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 48/49, 1916/1917, 65—86.
877. Suter H. Die Abhandlungen Thâbit b. Kurras und Abû Sahl al-Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloide, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 48/49, 1916/1917, 186—227.
878. Suter H. Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrâ-

hîm b. Sinân b. Thâbit, Vierteljahrschrift d. Naturforsch. Ges. in Zürich, Bd 63, Hft 1—2, 1918, 214—228.
879. Suter H. Rezension: Ruska, Zur ältesten arabischen Algebra, Archiv f. Math. u. Phys., Bd 28, 1919, 55.
880. Suter H., Wiedemann E. (unter Mitwirkung O. Rescher). Über al-Bîrûnî und seine Schriften, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 52/53, 1920/1921, 55—96.
881. Suter H. Beiträge zu den Beziehungen Kaiser Friedrichs II, zu zeitgenössischen Gelehrten des Ostens und Westens, insbesondere zu dem arabischen Enzyclopädisten Kemâl ed-din ibn Jûnis, Abhandl. zur Gesch. d. Naturwiss. u. d. Med., Hft IV, Erlangen, 1922, 1—8.
882. Suter H. Der Kommentar des Pappus zum X Buche des Euklides aus der Abû 'Othmân al-Dimashkî ins Deutsche übertagen, Abhandl. zur Gesch. d. Naturwiss. u. d. Med., Hft IV, Erlangen, 1922, 9—78.
883. Suter H. Über die Projection der Sternbilder und der Länder von Al-Biruni, Abhandl. zur Gesch. d. Naturwiss. u. d. Med., Hft IV, 1922, 79—93.
884. Suter H. Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu'l Wefa', Abhandl. zur Gesch. d. Naturwiss. u. d. Med., Hft IV, Erlangen, 1922, 94—109.
885. Suter H. Abu'l Wefa, Encyclopädie des Islam, Bd 1, 1927, 112.
886. Tannery P. Sur l'invention de la preuve par neuf. Bull. des sci. math., t. 6, 1882, 142—144.
887. Tannery P. De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide, Mém. de la Soc. de sci. de Bordeaux, 42, 1882, 395—416.
888. Tannery P. L'extraction der racines carrés d'après Nicolas Chuquet, Bibl. math., F. 2, Bd 1, 1887, 17—21.
889. Tannery P. Notes sur la Pseudo-Geometrie de Boéce, Bibl. math, F. 3, Bd I, 1900, 39—50.
890. Tannery P. Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus?, Bibl. math., F. 3, Bd II, 1901, 9—11.
891. Tannery P. Du rôle de la musique grecque dans la développement de la mathématique pure, Bibl. math., F. 3, Bd III, 1902, 161—175.
892. Tannery P. Un traité grec d'arithmétique antérieur à Euclide, Bibl. math., F 3, Bd VI, 1905, 225—229.
893. Tannery P. Mémoires scientifiques, publ. par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen, t. I—III, Paris, 1912—1913.
894. Taton R. (ed.). La science antique et médiévale, t. I—II, Paris, 1957.
895. Thabit b. Qurra. Ein Werk über Ebene Sonnenuhren, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys. Abt. A, Bd 4, Berlin, 1936.
896. Thaer Cl. Die Elemente von Euklid nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben, Leipzig, 1936.
897. Thaer Cl. Die Euklid-Überlieferung durch at-Tûsî, Quellen u. Stud. zur Gesch. d. Math. Astron. u. Phys. Bd 3, Hft 2, Berlin, 1935, 116—121.
898. Thibaut G. The Sulvasûtra of Baudhâyana, Journ. of the As. Soc. of Bengal, vol. 9—10, 1874—1876.
899. Thibaut G. Kâtyâyanas Sulvaparisishta, Journ. of the As. Soc. of Bengal, New Series, 4, 1882.
900. Thibaut G., Dvivedi S. Pañca-siddhântikâ of Varâha-Mihira, Benares, 1889; Lahore, 1930.
901. Thibaut G. Astronomie, Astrologie und Mathematik, Strassburg, 1899.

902. Thureau-Dangin F. La méthode fausse de position et l'origine de l'algèbre, Revue d'assyriologie et d'archéologie orientale, vol. XXXV, 1938, 71—77.
903. Thureau-Dangin F. Textes mathématiques Babyloniens, Leiden, 1938.
904. Thorndike L. The study of mathematics and astronomy in the thirteenth and fourteenth centuries as illustrated by three manuscripts, Scripta math., vol. 23, 1957, No. 1—4, 67—76.
905. Treutlein P. Der Tractat des Jordanus Nemorarius «De numeris datis», Abhandl. zur Gesch. d. Math., Hft II, 1879, 132.
906. Treutlein P. Die deutsche Coss, Abhandl. zur Gesch. d. Math., Hft II, 1879, 1—124.
907. Tropfke J. Geschichte der elementaren Mathematik, Bd 1—7, Berlin—Leipzig, Aufl. 2, 1921—134; Aufl. 3, Bd 1—4, 1930—1940.
908. At-Tūsī, Nasir ad Din. Tachrīr Uklidis fī'ilm al-handasa, Teheran, 1881.
909. Unger F. Das älteste deutsche Rechenbuch, Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd 33, hist.-lit. Abt., 1888, 125—145.
910. Vacca G. Sul commento di Leonardo Pisano al libro X degli Elementi di Euclide, Boll. Unione Mat. Ital., Anno IX, No. 2, 1930.
911. Valentin G. Die beiden Euclid-Ausgaben des Jahres 1482, Bibl. math., F. 2, Bd 7, 1893, 33—38.
912. Van der Waerden B. L. Die Arithmetik der Pythagoreer, I, Math. ann., Bd 120, 1947—1949, 127—153, 676—700.
913. Van der Waerden B. L. Die Entwicklungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, Quellen und Stud. zur Gesch. d. Math., Astron. u. Phys., Abt. B, Bd 4, Berlin, 1938, 359—382.
914. Ver Eecke P. Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et la livre des nombres polygones, Bruges, 1928.
915. Vogel K. Die Näherungswerte des Archimedes für $\sqrt{3}$, Jahresbericht d. deutsch. Math.-Vereinigung, Bd 41, Heft 5—8, 1932.
916. Vogel K. Adam Riese, der deutsche Rechenmeister, Abhandl. u. Ber. d. deutsch. Museums, Jg 27, Hft 3, 1959.
917. Vogel K. Vorgriechische Mathematik, Hannover, 1958.
918. Vogel K. Beiträge zur griechischen Logistik, München, 1936.
919. Vogt H. Haben die alten Inder den Pythagorischen Lehrsatz und Irrationale gekannt? Bibl. math., F. 3, Bd VII, 1906/1907, 6—23.
920. Vogt H. Die Geometrie des Pythagoras, Bibl. math., F. 3, Bd IX, 1908/1909, 15—54.
921. Vogt H. Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts, Bibl. math., F. 3, Bd X, 1910, 97—155.
922. Wallis J. Oratio inaguralis, Oxonii, 1657.
923. Wallner C. R. Antwort auf die Anfrage 112 über den deutschen Mathematiker Andreas Alexander, Bibl. math., F. 3, Bd 4, 1903, 403.
924. Wappler E. Beitrag zur Geschichte der Mathematik, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft 5, 1889, 147—168.
925. Wappler E. Zur Geschichte der Mathematik im 15. Jahrhundert, Zeitschr. für Math. u. Phys. Bd 45, hist.-lit. Abt., 1900, 47—56.
926. Weinberg J. Die Algebra des Abū Kāmil Šoǧā' ben Aslam, München, 1935.
927. Weissenborn H. Zur Boetius-Frage, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft 2, 1879, 185.
928. Weissenborn H. Die Übersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelard von Bath nach zwei

