Э. Т. Белл

ТВОРЦЫ МАТЕМАТИКИ

Предшественники современной математики

E. T. Bell

MEN OF MATHEMATICS

SIMON AND SCHUSTER · NEW YORK · 1937

Э. Т. Белл

ТВОРЦЫ МАТЕМАТИКИ

Предшественники современной математики

Пособие для учителей

Под редакцией и с дополнениями
С. Н. КИРО

МОСКВА, «ПРОСВЕЩЕНИЕ», 1979

Перевод с английского
В. Н. ТРОСТНИКОВА,
С. Н. КИРО,
Н. С. КИРО.

Белл Э. Т.

Б43 Творцы математики: Предшественники соврем. математики. Пособие для учителей. Пер. с англ. В. Н. Тростникова, С. Н. Киро, Н. С. Киро /Под ред. и с доп. С. Н. Киро. — М.: Просвещение, 1979. — 256 с., ил.

Книга состоит из оригинально задуманных и увлекательно составленных жизнеописаний великих математиков прошлого — от времен Древней Греции до середины прошлого столетия. Автор стремится нарисовать живой портрет каждого из своих героев, показать его как человека, живущего среди людей и своей деятельностью способствующего прогрессу цивилизации. Изложение, как правило, увязывается с взаимоотношениями между людьми, учеными, правителями, странами, часто проводятся сравнения деятельности ученых, оригинальное сопоставление фактов, любопытные параллели. Книга обращена к современности. В ней описывается возникновение и развитие многих основных понятий, методов, идей, сыгравших роль в формировании современной математики.

Книга иллюстрирована. Она предназначена широкому кругу читателей, интересующихся математикой и ее историей.

Б $\frac{60501\text{-}645}{103(03)\text{-}79}$ БЗ—32—12—1979 4306010000

ББК 74.262
51(09)

Гравюра А. Дюрера «Меланхолия»

Декарт

Ферма

Паскаль

Ньютон

Лейбниц

Эйлер

Лагранж

Лаплас

Монж

Фурье

Гаусс

Лобачевский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга является собранием очерков из известного сочинения видного историка математики и популяризатора науки Э. Т. Белла (1883—1960), которое впервые было издано в 1937 г. в Нью-Йорке. Оно выгодно отличается от немногочисленных, к сожалению, сочинений такого рода[1] широким подходом к освещению жизни и деятельности великих математиков прошлого, образностью и живостью языка, доступностью изложения. Автор хорошо знал математику и ее историю, был мастером своего дела. Он дает не только освещение фактов, в том числе малоизвестных, но и их увлекательное толкование. Особенно интересно то, что изложение часто увязывается с взаимоотношениями между людьми, учеными, правителями, странами. Во многих местах проводятся сравнение деятельности ученых, оригинальное сопоставление фактов, любопытные параллели. Автор стремится нарисовать живой портрет каждого из математиков, показать его как человека, живущего среди людей и своей деятельностью способствующего прогрессу цивилизации.

Сочинение Э. Т. Белла предназначалось не только тем, кто специально интересуется математикой, а прежде всего тем, кто был поражен бурным ростом науки после 1900 г.[2]. В нем описывается возникновение и развитие многих основных математических понятий, методов, идей, сыгравших большую роль в формировании современной математики, в росте и обогащении науки. В связи с этим можно указать на изложение таких тем, как число, бесконечность, множество, группа, n-мерное пространство, неевклидова геометрия, теория вероятностей. Большой интерес для широкого круга читателей может представить также освещение ряда других аспектов математики, в том числе вопросов математического анализа, математической логики, трактовка комплексных чисел, инвариантности, математической сути общей теории относительности. При этом много внимания уделяется прикладным вопросам, живительным источникам многих замечательных свершений в математике.

Однако книга — это значительно больше, чем сочинение, в котором освещаются математические вопросы, обращенные к современности. Это собрание оригинально задуманных жизнеописаний ученых, составленных с глубоким проникновением в освещение фактов, остроумно, с иронией. Большинство великих математиков вели довольно своеобразную жизнь как общественные и государственные деятели, как военные, юристы, дипломаты, преподаватели, инженеры, лица других занятий. Суть изложения — в раскрытии личности великих людей, создававших математику. Ведется оно на довольно доступном уровне, предполагающем у читателя наличие знаний, ненамного выходящих за пределы изучаемого в средней школе. Прочтя книгу Э. Т. Белла, читатель может получить

[1] Например: Prasad G. Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century: Their Lives and Their Works, 2 vols. 1933—1934, Benares; Kowalewski G. Große Mathematiker. Eine Wanderung durch die Geschichte der Mathematik vom Alertum bis zur Neuzeit, München — Berlin, 1938.

[2] Ставшей в последние десятилетия, и особенно в наши дни, важнейшей производительной силой экономического и общественного развития.

конкретное представление о наиболее значительных достижениях математической мысли со времен Древней Греции до начала XIX столетия, о важнейшем из того, что вошло в остов современной математики.

Довольно подробная общая характеристика книги, ее особенностей дана автором во введении. (В данный перевод включены лишь очерки об ученых, являющихся предшественниками современной математики.)