Handschriften der Kgl. Bibliothek in Erfurt, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss., Hft 3, 1880.
929. Weissenborn H. Die Übersetzung des Euklid durch Campano und Zamberti. Eine mathematisch-historische Studie, Halle, 1882 (Rez.: M. Cantor, Zeitschr. für Math. u. Phys. hist.-lit. Abt., Bd 27, 1882, 110—111).
930. Weissenborn H. Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert, Berlin, 1892.
931. Wenrich. De auctorum Graecorum versionibus et commentariis etc., Lipsiae, 1842.
932. Wertheim G. Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet, Leipzig, 1890.
933. Wertheim G. Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln, Zeitschr. für Math. u. Phys., hist.-lit. Abt., Bd 44, 1899, 1—3.
934. Wertheim G. Über die Lösung einiger Aufgaben im «Tractatus de numeris datis» des Jordanus Nemoratius, Bibl. math. F. 3, Bd I, 1900, 417—420.
935. Wiedemann E. Zur Geschichte Abul Wefas, Zeitschr. für Math. und Phys., hist.-lit. Abt. Bd 24, 1879, 121—122.
936. Wiedemann E. Notitz über ein von Ibn al Haitam gelöstes arithmetisches Problem, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 24, 1892.
937. Wiedemann E. Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften, II—III, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 36, 1904; Bd 37, 1905.
938. Wiedemann E. Auszüge aus arabischen Enzyklopädien und Anderes, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 37, 1905, 392—455.
939. Wiedemann E. Bemerkungen zur Astronomie und Kosmographie der Araber, Sitz.d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 37, 1905, 239—245.
940. Wiedemann E. Über Wagen bei den Arabern, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 37, 1905, 388—391.
941. Wiedemann E. Über arabische Auszüge aus der Schrift des Archimedes über die schwimmenden Körper, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 38, 1906, 152—162.
942. Wiedemann E. Zur Mechanik und Technik bei den Arabern, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 38, 1906, 1—56.
943. Wiedemann E. Über Bestimmung der spezifischen Gewichte, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 38, 1906, 163—194.
944. Wiedemann E. Zur Technik bei den Arabern, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 38, 1906, 307—357
945. Wiedemann E. Ibn al Haitam, ein arabischer Gelehrter, Festschrift für J. Rosenthal, Leipzig, 1906.
946. Wiedemann E. Auszügen aus arabischen Enzyklopädien und Anderes, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 37, 1905, 392—455.
947. Wiedemann E. Über eine Schrift von Ibn al-Haitam «Über die Beschaffenheit der Schatten», Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 39, 1907, 226—248.
948. Wiedemann E. Über die Reflexion und Umbiegung des Lichtes, Jahrbuch für Photographie, Bd 21, 1907, 38—44.
949. Wiedemann E. Über al Fârâbîs Aufzählung der Wissenschaften (De scientiis), Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 39, 1907, 74—101.
950. Wiedemann E. Über die Arithmetik nach Ibn al-Afkânî, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 40, 1908, 29—37.

951. W i e d e m a n n E. Kleinere Arbeiten von Ibn al Haiṯam, Sitz. d. phys.-med., Soz. in Erlangen, Bd 41, 1908, 1—25.
952. W i e d e m a n n E. Über Lampen und Uhren, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 39, 1907, 200—225.
953. W i e d e m a n n E. Über die Bestimmungen der Zusammensetzung von Legierungen, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 40, 1908, 105—132.
954. Über die Lehre vom Schwimmen, die Hebelgesetze und die Konstruktion des Qarasṭûn, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 40, 1908, 133—159.
955. W i e d e m a n n E. Über die Geometrie und Arithmetik nach Mafâtîḥ al 'Ulûm, Sitz. der phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 40, 1908, 1—28.
956. W i e d e m a n n E. Bestimmungen des Erdumfanges von al Bêrûnî, Archiv für Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd 1, Leipzig, 1908/1909, 66—69.
957. W i e d e m a n n E. Anschauungen der Muslime über die Gestalt der Erde, Archiv für Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd I, Leipzig, 1908/1909.
958. W i e d e m a n n E. Anschauungen der Araber über die Bewegung der Erde, Mitteil. zur Gesch. d. Med. u. Naturwiss., Jg 8, 1909.
959. W i e d e m a n n E. Astronomische Instrumente, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 41, 1909, 26—78.
960. W i e d e m a n n E. Über Brechung des Lichtes in Kugeln nach Ibn al Haiṯam und Kamâl al Dîn al Fârisî, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 42, 1910, 14—58.
961. W i e d e m a n n E. Über eine astronomische Schrift von al Kindi, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 42, 1910, 294—300.
962. W i e d e m a n n E., K o h l K. Zu Ibn al Haithams Optik, Archiv für Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd 3, 1911.
963. W i e d e m a n n E. Über die Kentnisse der Muslime auf dem Gebiete der Mechanik und Hydrostatik, Archiv für Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd 2, 1910, 394—398.
964. W i e d e m a n n E. Über den Sextant des al-Chogendi, Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd 2, 1910.
965. W i e d e m a n n E. Zu den optischen Kenntnissen von Quṭb al Dîn al Schîrâzî, Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik, Bd 3, 1911, 187—193.
966. W i e d e m a n n E. Über das Leben von al-Haitham und al-Kindi, Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik, Bd 3, 1911.
967. W i e d e m a n n E. Über einen astrologischen Tractat von al-Kindi, Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd 3, 1911, 224—226.
968. W i e d e m m a n E. Stücke aus den Mafâtîḥ al-'Ulûm, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd. 42, 1910, 303—322.
969. W i e d e m a n n E. Über Wert von Edelsteinen bei den Muslimen, Der Islam, Bd 2, 1911, 345—358.
970. W i e d e m a n n E. Ibn al Haitams Schrift über die Sphärischen Hohlspiegel, Bibl. math., F. 3, Bd X, 1910.
971. W i e d e m a n n E. Die Schrift über den Qarasṭûn, Bibl. math., F. 3, Bd XII, 1911/1912, 21—39.
972. W i e d e m a n n E. Zirkel zur Bestimmung der Gebetszeiten, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 52/53, 1920/1921, 122—125.
973. W i e d e m a n n E. Biographie von al-Bêrûnî nach Ibn-abi Usaibi'a, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 44, 1912, 117—118.
974. W i e d e m a n n E. Ein Instrument dass die Bewegung von Sonne und Mond darstellt, nach al Bîrûnî, Der Islam, Bd 4, 1913, 5—13.

975. W i e d e m a n n E. Über optische Fächungen nach Fahr al Dîn al Râzî und Nasîr al Dîn al Tûsî, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 45, 1913, 154—167.
976. W i e d e m a n n E. Avicenna's Lehre vom Regenbogen nach seinem Werke al-Schifa, Meteorol. Zeitschr., Hft 11, 1913.
977. W i e d e m a n n E. Über die Verbreitung der Bestimmungen des spezifischen Gewichte nach Bîrûnî, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 45, 1913, 31—34.
978. W i e d e m a n n E. Über Musikautomaten,Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 46, 1914, 17—26.
979. W i e d e m a n n E. Theorie des Regenbogens von Ibn al Haitam, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 46, 1914, 39—56.
980. W i e d e m a n n E., W ü r s c h m i d t J. Über die Camera obscura bei Ibn al Haitam, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, 1914, Bd 46, 155—169.
981. W i e d e m a n n E., H a u s e r F. Über die Uhren im Bereich der islamischen Kultur, Nova Acta Leop.-Carol. Deutsch. Acad. d. Naturforsch., Bd. 100, No. 5, Halle, 1915.
982. W i e d e m a n n E. Über die Wage des Wechseins von al Châsini und über die Lehre von Proportionen nach al-Bîrûnî, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 48/49, 1916/1917, 1—15.
983. W i e d e m a n n E., F r a n k J. (unter Mitwirkung von D. M. Horten) Allgemeine Betrachtungen von al Bîrûnî in einem Werk über die Astrolabien, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 52/53, 1922, 97—121.
984. W i e d e m a n n E. Zu den magischen Quadraten, Der Islam, Bd 8, 1918.
985. W i e d e m a n n E. Bestimmung der Durchmesser der um und in regelmäßige Vielecke beschriebenen Kreise und des Inhaltes von Flächen und Körpern, sowie Stücke einer Lehre al Gabr wa'l Muqâbala, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 50/51, 1918/1919, 264—271.
986. W i e d e m a n n E. Definitionen verschiedener Wissenschaften und über diese verfaβte Werke, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 50/51, 1918/1919, 1—32.
987. W i e d e m a n n E. Al Farghani. Über Herstellung des Astrolabs und über den auf dieses bezüglichen Beweis, Das Weltall, Bd 20, 1919, 21—24.
988. W i e d e m a n n E. Einleitung zu arabischen astronomischen Werken, Mitteilung 2, Das Weltall, Bd 20, Hft 15/16, 1919.
989. W i e d e m a n n E. Die Naturwissenschaft im islamischen Mittelalter, Der Neue Orient, Bd 5, 1919, 52.
990. W i e d e m a n n E. Über Thâbit ben Qurra, sein Leben und Wirken, Sitz. d. phys.-med. Soz. in Erlangen, Bd 52/53, 1920/21, 189—219.
991. W i e d e m a n n E., F r a n k J. Ueber die Konstruktion der Schattenlinien von Tâbit ibn Qurra, Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-fys. Medd., IV, 9, Köbenhavn, 1922.
992. W i e d e m a n n E. Über ein von Avicenna hergestelltes Beobachtungsinstrument, Zeitschr. für Instrumentenkunde, Bd 45, 1925, 269—275.
993. W i e d e m a n n E. Über eine besondere Art des Gesellschaftsrechnungs nach Ibn al Haitam, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 58/59, 1926/1927, 191—202.
994. W i e d e m a n n E. Zu der Redaktion von Euklids Elementen durch Nasîr al Dîn al Tûsî, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 58/59, 1926/1927, 228—236.

995. W i e d e m a n n E. Über arabische astronomische Instrumente, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 58/59, 1926/1927, 380—381.
996. W i e d e m a n n E. Avicenna's Schrift über ein von ihm ersonnenes Beobachtungsinstrument, Acta orientalia, XI_5, 1926, 81.
997. W i e d e m a n n E. Über eine Schrift über die Bewegung des Rollens und die Beziehung zwischen dem Geraden und Gekrümmten von Qutb. al Dîn Mahmûd b. Mas'ûd al Schîrâsî, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 58/59, 1926/1927, 219—224.
998. W i e d e m a n n E. Einleitung zu dem astronomischen Teil des Kitâb al-Schifâ, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 58/59, 1926/1927, 225—227.
999. W i e d e m a n n E. Zum Leben von Nasîr al Dîn al Tûsî, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 58/59, 1926/1927, 363—379.
1000. W i e d e m a n n E. Al-Khudjandi, Encyclopeadia des Islam, Bd II, Leiden — Leipzig, 1927.
1001. W i e d e m a n n E., F r a n k J. Die Gebetszeiten im Islam, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 58/59, 1926/1927, 1—32.
1002. W i e d e m a n n E. Ibn al Schâtir ein arabischer Astronom aus dem 14. Jahrhundert, Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 60, 1928, 317.
1003. W i e d e m a n n E. Nasîr al Dîn al Tûsî. Sitz. d. phys.-med. Soz. zu Erlangen, Bd 60, 1928, 218—316.
1004. W i e l e i t n e r H. Die Erbteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musâ Alchwârazmi, Zeitschr. für. math. u. naturwiss. Unterricht, Bd 53, 1922, 57—67.
1005. W i e l e i t n e r H. Zur muslimischen und aegyptischen Gleichungsauflösung, Archivio di storia di sci., vol. VI, No. 1, 1925, 46—48.
1006. W i e l e i t n e r H. Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimal Methoden bis zum Beginn des 17. Jahrhunderts, Quellen und Stud. zur Gesch. d. Math. Astr. u. Phys., Bd I, 1931, 201—220.
1007. W i n t e r H. Y. J., A r a f a t W. The Algebra of 'Umar Khayyam, Journ. of As. Soc. of Bengal, vol. 16, 1950, 27—77.
1008. W i n t e r H. Y. J. Formative influences in Islamic Science, Archives Int. d'Hist. des Sci., t. 32, N 23—24, Avril — Sept. 1953, 171—192.
1009. W i n t e r H. Y. J. The optical researches of Ibn al-Haitham, Gentaurus, 1954, vol. 3, No. 3, 190—210.
1010. W i n t e r H. Y. J. Muslim mechanics and mechanical appliances, The Islamic Review, March, 1956, 14—16.
1011. W o e p c k e F. L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, Paris, 1851.
1012. W o e p c k e F. Notice sur une théorie ajoutée par Thabit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des grecs, Jeourn. as., sér. 4, t. 20, Paris, 1852, oct.—nov., 420—429.
1013. W o e p c k e F. Extrait du Fakhrî, précédé d'un mémoire sur l'Algèbre indéterminée chez les arabes, Paris, 1853.
1014. W o e p c k e F. Notice sur notation algébrique employées par les arabes, Journ. as. sér. 5, t. 4, 1854, oct.—nov., 348—384.
1015. W o e p c k e F. Discussion de deux méthodes arabes pour détérminer une valeur approchée de sin 1°, Journ. de math. pures et appl. t. XIX, 1854, 153—176.
1016. W o e p c k e F. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométrique par Aboûl-Wafâ, Journ. as., sér. 5, t. 5, 1855, 218—265.
1017. W o e p c k e F. Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles, Mém. prés. par divers savants à l'Acad. de Sci., t. 14, Paris, 1856, 658—720.
1018. W o e p c k e F. Traduction du traité d'arithmétique d'Aboul Haçan