Автор книги — Эрик Темпл Белл родился в Абердине, в Шотландии. Обучался сначала в Англии, а затем, после переезда в 1902 г. в Соединенные Штаты Америки, поступил в Стенфордский университет и в 1904 г. окончил его, специализируясь по математике. С 1908 г. преподавал в различных университетах США. С 1921 г. был профессором в Вашингтонском и Чикагском университетах, затем в Калифорнийском технологическом институте.

Профессор Белл играл видную роль в научном мире Соединенных Штатов Америки. Он занимал посты президента Американской математической ассоциации, вице-президента Американского математического общества и Американской ассоциации содействия развитию науки, был членом Академии наук США, различных математических обществ, членом редколлегий крупных математических журналов. Его труды были удостоены премии Американского математического общества. Одним из наиболее известных его сочинений стала настоящая книга, перевод которой предлагается вниманию русского читателя.

Подбор героев книги в основном удачен. Отсутствие представителей народов Востока, вероятно, больше всего объясняется тем, что во время написания книги развитие математики на Востоке было еще сравнительно мало изучено. В русское издание включен очерк о математиках Средней Азии и Ближнего Востока эпохи средневековья; он написан редактором русского перевода.

Очерки в книге, помимо их содержания, отличаются не столько по стилю, сколько по объему. В этом отношении можно было бы пожелать большей соразмерности. Самый большой очерк посвящен Гауссу. Вероятно, в этом, может быть даже неявно, сказалось влияние Ф. Клейна, несколько переоценивавшего роль Гаусса и вообще немецких ученых в развитии математики.

Книга содержит очерк о Лобачевском, в ней говорится о Ковалевской, по ходу изложения упоминаются другие выдающиеся русские математики.

При существенной доработке первоначального перевода и приведении текста к окончательному виду редактором сделаны некоторые сокращения за счет освобождения текста от малосущественных подробностей, деталей, главным образом нематематического содержания, как правило, относящихся не к самим героям книги, а к их окружению (родственникам, друзьям, знакомым).

Сокращения также коснулись некоторых односторонних, сомнительных или тенденциозных высказываний автора фактического или методического характера. В ряде случаев редактором даны примечания к авторскому тексту[1].

Редактор не один раз читал книгу и по-английски и по-русски, работал с ней, особенно при совершенствовании перевода. Он, естественно, стремился к тому, чтобы в меру своих сил и возможностей сделать все как можно лучше. Насколько это удалось — судить читателю. Редактор был бы рад, если бы настоящее издание книги принесло пользу и доставило удовольствие всем его читателям, тем, которые ведут исследования в математике, преподают ее или просто интересуются жизнью лучших представителей рода человеческого в математике. Своими впечатлениями о том, что им понравилось больше либо меньше всего, они могли бы поделиться, написав в редакцию математики издательства «Просвещение», которая со своей стороны приложила немало усилий, чтобы книга появилась в русском переводе.

Редактор признателен сотрудникам редакции за содействие и большое внимание, проявленное ими в ходе проведения работы по изданию книги, а также профессору А. П. Юшкевичу, рецензия которого на текст первоначального русского перевода оказала помощь редактору в его работе, и профессору Г. П. Матвиевской, рецензия которой способствовала дальнейшему улучшению русского текста.

С. Н. Киро

---

[1] Они помечены цифрами. Примечания автора отмечаются звездочками.

ОТ АВТОРА

Без массы сносок невозможно было бы ссылаться на источники после каждого утверждения исторического характера на последующих страницах. Но значительная часть использованного материала взята из литературы, которая имеется лишь в крупных библиотеках, причем большинство этой литературы на иностранных языках. Для установления главных дат и важнейших событий в жизни того или иного ученого использованы некрологи, находящиеся в протоколах научных обществ, членом которых состоял этот ученый. Другие представляющие интерес детали взяты из переписки математиков и из их собраний сочинений. Кроме этих немногих специфических источников, особенно полезными были библиографические сведения и указания следующих материалов.

(1) Многочисленные исторические заметки и статьи, прореферированные в сборниках Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (отдел истории математики).

(2) Аналогичные материалы журнала «Bibliotheca Mathematica».

Только три источника имеют явно индивидуальное авторство и требуют ссылок. Описание жизни Галуа основано на классическом труде П. Дюпюи, помещенном в «Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure» (3-я серия, т. 13, 1896), и редакторском комментарии Жюля Таннери. Переписка между Вейерштрассом и Софьей Ковалевской была опубликована Миттаг-Лефлером в «Acta Mathematica» (а также частично в «Comptes rendus du 2^{me} Congrès international des Mathématiciens», Paris, 1902)[1].

Многие детали, касающиеся Гаусса, взяты из книги В. Сарториуса фон Вальтерсгаузена «Gauss zum Gedächtniss», (Leipzig, 1856).

Было бы смелым претендовать на правильность в книге каждой даты или написания собственных имен. Даты используются главным образом с целью ориентации читателя относительно времени, когда ученый сделал свои наиболее оригинальные открытия.

Мне доставляет большое удовольствие поблагодарить доктора Эдвина Хаббла и его супругу Грейс за неоценимую помощь. Хотя я несу всю полноту ответственности за каждое утверждение книги, для меня была исключительно полезной академическая критика двух специалистов в той области, в которой я не могу считать себя знатоком, и я должен сказать, что эта конструктивная критика осветила для меня многие мои недостатки. Доктор Морган Уорд тоже критиковал некоторые главы и сделал много нужных замечаний по тем вопросам, в которых он сведущ.

Наконец, я хочу поблагодарить руководство различных библиотек, любезно помогавших мне разыскивать груды редких книг и библиографических материалов. В особенности я хотел бы отметить сотрудников библиотек Стенфордского, Калифорнийского, Чикагского, Гарвардского, Броуновского, Принстонского и Йелльского университетов, библиотек Джона Крирера (Чикаго) и Калифорнийского технологического института.

Э. Т. Белл

---

[1] Новое издание: «Письма К. Вейерштрасса к Софье Ковалевской». М., 1973 (письма С. В. Ковалевской к Вейерштрассу не сохранились).

ОНИ ГОВОРЯТ...
ЧТО ОНИ ГОВОРЯТ...
ПУСТЬ ОНИ ГОВОРЯТ...

(*Афоризмы, распространенные в одном учебном заведении*)

Чистая математика в своем современном развитии может претендовать на положение наиболее оригинального творения человеческого духа. — А. Н. УАЙТХЕД («*Наука и современный мир*», 1925)

Математическая истина сама по себе не является ни простой, ни сложной, она существует. — ЭМИЛЬ ЛЕМУАН

Математик, который не является также немного поэтом, никогда не будет завершенным математиком. — КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС

Я слышал, что меня обвиняют в том, что я являюсь противником, врагом математики, которую никто не может оценить выше, чем я, ибо она завершает именно то, достижение чего отрицает меня. — ГЕТЕ

Математики похожи на влюбленных... Согласитесь с математиком в самом простом высказывании, и он выведет из него следствие, с которым вы также должны согласиться, а из этого следствия — другое. — ФОНТЕНЕЛЬ

Легче сквадрировать круг, чем обойти математика. — АВГУСТ ДЕ МОРГАН

Я сожалею, что в этой лекции мне необходимо было в такой большой мере обращаться к четырехмерной геометрии. Но я не прошу извинения, ибо я действительно не ответственен за то, что в своем фундаментальном аспекте природа четырехмерна. Вещи таковы, какие они есть... — А. Н. УАЙТХЕД («*Концепция природы*», 1920)

Число управляет миром. — ПИФАГОРЕЙЦЫ

Математика — царица наук, арифметика — царица математики. — К. Ф. ГАУСС

Таким образом можно сказать, что число управляет всем миром количественного, а четыре правила арифметики можно рассматривать как полное снаряжение математика. — ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

Различные ветви арифметики — это амбиция, ненормальность, обезображивание и очковтирательство. — ЧЕРЕПАХА — КЛОУН («*Алиса в стране чудес*»)

[Арифметика] — одна из древнейших, возможно, самая древняя отрасль человеческого знания, и в то же время наиболее глубокие тайны находятся где-то рядом с ее избитыми истинами. — Х. Д. С. СМИТ

* * *

Сочинения Платона не убеждают математика в том, что их автор был силен в геометрии... Известно, что он поощрял занятия математикой... Но если даже (во что никто не верит) над его вратами Теэтетом было написано μηδεὶσ ἀγεωμέτρητοσ εἰσίτω [«Да не войдет сюда не знающий геометрии»], это имело отношение к геометрии не больше, чем просьба не забывать приносить с собой сендвичи в надежде на хороший обед. — АВГУСТ ДЕ МОРГАН

Нет царского пути в геометрии. — МЕНЕХМ (Александру Македонскому)[1]

---

[1] Высказывание приписывается также Евклиду (как его ответ царю Птолемею).

* * *

Став членом конгресса, он изучал и почти освоил шесть книг Евклида.

Он приступил к курсу занятий, жестко дисциплинирующему мышление, с намерением усовершенствовать свои способности, особенно в овладении логикой и языком. Отсюда и его любовь к Евклиду, с книгами которого он не расставался до тех пор, пока не смог легко доказывать все предложения шести книг; он часто изучал их до поздней ночи, при свече у подушки, в то время как с полдюжины его коллег-юристов в том же помещении наполняли воздух нескончаемым храпением. — АВРААМ ЛИНКОЛЬН (*«Краткая автобиография»*, 1880)

* * *

Одна-единственная кривая, вычерченная наподобие кривой цен на хлопок, описывает все то, что едва может услышать ухо в результате исполнения сложнейшего музыкального произведения... Это, по-моему, является прекрасным доказательством могущества математики. — ЛОРД КЕЛЬВИН

* * *

Математик, оперируя множеством символов, явно имея дело с чисто формальными истинами, тем не менее может достичь бесконечно важных результатов для описания физического мира. — КАРЛ ПИРСОН