Alî ben Mohammed Alkalçâdî, Atti dell'Accad. Pontif. dei Nuovi Lincei, t. XII, Roma 1859.
1019. W o e p c k e F Sur une mesure de la circonférence du cercle due aux astronomes et fondée sur un calcul d'Aboul Wafa, Journ. as. sér. 5, t. 15, 1860, 281—320.
1020. W o e p c k e F. Notice sur quelques manuscrits arabes relatifs aux mathématiques et récemment acquis par la Bibl. Impériale, Journ. as., sér. 5, t. 12, 1862.
1021. W o e p c k e F Mémoire sur la propagation des chiffres indiens, Journ. as., sér. 6, t. 1, 1863, 492—500.
1022. W o e p c k e F. Mémoire sur l'introduction de l'arithmétique indienne en occident, Journ. as., sér. 5, t. 13, 1863, 69—79, 514—529.
1023. W o e p c k e F. Passages relatifs à des sommations des séries des cubes extraits des deux manuscrits arabes, Ann. di math. pura et appl., t. 6, 1864, 225—248.
1024. W o e p c k e F Notice sur la traduction arabes des deux ouvrages perdus d'Euclide, Journ. as., sér. 4, t. 18, sept.-oct., 1851, 217—247.
1025. W o e p c k e F. Introduction au calcul gobari et hawai, Atti dell'accad. Pontif. dei Nuovi Lincei, t. XIX? Roma, 1866.
1026. W o e p c k e F. Trois traites arabes sur le compas parfait, Notices et extr. des manuscrits de Bibl. Nat., t. 22, 1874, 1—147.
1027. W r i g h t R. R. Al-Biruni, The book of the introduction in the elements of astrology written in Ghasna, 1029 A. D., Text, translation, London, 1934.
1028. W u s s i n g H. Mathematik in der Antike, Leipzig, 1962.
1029. W ü s t e n f e l d F. Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI Jahrhundert, Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd 22, 1877, 1—53.
1030. Z e l l e r M. C. The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus, Ann Arbor, 1944.
1031. Z e u t h e n H. G. Die Lehre von Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen, 1886.
1032. Z e u t h e n H. G. Die geometrische Konstruktion als «Existenzbeweis» in der antiken Geometrie, Math. Ann., Bd 47, 1896, 222—228.
1033. Z e u t h e n H. G. Sur l'arithmètique géometrique des Grecs et des Indiens, Bibl. math., F. 3, Bd 5, 1904, 97—112.
1034. Z e u t h e n H. G. Sur la construction des livres arithmétiques des Eléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité, Oversight over det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. forhandlinger, 1910, No. 5, 395—435.
1035. Z e u t h e n H. G. Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles, Oversight over det Kgl. Danske vidensk. selsk. forhandlinger, 1915, No. 3—4, 333—362.
1036. Z e u t h e n H. G. Sur l'origine de l'algèbre, Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-fys. medd., II, 4, Köbenhavn,, 1919.
1037. Z i a u d d i n A h m a d. Al Biruni (His life and his works), Islamic culture, vol. V, 1931, No. 3, 343—351.
1038. Z i a u d d i n A h m a d. Al-Biruni's researches in trigonometry as given in the third book of Quanun Mas'udi, Islamic culture, vol. VI, 1932, No. 3, 363—369.
1039. Z i n n e r E. Leben und Wirken des Johannes Müller von Königsberg genannt Regiomontanus, München, 1938.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

Абу-л-Вафа ал-Бузджани 85, 86, 99, 112—117, 122, 125, 128, 131, 132, 133, 136, 137, 141, 142, 144, 147, 156, 163, 185, 299, 309, 322, 326, 328, 331, 332.
Абу Закария ал-Хассар 89, 131, 138, 146, 166, 324.
Абу Камил 83, 158, 161, 169, 171—174, 178, 179, 187, 244, 313, 315, 317, 321, 325, 327.
Абу-л-Фарадж 77.
Автолик 82, 99.
Аганис 101, 326.
Аделард из Бата 130, 266—270, 327
Аднан (Adnan A.) 306.
Александр Афродисийский 37, 286.
Александров А. Д. 288.
Алимов Н. Г. 289.
Алькуин (Alkuin) 265, 318
Амир-Моэз (Amir-Moéz A. R.) 181.
Андреас Александр (Andreas Alexandr) 273, 280, 311, 327.
Андронов И. К. 288.
ал-Ансари (ал-Афкани) 77, 104, 108, 110, 111, 129, 135, 158, 161, 313, 328.
ал-Антаки 111.
Аполлоний 11, 13, 66, 90, 97, 102, 185, 215, 267, 306, 319, 331.
Арафат ('Arafat W.) 182, 331.
Арберри (Arberry A. J.) 306.
Аренс (Ahrens W.) 306.
Ариабхатта 94, 146, 157, 309, 320.
Аристарх Самосский 11, 99.
Аристотель 11, 24, 27, 29, 37, 38, 103, 125, 210, 214, 234, 289, 295, 306, 307, 313, 314.
Арнольд (Arnold T.) 306.
Архимед 11, 12, 14, 15, 39, 87, 88, 90, 97, 99, 161, 162, 184, 196, 254, 255, 267, 289, 290, 292, 296—299, 301, 304, 305, 310, 313, 314, 318, 321, 327, 328.
Архит Тарентский 10, 16, 17, 20, 24.
Афнан (Afnan S. N.) 306.
Ахадова М. А. 103, 238.
ал-Ахвази 84, 199—209, 244, 245.
Ахмад ибн Юсуф 83.
Ахмедов А. 103.
Ахмедов Б. А. 288.
Ахмедов С. А. 129, 135, 145, 288, 302.

Бадалов М. Э. 289, 290.
ал-Багдади 193, 244, 271, 325.
Бану Муса 81, 82, 98, 99, 214, 294, 309, 313, 323, 325.
Барани (Barani S. N.) 306.
Бартольд В. В. 290.
ал-Баттани 266, 319, 325.
Бахмутская Э. Я. 290.
Баше де Мезириак (Bachet de Méziriac C. G.) 70, 275.
Башмакова И. Г 20, 290, 291, 306.
Беда (Beda Venerabilis) 265.
Беккер (Becker O.) 20, 307.
Беленицкий А. М. 291, 295, 299.
Беляев Е. В. 291.
Белл (Bell E. T.) 420.
Березкина Э. И. 145, 290.
Бергштрессер (Bergsträsser G.) 307.
Бертельс Е. Э. 291.
Бестгорн (Besthorn R. O.) 101, 307, 324.
де-Бесси (de-Bessy F.) 275.
Беха ад-Дин Амили 93, 132, 138, 139, 187, 302, 318, 320.

де-Билли (de-Billy J.) 275.
ал-Бирджанди 93.
ал-Бируни 74, 75, 81, 82, 84, 99, 111—115, 122, 153, 157, 161, 291, 292, 294—298, 300—307, 310, 312—314, 316, 317, 319—322, 325, 326, 329, 330, 332.
Бобынин В. В. 291.
Богомолов С. А. 291.
Богоутдинов А. М. 291, 295.
Боев Г П. 291, 292.
Бойер (Boyer Ch.) 308.
Бонд (Bond J. D.) 308.
Бонфис из Тараскона (Bonfils) 137, 313.
Бонкомпаньи (Boncompagni B.) 130, 271, 275, 307, 308, 311, 317
Борисов А. Я. 292.
Бортолотти (Bortolotti E. L.) 308.
Босман (Bosmans H.) 164, 308.
Боэций (Boethius) 265, 266, 274, 312, 326, 327.
Брадвардин (Bradwardinus) 281.
Браунмюль (Braunmühl A. v.) 162.
Брахмагупта 94—96, 157, 309, 322, 323.
Брёйнс (Bruins E. M.).
Бретаницкий Л. С. 292.
Брокельман (Brockelmann C.) 77.
Бубнов Н. М. 291, 292, 308.
Булатов М. С. 291.
Булгаков П. Г 291.
Бурбаки (Bourbaki N.) 8, 41, 262, 292.
Бусард (Busard H. L. L.) 308.
Бутео (Buteo J.) 267, 273, 277.
Бухнер (Buchner F.) 308.
Бхаскара 94, 95, 309.
Бьёрнбо (Björnbo A.) 270, 271, 307.
Бэкон, Роджер (Bacon R.) 267.
Бюргер (Bürger H.) 307.