Примеры... число которых можно увеличивать *как угодно*, показывают, как трудно экспериментатору объяснять часто свои результаты без помощи математики. — ЛОРД РЕЛЕЙ

Существует еще одна причина высокой репутации математики: именно математика дает точным естественным наукам определенную меру уверенности в выводах, достичь которой без математики они не могут. — АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

Математика — это орудие, специально приспособленное для того, чтобы иметь дело с отвлеченными понятиями любого вида, и в этой области нет предела ее могуществу. По этой причине книга о современной физике, если она не сводится к простому описанию экспериментальной работы, должна быть по существу математической. — П. А. М. ДИРАК (*«Квантовая механика»*, 1930)

Когда я начал изучать Фарадея, я понял, что его метод осмысливания явлений [электромагнетизма] был также математическим, хотя и не облеченным в условную форму математических символов. Я также обнаружил, что эти методы можно выразить обычными математическими формулами и таким образом сравнить с формулами профессионалов-математиков. — ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ (*«Трактат об электричестве и магнетизме»*, 1873)

* * *

Разве математики... не имеют своих тайн и, более того, своих неприятностей и противоречий? — БЕРКЛИ

Чтобы создать здоровую философию, нужно отречься от метафизики, но быть хорошим математиком. — БЕРТРАН РАССЕЛ (*Лекция*, 1935)

Математика есть просто хорошая метафизика. — ЛОРД КЕЛЬВИН

Как это может быть, что математика, являясь после всего продуктом мышления людей, независимым от опыта, так замечательно приспособлена к объектам действительности? — АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН (1920)

Всякое *новое* в открытии является математическим по форме, ибо нет никакой другой возможной для нас путеводной нити. — Дж. ДАРВИН (1931)

Бесконечность! Ничто не двигало так глубоко человеческий разум. — ДАВИД ГИЛЬБЕРТ (1921)

Понятие бесконечности — наш величайший друг; оно также величайший враг покоя нашей мысли... Вейерштрасс научил нас верить, что мы, наконец, полностью приручили и одомашнили эту неуправляемую стихию. Однако это не так: она снова вырвалась на волю. Гильберт и Брауэр еще раз занялись ее усмирением. Надолго ли? Хочется знать! — ДЖЕЙМС ПИРПОНТ (*«Бюллетень Американского математического общества»*, 1928)

По моему мнению, математику, постольку, поскольку он является математиком, не следует поглощать внимание философией; более того, это мнение выражали многие философы. — АНРИ ЛЕБЕГ (1936)

Математика — наиболее точная наука, и ее выводы абсолютно доказуемы. Но это происходит лишь потому, что математика не *пытается* выводить абсолютные заключения. Все математические истины относительны, условны. — ЧАРЛЗ ПРОТЕУС СТЕЙНМЕТЦ (1923)

Имеется надежное для применения правило: когда математик или философствующий автор пишет с туманной утонченностью, он говорит бессмыслицу. — А. Н. УАЙТХЕД (1911)

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ

ЭТОТ РАЗДЕЛ назван *введением*, а не *предисловием* (которым он на самом деле является) в надежде, что в таком случае его прочтут и те, кто обычно пропускает предисловия, прочтут хотя бы то, что следует до первого ряда звездочек, прежде чем перейти к знакомству с некоторыми великими математиками. Прежде всего я хочу подчеркнуть, что свою книгу ни в какой степени не рассматриваю как историю математики или какую-то часть этой истории.

Жизнеописания математиков, приведенные здесь, адресованы широкому читателю, тем, кому интересно узнать, что за люди создавали *современную* математику. Наше намерение — подвести рассказ об этом к освещению некоторых основных идей, господствующих в обширных областях математики наших дней, и делать это, описывая жизнь людей, ответственных за эти идеи.

При выборе имен, включенных в книгу, применялись два критерия: важность вклада ученого в современную математику и степень интереса, который представляют чисто человеческие аспекты его жизни и характера. Некоторые математики подходят по обоим критериям, например Паскаль, Абель и Галуа; другие, как Гаусс или Кели, в основном по первому, хотя и тот и другой прожили интересную жизнь. В случаях, когда нужно было выбрать одно из нескольких более или менее равнозначных в науке имен, дело решал второй критерий, так как математики интересуют нас здесь прежде всего как люди.

В последние годы наблюдается мощный прилив всеобщего интереса к науке, особенно к физике и ее отношению к нашим быстро меняющимся философским представлениям о вселенной. Большое количество блестящих книг и статей, посвященных достижениям современной науки и написанных насколько возможно общедоступным языком, помогает сократить разрыв между профессиональными учеными и теми, жизнь которых проходит где-то вне науки. Во многих из этих публикаций, особенно в тех, которые касаются теории относительности и квантовой механики, встречаются имена, вряд ли хорошо известные широкому читателю, например Гаусс, Кели, Риман, Эрмит. Знание того, кем были эти люди, какое участие они принимали в подготовке подобного взрыву разрастания физики, начавшегося с 1900 г., оценка их богатых личных качеств позволяют увидеть поражающие достижения науки в более правильной перспективе и придать им новое значение.

Великие математики сыграли в развитии научной и философской мысли роль, вполне сравнимую с той, которую сыграли сами философы и ученые. Раскрыть основные черты этой роли путем жизнеописания выдающихся математиков на фоне господствовавших в то время проблем — задача последующих глав этой книги. Упор целиком делается на современную математику, на те великие и простые ведущие математические идеи, которые до сих пор являются жизненно важными в живой творческой науке и самой математике.

Не следует думать, что единственная функция математики — «служанки наук» — состоит лишь в том, чтобы служить естествознанию. Ведь математику называют еще и «царицей наук»! Если царица иногда как будто и заимствует что-то у других наук, то она делает это с гордостью, не просит и не принимает никаких привилегий от какой-либо более влиятельной из ее сестер — наук. Она платит за то, что получает. В математике заключены собственные свет и мудрость, кроме возможных ее применений в науке, и человеческий ум, который улавливает, что математика значит для самой себя, богато вознаграждается. Это не старая доктрина искусства ради искусства. Это искусство ради человечества. В конце концов, в общем, целью науки является не только производство — мы наделали уже немало всяких устройств; наука также исследует глубины вселенной, которые никогда, ни при каком напряжении воображения не будут посещены людьми или же не будут оказывать воздействие на наше материальное существование. Таким образом, мы уделим также внимание и некоторым вещам, которые великие математики считали достойными любовного понимания из-за их внутренней красоты.

Платон, как говорят, написал над входом в свою академию: «Да не войдет сюда не знающий геометрии». Здесь нет нужды в подобном предупреждении, однако можно дать совет, который избавит некоторых чрезмерно сознательных читателей от ненужных терзаний. Суть нашего повествования заключена в жизнеописаниях и в характеристиках личностей творцов современной математики, а не в формулах и графиках, встречающихся в тексте. Основные идеи современной математики, из которых вся она в целом, обширная и запутанно сложная, соткана усилиями тысяч тружеников, просты и универсальны; они доступны всякому человеку с обычными умственными способностями.

Лагранж считал, что математик до тех пор не поймет полностью свою собственную работу, пока не сделает ее настолько ясной, чтобы выйти на улицу и с эффектом объяснить ее первому встречному.

Разумеется, это идеал, не всегда достижимый. Но не нужно забывать, что всего лишь за несколько лет до того, как Лагранж сказал это, ньютоновский закон всемирного тяготения был непостижимой тайной даже для высокообразованных людей. Вчера закон Ньютона был общим положением, которое всякий грамотный человек считал простым и несомненным; сегодня эйнштейновская общая теория относительности находится в положении, в каком закон Ньютона был в первые десятилетия XVIII в.; завтра или послезавтра теория Эйнштейна будет казаться столь же «естественной»[1], каким вчера казался закон Ньютона. Время помогает в достижении идеала Лагранжа.

Другой великий французский математик, на своем опыте знавший, как трудно бывает иногда читателю, советовал не быть слишком добросовестным и не думать много над тем, что кажется сразу непонятным: «Идите вперед, и вера придет к вам»; короче говоря, если окажется, что какая-то формула, график, параграф покажутся слишком специальными, пропускайте их; то, что остается, достаточно содержательно.

Тем, кто изучал математику, знакомо явление «медленного прогресса», накопления материала в подсознании. Когда что-либо новое изучается впервые, детали кажутся слишком многочисленными и безнадежно запутанными, и в голове не остается соответствующего впечатления о целом. Затем, по возвращении к этому после отдыха, оказывается, что все встало на свои места, как положено, подобно проявлению фотопленки. Нечто подобное испытало на себе большинство тех, кто впервые серьезно приступал к аналитической геометрии. С другой стороны, математический анализ, цели которого хорошо понятны с самого начала, обычно схватывается быстро. Даже профессиональные математики часто бегло просматривают статьи своих коллег, чтобы получить общее представление о них, прежде чем сосредоточиться на интересующих их деталях. Поверхностное ознакомление осуждается строгими учителями, но одобряется здравым смыслом.

Какой же объем математических знаний нужен, чтобы понять *все* то, что здесь заключено (при условии, что кое-что будет мудро пропущено)? Честно говоря, я думаю, что курса математики средней школы будет достаточно. Правда, в книге часто упоминаются вещи, далеко выходящие за рамки такого курса, но при этом даются достаточные пояснения, делающие материал доступным для любого, кто учил математику в школе. Для некоторых, наиболее важных идей, рассматриваемых в связи с характеристиками их создателей, таких, как группы, пространство многих измерений, неевклидова геометрия, символическая логика, требуются даже *меньшие* знания, чем те, которые содержит курс средней школы. Все, что нужно для их понимания, — интерес к предмету и не сбитое с толку мышление. Усвоение некоторых из этих живительных идей современной математики окажется столь же освежающим,

---

[1] Это писалось более сорока лет назад и теперь относится уже к «вчера» и даже к «позавчера».

как глоток холодной воды в жаркий день, и столь же вдохновляющим, как созерцание произведения искусства.