Вагнер (Wagner U.) 277.
Вайман А. А. 291.
Вакка (Vacca G.) 327.
Валентэн (Valentin G.) 327.
Валлис (Wallis J.) 23, 287, 327.
Валнер (Wallner C. G.) 327.
Ван дер Варден (Van der Warden B. L.) 20, 41,43, 68, 290, 292, 327.
Ваплер (Wappler E.) 327.
Васильев А. В. 292.
Ващенко-Захарченко М. Е. 292.
Вейерштрасс (Weierstrass K.) 282.
Вейнберг (Wienberg J.) 171, 327.
Вейсенборн (Weissenborn E.) 268, 327, 328.
Венрих (Wenrich) 100.
Вёпке (Woepcke F.) 65, 76, 117, 129, 132, 134, 138, 174, 176, 182, 187, 188, 193, 194, 331, 332.
Вертгейм (Wertheim G.) 328.
Веселовский И. Н. 53, 288, 291, 293, 301.
Ветиус Валенс (Vetius Valens) 65.
Видеман (Wiedemann E.) 76, 102, 104, 107, 111, 129, 314, 315, 326, 328—331.
Видман (Widmann J.) 273, 277, 280, 311.
Виета (Viète F.) 162, 287, 308.
Вилейтнер (Wieleitner H.) 76, 164, 292, 293, 331.
де-Вильдье (de Villa Dei) 276.
Винтер (Winter H. Y. J.) 182, 331.
Волин С.Е. 293.
Володарский А. И. 292.
Воробьева М. Г 293.
Вороновский Д. Г. 292, 302.
Вуссинг (Wussing H.) 332.
ал-Вусуди 138, 187, 289.
Вюстенфельд (Wüstenfeld F.) 268, 332.
Выгодский М. Я. 293, 294, 304.
Вяткин В. Л. 293.

Галилей (Galilei G.) 44, 309.
Гангули 313.
Гандц (Gandz S.) 163, 164, 166, 312, 313.
Ганкель (Hankel H.) 79, 111, 162, 193, 268, 313.
Гартнер (Hartner W.) 313.
Гартц (Gartz J. C.) 100, 182, 313.
Гарун ар-Рашид 99.
Гейберг (Heiberg J. L.) 65, 101, 102, 194, 195, 199, 234, 293, 307, 312, 314, 324, 326.
Гелл (Hell J.) 314.
Геллер (Heller S.) 314.
Гельфанд М. Б. 293.
Гемин 101, 108, 326.
Герардо Кремонский (Gherardo Cremonese) 65, 83, 89, 101, 104, 164, 188, 267, 270, 271, 273, 279, 282, 307, 308, 310, 325.
Герберт (Gerbert) 266, 274, 292, 308.
Гёрланд (Görland A.) 313.
Герман из Каринтии (Hermann) 267.
Герон Александрийский 12, 16, 65,

67, 82, 97, 101, 169, 309, 310, 321, 328.
Герхард (Gerhardt G. J.) 313.
Гибб (Gibb H.) 313.
Гиппас 26, 312.
Гиппарх 12, 97.
Гиппократ Хиосский 10.
Гипсикл 82, 97, 99—101.
Гнеденко Б. В. 292.
Голивуд (Сакробоско, Sacrobosco J.) 276.
Гольдстейн (Goldstin B. R.) 313.
Госселен (Gosselin G.) 280, 308.
Гофман (Hofmann J. B.) 314.
Григорий из Санкт Винцента (Gregorius a Sancto Vincento) 281.
Григорьев Г. В. 294.
Григорьян А. Т. 293.
Григорян С. Н. 293, 295.
Гулямов Я. Г. 290, 293.
Гульч (Hultsch H.) 314.
Гунгер (Hunger H.) 314.
Гунрат (Hunrath K.) 314.
Гюнтер (Günther G.) 313.

ад-Даббах Дж. 294.
Давидиан (Davidian M. L.) 310.
Датта (Datta B.) 310.
Дедекинд (Dedekind R.) 39, 282.
Дейбнер (Deubner F.) 310.
Декарт (Descartes R.) 22, 23, 186, 275, 294.
Демме (Demme C.) 310.
Демокрит 11.
Депман И. Я. 293.
Джабир ибн Хайям 80, 321, 323.
ал-Джагмини 89, 91, 92, 320, 324.
ал-Джайяни 89, 251.
Джалалов Г Д. 293.
Джалилов А. 294.
ал-Джаухари 81.
ал-Джурджани 91.
Диксон (Dickson L. E.) 310.
Дильган (Dilgan H.) 182, 310.
Дильс Г 294.
ад-Димишки 83, 193, 239, 326.
Диофант 12, 23, 67, 70, 85, 97, 99, 160, 169, 177, 179, 180, 275, 310, 313, 323, 327, 328.
Д'Оож (D'Ooge M.) 310.
Дорн (Dorn B.) 310.
Дюгем (Duhem P.) 310.

Евдокс Книдский 11, 12, 38, 39, 41, 46, 255, 307, 314.
Евклид (Euclides) 11, 12, 18, 19—21, 25, 27, 31, 35, 37, 38, 41, 44—46, 50—56, 58, 59, 64, 66, 68, 69, 80—86, 88—91, 95, 97, 99, 104, 106, 107, 110, 112—115, 118, 121, 123—125, 163, 170, 181, 185, 186, 191—199, 201, 205, 208, 214—217, 222, 223, 228, 230—235, 240—242, 244, 246, 247, 250—252, 255, 256, 258, 263—268, 270—273, 281, 282, 284, 286, 287, 289, 290, 293, 294, 298—300, 305—307, 311—315, 317, 320, 323—327, 330, 332.
Евтокий 97

Жуковский В. А. 294.
Журдэн (Jourdain A.) 315.

Заборов М. А. 294.
Завадовский Ю. Н. 290, 293, 294.
Замберти (Zamberti B.) 272, 328.
Занд М. 294.
Захау (Sachau E.) 321.
Захидов В. Ю. 290, 294.
Зенон Элейский 11.
Зияуддин (Ziauddin Ahmad) 332.
Зубов В. П. 294.
Зутер (Suter H.) 65, 76, 77, 102, 103, 129, 134, 137, 158, 164, 171, 172, 271, 295, 307, 324—326.

Ибн ал-Багдади 84, 194, 195, 199, 213, 216--229, 234, 244, 246, 263.
Ибн ал-Банна 91, 138, 152, 158, 187, 248, 249, 318.
Ибн Ирак 86, 184, 317
Ибн ал-Кифти 77, 84, 100, 103, 111, 270, 315.
Ибн Лайс 87, 162, 182, 185, 196, 322.
Ибн Рушд 266.
Ибн Сина (Avicenna) 75, 88, 90, 98, 104, 106, 107, 111, 112, 114—116, 123—125, 214, 266, 289, 291, 292, 294—296, 306, 309, 318, 321, 330, 331.
Ибн Синан 83, 294, 315, 326.
Ибн Турк 79, 80, 161, 170, 321.
Ибн ал-Хаим 91, 138, 164.
Ибн ал-Хайсам 87, 89, 98, 111, 125—127, 158, 159, 162, 182, 194, 214, 230, 231, 234, 251, 254, 266, 267, 295, 297, 300, 314, 317, 324, 325, 328—331.
Ибн Халдун 187, 245, 314.
Ибн Хамза 188.
Ибн аш-Шатир 91, 316, 320.
Ибн Юнис 84, 320.

Иванов П. П. 295.
Ивс (Eves H.) 182, 312.
Икрам (Ikram P.) 315.
Иностранцев К. А. 295.
Иоанн Севильский (Joannes) 130, 146, 267, 308.
Иордан Неморарий (Jordanus Nemorarius) 273, 274, 276, 279, 296, 311, 327, 328.
Ирисов А. 295.
Исхак ибн Хунайн 83, 100, 101, 270.