Чтобы облегчить чтение, наиболее важные определения повторяются там, где необходимо, и время от времени даются ссылки на предыдущее.

Читать главы подряд не обязательно. Для людей с философским складом ума лучше всего начать чтение с последней главы[1]. Не считая нескольких небольших отступлений, материал изложен в хронологическом порядке.

Было бы невозможным описывать *все* работы даже только самых выдающихся из упомянутых здесь ученых; это, кстати, не принесло бы особой пользы читателю. Более того, многие из работ даже величайших математиков прошлого имеют теперь только исторический интерес и давно уже включены в более общие рассмотрения. Соответственно, в книге описываются лишь некоторые из видных новых результатов, полученных тем или иным ученым; они отобраны ввиду их оригинальности и важности в современном математическом мышлении.

Говоря о темах, отобранных для освещения, можно отметить как интересные для широкого читателя следующие: современное учение о бесконечности (главы 2, 29)[1], начала теории вероятностей (глава 5), понятие группы и его роль (глава 15), трактовка инвариантности (глава 21), неевклидова геометрия (глава 16 и часть главы 14), математические начала общей теории относительности (последняя часть главы 26), свойства обычных целых чисел (глава 4) и современное обобщение понятия числа (глава 25), смысл и польза так называемых мнимых, вроде $\sqrt{-1}$, чисел (главы 14 и 19), алгебра высказываний (глава 23). Те из читателей, которые хотят увидеть проблеск могущества математического метода, особенно в научных приложениях, будут вознаграждены, ознакомившись с тем, чем занимается математический анализ (главы 2 и 6).

Современная математика началась двумя великими продвижениями: аналитической геометрией и анализом. Первое из них оформилось в 1637 г., второе — около 1666 г., хотя общим достоянием оно стало десятилетием позже. Несмотря на то что основная идея аналитической геометрии удивительно проста, ее метод обладает такой мощью, что, используя его, рядовой семнадцатилетний юноша может сейчас доказать теоремы, которые были бы камнем преткновения для величайших древнегреческих геометров — Евклида, Архимеда, Аполлония. Декарт — человек, у которого, наконец, выкристаллизовался этот замечательный метод, — прожил особенно насыщенную и интересную жизнь.

Говоря, что Декарту мы обязаны созданием аналитической гео-

---

[1] Настоящая книга содержит перевод части сочинения Э. Т. Белла. Главы 15 и 16 в ней соответствуют главам 16 и 18 оригинального издания, его глава 15 не включена в настоящее издание. Оставшаяся часть готовится к изданию. Подзаголовок книги несколько условен.

метрии, мы не имеем в виду, что новый метод сразу в готовом виде вышел только из его рук. Многие ученые до Декарта значительно продвинулись к новому методу, но Декарту досталось сделать последний шаг и действительно превратить метод в удобный рабочий инструмент геометрического доказательства, открытия и изобретения. Но даже Декарт должен разделить славу с Ферма.

Подобные замечания касаются большинства достижений современной математики. Новое понятие может «витать в воздухе» в течение нескольких поколений, пока кто-то один, а иногда двое или трое вместе ясно не увидят существенную деталь, не замеченную предшественниками, и тогда появляется новое.

Не всегда заслуги в развитии науки оцениваются справедливо. Случается, что тот, кто первым применил новый метод более эффективно, чем его изобретатель, вознаграждается больше, чем ему следует. Так, по-видимому, произошло, например, в чрезвычайно важной области математики — в анализе. Архимед владел основным понятием предельных сумм, из которых выросло интегральное исчисление, и не только владел этим понятием, но и показал, что он мог применять его. Он использовал также в одной из своих задач метод дифференциального исчисления. Во времена Ньютона и Лейбница — в XVII в. — анализ чрезвычайно развивается. Новый метод более чем только «витал в воздухе» до того, как Ньютон и Лейбниц «приземлили» его; уже Ферма действительно владел им. Он также изобрел независимо от Декарта метод декартовой геометрии. Несмотря на несомненные факты, подобные этим, мы продолжаем следовать традиции и приписываем каждому великому предводителю то, чем, по мнению большинства, он должен был владеть, даже рискуя воздать ему немного больше, чем ему как раз следует. Приоритет после всего постепенно теряет свою возбуждающую значительность по мере того, как мы удаляемся во времени от этих людей, для которых он был горячо спорным предметом словесных сражений, пока жили они и их сторонники.

* * *

Те, кто никогда не сталкивался с профессиональным математиком, испытают скорее всего при встрече с ним удивление, так как математики менее известны широкому читателю, чем любая другая группа работников умственного труда. Математик значительно реже фигурирует в романах, чем его двоюродный брат — естествоиспытатель, и, когда он появляется на страницах романа или на экране, он подходит только для того, чтобы предстать в виде неряшливого мечтателя, полностью лишенного здравого смысла, — для комической разрядки. Но что он за человек в действительной жизни? Только узнав подробно, какого типа людьми были *великие* математики и какие они прожили жизни, мы можем постичь нелепую лживость традиционного портрета математика.