Каган В. Ф. 296.
ал-Казвини 90.
Кади-заде ар-Руми 92, 93, 102, 301.
Казир (Kasir D. S.) 182, 316.
ал-Каласади 93, 131, 138, 146, 163, 187, 188, 244, 248, 249, 331.
Кампано (Campano J.) 100, 101, 195, 267—270, 272, 311, 328.
Кантор Г. (Cantor G.) 282.
Кантор М. (Cantor M.) 181, 269, 308, 311.
Кайе (Kaye G. R.) 313, 316.
Кап (Kapp A. G.) 103, 315.
Капелла (Kapella, Marcianus) 265.
ал-Караджи (ал-Кархи) 86, 126, 131, 133, 144, 156, 169, 171, 176—181, 244, 247, 248, 306, 314.
Каратеодори (Carthéodory A. P.) 307.
Кардано (Cardano G.) 23, 248, 273, 274, 279, 285, 309.
Каримов У. И. 107, 296.
Кармоди (Carmody T. L.) 309.
Карпинский (Karpinski L. C.) 164, 171, 310, 315, 316, 323.
Карпова Л. А. 296.
Карпова Л. М. 256, 301.
Карра де Во (Carra de Vaux B.) 138, 153, 308.
Кары-Ниязов Т. Н. 76, 295, 314.
Кассиодор (Cassiodorus) 265, 274.
Касири (Casiri M.) 76, 309.
Кастелли (Castelli) 44.
Касумханов Ф. А. 103, 250, 296.
ал-Каши 91, 92, 120, 129, 131, 136, 137, 141—144, 148, 151, 154, 292, 294, 296, 300, 305, 315, 316, 318.
Кеннеди (Kennedy E. S.) 76, 315—317
Кеплер (Kepler J.) 44.
Кестнер (Kästner A. G.) 267, 268, 316.
ал-Кинди 81, 111, 113, 307, 329.
Клавий (Clavius Ch.) 267, 281, 288, 312.
Кламрот (Klamroth M.) 100, 101, 111, 317.
Кларк (Clark W. E.) 309.
Клейн (Klein J.) 317.
Колмогоров А. Н. 295.
Колчин Б. А. 296.
Коль (Kohl K.) 307, 317.
Кольман Э. 295.
Кольбрук (Colebrooke H.) 309.
Котов В. Ф. 294.
Коши (Cauchy A. L.) 23.
Крамар Ф. Д. 296.
Краснова С. А. 293, 295, 296, 300, 303.
Краузе (Krause M.) 317
Крачковская В. А. 297
Крачковский И. Ю. 297
Кренков (Krenkow F.) 317
Кубесов А. К. 102, 296, 300.
Кулиева Г. З. 230, 297.
Курце (Curtze M.) 101, 130, 244, 269—271, 280, 307, 309, 310.
Куста ибн Лукка 82, 98, 99—101, 158, 159, 325.
Кутейба ибн Муслим 74.
Кутш (Kutsch W. S. J.) 317.
ал-Кухи 88, 162, 182, 185, 321, 325.
ал-Кушчи 92, 93, 131—133, 137, 141, 148, 187, 302.
Кушьяр ибн Лаббан 86, 87, 133, 134, 154, 317.
Кэджори (Cajory F.) 297.

Лагранж (Lagrange J. L.) 70.
Ландау (Landau R.) 317.
Лапшин В. И. 297.
Латынин Б. А. 297
Леви (Levey M.) 133, 317.
Леви делла Вида (Levi della Vida G.) 177, 317.
Лебедев В. И. 298.
Лей (Ley H.) 317
Лейбниц (Leibniz G. W.) 275.
Леммлейн Г. Г. 298.
Леонардо Пизанский (Leonardo Pisano) 170, 171, 174, 272—277, 279, 282—284, 311, 317, 327.
Леонов Н. И. 297
Лесли (Lesley M.) 317.
Либри (Libri G.) 164, 267, 268, 318.
Липперт (Lippert J.) 318.
Локоч (Lokotsch K.) 103, 318.
Лориа (Loria G.) 318.
Лука Пачоли (Luca Paciuolo) 193, 277—279, 281, 283—286, 323.
Лурье С. Я. 298, 299.

Люкей (Luckey P.) 76, 129, 132, 133, 136, 145, 170, 177, 247, 318.

Мавролик (Mourolico F.) 274, 287, 318.
Магавира 94.
ал-Магриби 90, 158, 187.
Майер (Mayer L. A.) 318.
Макробий (Macrobius) 265.
Мамедбейли Г Д. 76, 102, 103, 250, 297
ал-Ма'мун 75, 78, 80, 98, 99.
ал-Мансур 98.
ал-Марвази 81, 97, 150, 321.
Марр (Marre A.) 138, 139, 164, 318.
Маркс Карл 297.
Маркушевич А. И. 63, 64, 290, 298.
Маслама ал-Маджрити 307.
Массон М. Е. 298.
Матвиевская Г П. 297, 301.
ал-Махани 82, 85, 184, 196—199, 201, 244—247, 251, 253.
Махмуд Газневи 87.
Медовой М. И. 129, 132—134, 145, 298, 299.
Менелай 12, 82, 86, 88, 97, 99, 267, 307, 317
Меннингер (Menninger K.) 318.
Мец (Mez A.) 318.
Миели (Mieli A.)
Милованов В. 299.
Мишель (Michel P. H.) 318.
Мордухай-Болтовский Д. Д. 64, 294, 299.
Морочник С. Б. 299.
Мосахеб (Mossaheb G. H.) 181, 182, 318.
Муминов И. М. 297
Мухамедиев X. 103, 299.
Мюллер (Müller A.) 318.
Мюллер (Müller C.) 318.

Нагль (Nagl A.) 130, 319.
ан-Надим 77, 100, 103, 270, 324, 325.
Назиф ибн Юмн 83, 174, 194, 234, 244.
ан-Найризи 83, 100, 101, 193, 244, 253, 266, 270, 271, 307, 310, 322, 324, 325.
ан-Найсабури 90, 112, 116, 138.
Наллино (Nallino K.) 76, 319.
ан-Насави 87, 131, 134, 135, 140, 142, 144, 147, 148, 150, 152, 181, 292, 299, 325.
Натуччи (Natucci A.) 319.
Нейгебауэр (Neugebauer O.) 164, 169, 299, 319.
Нессельман (Nesselmann G. F F.) 65, 193, 319.
Никомах 12, 17, 23, 67—69, 82, 90, 97, 102, 110—112, 114, 117, 121—123, 265, 273, 274, 310, 317.
Нильсен В. А. 299.
Ньютон (Neuten I.) 136, 137, 151, 262.

Озанам (Ozanam J.)
Окреат (O'Creat) 276.
О'Лери (O'Leary D. L.) 319.
Омейяды 78.
Оре (Ore O.) 319.
Орем (Oresme N.) 281.
Ошерович Б. Я. 213.

Папп Александрийский 42, 43, 65, 66, 83, 97, 193, 239, 307, 315, 326.
Паскаль (Pascal B.) 151, 275.
Паулос 94.
Пейрбах (Peurbach G.) 273, 280.
Петросян Г. Б. 298.
Петрук (Petruck M.) 317.
Петрушевский И. П. 298.
Пигулевская Н. В. 298.
Пифагор Самосский 7, 10, 17, 18, 22, 26, 35, 42, 66, 102, 125, 305, 314, 327.
Плануд (Planud, M.) 267.
Платон 11, 28, 41, 125, 299, 314, 327.
Плуэй (Plooij E. B.) 103, 230, 250, 251, 320.
Попов Г. Н. 299.
Прокл 65, 108, 312, 323.
Птолемей, Клавдий 12, 80, 81, 83, 84, 85, 90, 96, 99, 267, 320.
Пугаченкова Г А. 298.

Раздымаха Г С. 298.
Раик А. Е. 63, 299.
Райнов Т. Н. 299.
Райт (Wright R. R. B.)
Рамус (Ramus P.) 44, 273, 278.
Ратдольд (Ratdold E.) 272, 311.
Региомонтан (Regiomontanus I.) 273, 280, 308, 310, 332.
Рейдемейстер (Reidemeister K.) 63, 320.
Рейнольдс (Reynolds R.)
Рекорд (Record R.) 280.
Ремпель Л. И. 299.
Ризе (Riese, Adam) 273, 277, 280, 310, 320, 327.
Ризлер (Risler Y. C.) 320.
Роберт Честерский (Robert) 163, 267, 315, 316.