Как может показаться странным, не все великие математики были профессорами учебных заведений или университетов. Некоторые из них были профессиональными военными, другие пришли в математику из богословия, юриспруденции, медицины, а один из величайших математиков был прожженным дипломатом. Некоторые не имели профессии вообще. Еще более странно, что не все профессора математики были математиками. Но это не должно удивлять нас, когда мы подумаем о бездне между процветающим средним профессором стихосложения и поэтом, умирающим от голода на своем чердаке.

Жизнеописания, содержащиеся в этой книге, по меньшей мере внушают, что математик — такой же человек, как и кто-либо другой, а иногда терзаемый больше. В повседневной общественной жизни большинство математиков выглядят совершенно обычно. Разумеется, среди математиков есть эксцентричные личности, но их процент здесь не больше, чем среди, скажем, коммерсантов. Великие математики, как таковые, были всесторонне одаренными людьми, энергичными, темпераментными, остро интересующимися многими вещами, помимо математики, а в борьбе — в полной мере имеющими твердый характер. Как правило, они представляли неподходящие объекты для преследований, так как умели обычно постоять за себя и ответить с лихвой на вызов вызовом.

Наконец, они были гениями огромного значения и отличались от большинства своих талантливых последователей лишь непреодолимым стремлением заниматься математикой. Иногда математики обладали выдающимися административными способностями.

В своих политических воззрениях великие математики охватывали, пожалуй, весь спектр — от крайнего консерватизма до радикального либерализма. Но, вероятно, правильнее будет сказать, что в целом математики имели слабую тенденцию к левым взглядам. Их религиозные убеждения также были весьма разнообразными — от твердой веры до полного скептизма. Некоторые были догматиками и позитивно высказывались о вещах, о которых они ничего не знали; однако большинство склонно было повторять великого Лагранжа: «Я не знаю».

Еще одна характеристика, которой просили здесь коснуться некоторые писатели и артисты (в частности, из Голливуда), — интимная жизнь великих математиков.

Некоторые математики были холостяками — обычно ввиду необеспеченности, но большинство счастливо женились и воспитывали детей. Кстати говоря, их дети очень часто были весьма одаренными и становились интеллигентными людьми.

Возвращаясь на минуту к кинематографическому взгляду на математика, мы заметим, что неряшливая одежда вовсе не является его непременной принадлежностью. На протяжении всей истории математики, о которой мы располагаем достаточными сведениями, математики обращали на свою внешность ровно столько же внимания, сколько и представители любой другой численно такой же группы людей. Иные из них были щеголями, иные — неряхами; большинство вообще никак не выделялось.

Психологические особенности великих математиков — предмет немалого интереса. В одной из последующих глав Пуанкаре расскажет нам о психологии математического творчества. Но, вообще говоря, по этому поводу трудно что-либо утверждать, пока психологи не договорятся между собой, что́ в их науке что́ означает. В общем, великие математики жили более полной, более зрелой жизнью, чем великие люди, занятые обычной деятельностью. Но эту полноту нельзя считать следствием интеллектуального авантюризма. Некоторые великие математики стали неистовыми спорщиками и полемистами. Многие познали жажду битвы в расцвете своих лет — чувство не очень похвальное, но, несомненно, вполне человеческое.

В этой связи нужно сказать, что в результате прочтения нескольких жизнеописаний, содержащихся ниже, можно подумать, что математики представляют собой порядочных сутяг. Проследив за судьбой некоторых названных в книге ученых, можно прийти к заключению, что у великого математика должны найтись более важные дела, чем размышления о возможной краже его открытий, о недооценке его работ другими учеными, о недостаточном воздании почестей или чем борьба за возвращение воображаемых прав. Кажется странным, что люди, которые должны были бы быть выше мелких ссор, жертвовали своим временем ради того, чтобы вести дипломатическую борьбу за приоритет в открытиях и обвинять своих соперников в плагиате. Но, хотя мы встретим достаточно нечестности, чтобы расстаться с предрассудком, будто бы правдоискательство всегда делает человека правдивым, мы не найдем никаких подтверждений предположения о том, что математика делает человека сварливым и раздражительным.

Другая «психологическая» деталь подобного сорта еще более существенна. Зависть имеет свойство пробиваться до самого высокого уровня. Узкий национализм и международное соперничество, даже в области чистой математики, сильно затемняют истинную историю открытий и изобретений: в некоторых очень важных случаях почти невозможно установить факты или сформировать правильную оценку значения трудов того или иного ученого для современного мышления. Расовый фанатизм также усложнил задачу всякого, кто пытался дать беспристрастную оценку жизни и значение деятельности ученого, не принадлежащего к его собственной расе или нации[1].

* * *

Даже ограничивая свое внимание только современной фазой развития математики, мы сталкиваемся с проблемой выбора, которую необходимо как-то разрешить. Перед тем как указать, какое решение принято в этой книге, интересно оценить количество

[1] Это писалось с осуждением под непосредственным впечатлением от разгула фашизма после его прихода в 1933 г. к власти в Германии.