Робертс (Roberts V.) 320.
Родэ (Rodet L.) 164, 320.
Рожанская М. М. 292, 300.
Розен В. Р. 300.
Розен (Rosen F.) 76, 163, 320.
Розенберг Ф. А. 300.
Розенфельд Б. А. 4, 66, 76, 102, 103, 113, 117, 129, 134, 135, 136, 145, 163, 181, 182, 193, 230, 250, 251, 256, 292, 295—297, 299—304, 315, 320, 324.
ван Ромен (van Roomen A.) 278, 308, 321.
Рудольф Х. (Rudolff, Chr.) 273, 280, 286, 324.
Рудольф (Rudolff G.) 280, 320, 324.
ар-Руми, см. Кади-заде.
Рушка (Ruska J.) 76, 164, 320, 321, 326.
Руффини-Горнера метод 147, 149.
Рыбников К. А. 301.

Сабит ибн Корра 82, 83, 98—101, 110, 111, 117, 118, 120, 124, 170, 214, 251, 252, 256—258, 261, 267, 270, 281, 292, 294, 301, 302, 306—309, 317—319, 321, 325, 326, 330, 331.
Сабо А. 20, 302.
Садыков Х. У. 302.
ас-Сагани 185.
Саили (Sayili A.) 79, 170, 321.
Салих Заки 188, 190, 321.
Салье М. А. 295, 302.
ас-Самарканди 89, 92, 103, 301, 310.
Сартон (Sarton G.) 77, 103, 164, 321.
Сегаль В. С. 296.
Седийо Ж. (Sedillot J.) 76, 322.
Седийо Л. (Sedillot L.-A.) 76, 181, 322.
Семенов А. А. 291, 302, 303.
Сенгупта (Sengupta P.) 322.
Сибт ал-Маридини 93, 138, 152.
ас-Сиджаванди 91, 187.
ас-Сиджизи 87, 117, 174, 182, 193, 195, 235, 239, 244.
Симон (Simon M.) 164, 323.
Симпликий 65, 101, 307.
Сингх (Singh A. N.) 310, 323.
Сираждинов С. Х. 4, 301.
Смирнова О. И. 302.
Смит (Smith D. E.) 103, 323.
Собиров Г. С. 102, 112, 129, 137, 139, 288, 300, 301.
Стевин (Stevin S.) 44, 155, 287, 321, 324.
Стори (Story W. E.) 324.
Строева Л. В. 299.
Стройк (Struik D.) 182, 303, 324.
Струве (Struwe W. W.) 324.
Субботин М. Ф. 303.
Сулливан (Sullivan Y. W. W.) 324.
Султанов Р. М. 303.
ас-Сури 89, 234.

Таннери (Tannerí R.) 101, 326.
Тарталья (Tartaglia W.) 248, 272, 273, 274, 279, 285, 288, 312.
Татон (Taton R.) 326.
ат-Тафтазани 91, 92.
Таэр (Thaer Cl.) 58, 102, 326.
Теон Александрийский 12, 65, 97, 258, 267
Теэтет Афинский 11, 27, 28, 41, 42, 44, 48, 66, 299.
Теодосий 99.
Тибо (Thibaut G.) 326.
Толстов С. П. 302.
Томсон (Thomson W.) 65, 193.
Тревер К. В. 302.
Трейтлейн (Treutlein P.) 327.
Тропфке (Tropfke J.) 327.
ат-Туси, Шараф ад-Дин Музаффар 89, 187.
ат-Туси, Мухаммад Насир ад-Дин 84, 90, 91, 93, 98, 100, 101, 102, 112, 131, 135, 144, 148, 150, 151, 194, 214, 231—235, 244, 261, 296—298, 300, 303, 308—310, 315, 324, 326, 327, 330, 331.
Тюро-Данжен (Thureau-Dangin F.) 327

Улугбек 91, 92, 102, 137, 263, 289, 290, 293, 294, 296, 298, 299, 302—305, 316, 322.
Унгер (Unger F.) 327.

Ал-Фазари 96.
Файзуллаев А. Ф. 302.
Фалес Милетский 10.
ал-Фараби 84, 104, 105, 106, 107, 112, 128, 191, 246, 303, 309, 312, 323, 328.
ал-Фаргани 81, 98, 266, 330.
Фахр ал-Мулк 176.
Феодор Киренский 10, 17, 27, 28, 99.
Ферма (Fermat P.) 23, 70, 86, 275.
дель-Ферро (del Ferro S.) 248, 273, 279.
Флюгель (Flügel G.) 312.
Фогель (Vogel K.) 314, 327.
Фогт (Vogt H.) 327.

Франк (Frank I.) 330.
Фрейман А. А. 303.
Фридлейн (Friedlein G.) 312.
Фриц (Fritz K.) 312.
Фьорини (Fiorini M.) 312.
Фюк (Fück J.) 312.

Хабиб ибн Бахриз 111.
Хадджадж ибн Юсуф ибн Матар. 80, 98—101, 307.
Хаджи Халифа 77, 312.
ал-Хазин 84, 162, 184, 209—213, 231, 244.
ал-Хазини 89, 317, 321, 330.
Хайруллаев М. М. 302.
Хайям Омар 75, 82, 85, 88, 89, 135, 147, 161, 162. 170, 181—186, 196, 209, 214, 234, 246, 251—255, 258—262, 297, 299, 301, 303—306, 310, 312, 315, 316, 318, 320, 321, 323, 331.
Халидов А. Б. 290.
Халилов З. И. 298.
Ханыков (Khanikoff N.) 317
Хатипов А. Э.-А. 303.
Хасанов Х. Х. 303.
Хассе (Hasse H.) 313.
Хаскинас (Haskins C. H.) 313.
ал-Хашими 84, 174—176.
Хис (Heath Th. L.) 59, 103, 270, 313, 314.
ал-Ходжанди 85, 329, 331.
ал-Хорезми, Абу Абд-Аллах 77, 111. 114, 116, 121, 125, 245.
ал-Хорезми, Мухаммад ибн Муса 79, 80, 81, 84, 85, 97, 98, 128, 129, 130, 131, 134, 135, 144, 146. 153, 157, 158, 161, 163—173, 177, 178, 179, 188, 191, 244, 245, 266, 267, 276, 278, 284. 293, 302—305, 307, 308, 312, 313, 315, 316, 318—320, 323, 331.
Хохгейм (Hochheim A.) 133, 314, 320, 324.
Христенсен (Christensen S. A.) 59, 309.
Хунайн ибн Исхак 98.

Цейтен Г. (Zeuthen H. G.) 9. 30, 41, 43, 59, 62, 63, 304, 307, 332.
Целлер (Zeller M. C.) 332.
Циннер (Zinner E.) 332.

Чвалина А. (Czwalina A.) 304, 310.
Челеби, Мирам 92, 304.
Черкалова Л. И. 303.
Чистяков И. И. 303.

Шаль (Chasles M.) 58, 171, 304, 309.
Шереметевский В. П. 304.
аш-Ширази 90, 112, 302, 329, 331.
Ширмер (Schirmer O.) 321.
Шишкин В. А. 303, 304.
Шнейдер С. Н. 296.
Шой (Schoy C.) 76, 322.
Шольц (Scholz H.) 313.
Шрам (Schramm M.) 313.
Шредер Л. Ю. 305.
Шриддхара 94, 293, 323.
Шталь (Stahl W. H.) 323.
Штейгмюллер (Steigmüller H.) 323.
Штейншнейдер (Steinschneider M.) 76, 103, 323.
Штек (Steck M.) 323.
Штекель (Stäckel P.) 323.
Штифель (Stifel, Michael) 23, 273, 274, 277, 280, 286, 287, 288, 324.
Штольц О. 305.
Шюке (Chuquet N.) 273, 274, 277, 278, 326.

Щеглов В. П. 304.

Эгбаль (Ikbal) 181.
Эйлер (Euler L.) 22, 23, 70, 275.
Эльгуд (Elgood E.)
Энгельс, Фридрих (Engels, Friedrich) 9, 297, 304.
Энестрём (Eneström G.) 164, 273, 310, 311.
Эпосл (Apostle H. G.) 306.
Эрани (Erani T.) 311.
Эратосфен 11, 21, 68, 78, 116, 125.

Юнге (Junge G.) 65, 271, 315.
Юсупов Н. 305.
Юханна ибн Юсуф 98, 213—216, 234, 244.
Юшкевич А. П. 4, 76, 103, 126, 129, 130, 136, 145, 164, 171, 181, 182, 250, 289, 293—295, 299, 300, 302—304, 314.

Якоб (Jacob U.) 315.
ал-Я'куби 103, 111.
Якубовский А. Ю. 299, 306.
Ямвлих 69.
Яновская С. А. 305.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
Глава I. Число и величина в Древней Греции 5
§ 1. Предпосылки развития и общая характеристика древнегреческой математики 5
Математика Древнего Египта и Вавилона 5
Математика Древней Греции 8
§ 2. Логистика 13
§ 3. Теоретическая арифметика. Учение о числе в школе Пифагора 17
Пифагор и его школа 17
Арифметика пифагорейцев 18
Теория отношений целых чисел 24
§ 4. Открытие иррациональности 25
§ 5. Геометрическая алгебра 30
Основные понятия и операции 30
Теория уравнений 33
§ 6. Общая теория отношений 35
Теория «антифайрезиса» 35
Теория отношений величин 37
§ 7. Классификация иррациональностей 41
О X книге «Начал» 41
О цели и значении книги X 58
Развитие теории иррациональных величин в греческой математике 65
§ 8. Учение о числе и величине в позднеэллинистический период 67
Общая характеристика 67
Никомах Геразский 67
Диофант Александрийский 69

Глава II. Математика на Ближнем и Среднем Востоке в средние века 72
§ 1. Вводные замечания 72
§ 2. Точные науки в странах Ближнего и Среднего Востока 76
История изучения вопроса и источники 76
О характере математических наук 77
§ 3. Математики и астрономы восточного средневековья 80
§ 4. Об индийской математике 93

§ 5. Греческое наследие 97
Переводы и комментарии 97
Переводы «Начал» Евклида и комментарии к ним 99
§ 6. Классификация наук 103
Ал-Фараби 104
Ибн Сина 106
Ал-Ансари 108
Общие замечания 108

Глава III. **Теоретическая арифметика на средневековом Востоке** 110
§ 1. Предмет теоретической арифметики и источники ее изучения 110
§ 2. Основные определения 112
§ 3. Учение об «отдельном количестве» 114
Четные и нечетные, простые и составные числа 114
§ 4. Совершенные и дружественные числа 116
§ 5. Фигурные числа 121
§ 6. Учение о «зависимом количестве». Числовые отношения и пропорции 122
§ 7. Другие вопросы теоретической арифметики 126

Глава IV. **Практическая арифметика** 128
§ 1. Вводные замечания 128
§ 2. Сочинения по практической арифметике 129
Ал-Хорезми «Об индийском счете» 129
Абу-л-Вафа «О том, что нужно знать из арифметики писцам, деловым людям и прочим лицам» 131
Кушьяр ибн Лаббан ал-Джили «О началах индийской арифметики» 133
Ал-Караджи «Достаточная книга об арифметике» 133
Ан-Насави «Достаточное об индийской арифметике» 134
Насир ад-Дин ат-Туси «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли» 135
Джамшид Гияс ад-Дин ал-Каши «Ключ арифметики» 136
Арифметические трактаты Ала ад-Дина ал-Кушчи 137
Другие арифметические сочинения 137
§ 3. Правила арифметических действий 139
Изображение чисел 139
Арифметика целых чисел 140
Арифметика дробей 153
§ 4. Некоторые практические правила 156

Глава V. **Алгебра** 160
§ 1. Общие замечания 160
§ 2. Сочинения по алгебре 163
Ал-Хорезми «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» 163
Абд-ал-Хамид ибн Турк ал-Хуттали «Логическая необходимость в смешанных уравнениях» 170
Сабит ибн Корра «Рассуждение об исследовании вопросов алгебры с помощью геометрического доказательства» 170
Абу Камил Шуджа ибн Аслам «Книга об алгебре и алмукабале» 171
Трактат ал-Хашими «О вычислении иррациональных корней» 174
Алгебраические трактаты ал-Караджи 176

Алгебраические трактаты Омара Хайяма 181
Другие алгебраические сочинения 187
§ 3. Об алгебраической символике 187
Глава VI. **Учение об иррациональностях** 191
§ 1. Вводные замечания 191
§ 2. Комментарии к книге X «Начал» Евклида 193
Комментарий Назифа ибн Юмна 194
Анонимный комментарий 195
Ал-Махани «Комментарий к десятой книге сочинения Евклида» 196
Ал-Ахвази «Комментарий введения к X книге сочинения Евклида» 199
Абу Джафар ал-Хазин «Комментарий к X книге сочинения Евклида» 209
Юханна ибн Юсуф ибн Харис «Трактат о рациональных и иррациональных величинах» 213
Ибн ал-Багдади «Трактат о соизмеримых и несоизмеримых величинах» 216
Ибн ал-Хайсам «Книга комментариев к введениям сочинения Евклида «Начала» 230
Насир ад-Дин ат-Туси «Изложение Евклида» 232
Анонимный трактат «Вычисление вычетов из X книги Евклида и общие сведения о вычислении биномиалей» 235
Анонимный трактат «О значении X книги» 239
§ 3. Некоторые выводы 244

Глава VII. **Теория отношений и расширение понятия числа** 250
§ 1. Общие замечания 250
§ 2. Критика теории отношений Евклида 250
§ 3. Теория составных отношений 255

Глава VIII. **О влиянии трудов восточных ученых на развитие математики в Европе** 264
§ 1. Средневековые европейские переводы математических сочинений 265
§ 2. Арифметика и алгебра в средневековой Европе 272
Теоретическая арифметика 273
Практическая арифметика 275
Алгебра 278
§ 3. Учение об иррациональном числе в европейской математике XII—XVII вв. 280
Литература 288
Указатель имен 332

Г. П. Матвиевская

УЧЕНИЕ О ЧИСЛЕ НА СРЕДНЕВЕКОВОМ БЛИЖНЕМ И СРЕДНЕМ ВОСТОКЕ

Редактор Д. Алиева
Художник Ю. Кученков
Художественный редактор Д. Файзирахманов
Технический редактор Г. Колесник
Корректор Т. Комиссарова

Р07651. Сдано в набор 19/IV-1967 г. Подписано к печати 23/V-1967 г.
Формат $60\times90^1/_{16}$ = 10,75 бум. л., 21,5 печ. л. Уч. изд. л. 22,8.
Изд. № 1955. Тираж 2000. Цена 1 р. 84 к.

Типография Изд-ва „Фан“ УзССР, Ташкент, ул. Черданцева 21.
Заказ № 114.
Адрес Изд-ва: ул. Гоголя, 70.

Матвиевская Г. П.

Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. (Отв. ред. акад. АН УзССР С. Х. Сираждинов). Т., «Фан», 1967.

344 стр. (Акад. наук УзССР. Ин-т математики им. В. И. Романовского).

Библиогр. стр. 321—332.

51(09).