труда, требующееся для написания детальной истории математики, по шкале, подобной той, которая используется при написании политической истории любой важной эпохи, например эпохи Великой французской революции или гражданской войны в Соединенных Штатах.

Распутывая какую-нибудь нить истории математики, мы очень скоро начинаем испытывать странное чувство, будто математика есть огромный некрополь, постоянно пополняющийся покойниками для вечного сохранения. Попавшие в этот некрополь совсем недавно, как и те, кто находится в нем уже 5000 лет, располагаются так, что кажутся полностью сохранившими жизненные силы такими, какими они были до их смерти; действительно, создается иллюзия, что они все еще не прекратили жить. Обольщение столь естественно, что даже самый скептически настроенный археолог, войдя в этот мавзолей, присоединился бы к мнению живущих сегодня математиков, что математические истины бессмертны, не подвержены тлению и остаются одинаковыми вчера, сегодня и вечно. Они принимают форму вечных истин, и проблеск изменчивости едва ли схватывается при всех повторяющихся циклах рождения, смерти и распада поколений. Возможно, это именно так; таково мнение многих математиков, особенно старшего поколения.

Поэтому даже тот, кто довольно бегло знакомится с историей математики, скоро оказывается подавленным ужасающей массой математических открытий, которые все еще сохраняют свою жизненность и важное значение для современной деятельности, в отличие от прошлых открытий в других науках, теряющих свое значение спустя столетия или десятки столетий.

Что же касается множества тех, кто внес хотя бы один несомненный вклад в математику, то оно велико: считают, что шесть или восемь тысяч имен не подлежат забвению.

Такая проблема едва проявляется при описании развития естественных наук. Эти науки также зародились в древние времена, но для большинства из них промежуток в 350 лет охватывает все важное для современного мышления. А всякий, кто попытается вынести полное беспристрастное суждение о математике и математиках, столкнется с отрезком времени в 6000 лет и с шестью или восемью тысячами апеллирующих к нему имен.

Проблема становится еще более безнадежной, когда мы приближаемся к нашим дням. Это связано отнюдь не с тем, что трудно судить о людях, которые близки к нам по времени, а с общепризнанным всеми математиками фактом, что XIX век с его продолжением в XX был и является величайшей из известных миру эпох в математике. Сделанное в математике славной античной Грецией и в XIX в. сопоставимо с мерцанием копеечной свечи рядом с праздничным костром.

Какие же нити могут помочь нам пройти по лабиринту математических открытий? Главная нить была уже указана выше: она ведет от полузабытого прошлого к главенствующим концепциям, управляющим теперь безграничной математической империей, — концепциям, которые сами могут завтра уступить место другим, еще более общим. Следуя этой основной нити, мы будем предпочитать тех, *кто изобретал*, тем, *кто развивал*.

Разумеется, как изобретатели, так и люди, совершенствующие открытое, необходимы для прогресса всякой науки. Каждый исследователь должен иметь не только предшественников, но и последователей, возвещающих миру об его открытиях. Но для большинства человечества, справедливо это или нет, исследователь, первым указавший путь к науке, является более привлекательной личностью, даже если он продвинулся вперед лишь на полшага. Мы будем предпочитать изобретателей улучшателям. К счастью, справедливость не пострадает при этом: большинство великих изобретателей в математике сами же доводили сделанное до совершенства.

Даже и с этим ограничением путь от былого к настоящему не всегда оказывается ясным для тех, кто еще не следовал по нему. Поэтому мы кратко укажем здесь, что является главным ключом во всей истории математики.

С древнейших времен математика развивалась под воздействием двух противоположных, иногда помогающих друг другу тенденций. Суть их можно примерно охарактеризовать понятиями *дискретное* и *непрерывное*.

Дискретное стремится описать всю природу и всю математику атомистически, в терминах раздельных, индивидуально различимых элементов, вроде кирпичей, составляющих стену, или же чисел 1, 2, 3, ... Непрерывное старается постичь такие явления природы, как движение планеты по орбите, электрический ток, повышение и понижение уровня при приливах и отливах и огромное количество других, которые заставляют нас думать, что мы познаем природу в духе утверждения Гераклита: «Все течет». Сегодня, как мы увидим в заключительной главе, понятие «поток», как и его эквивалент — «непрерывность», стало настолько неясным, что почти лишилось смысла. Однако оставим это пока в стороне.

Интуитивно мы *чувствуем*, что *понимаем* значение слов «непрерывное движение», скажем движение птицы или пули в воздухе, падение капли дождя. Это движение *плавно*, оно *совершается без рывков, неразрывно*. Для понятия *непрерывности* движения, или, более общо, непрерывности как таковой, *индивидуализированные* числа 1, 2, 3, ... *не* являются подходящим математическим образом. Все точки на отрезке прямой линии, например, не обладают столь четко выраженной индивидуальностью, как числа последовательности 1, 2, 3, ..., в которой *шаг от каждого числа к следующему за ним является одним и тем же* (именно 1; $1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 1 = 4$ и т. д.), так как *между* любыми двумя точками отрезка прямой, независимо от того, насколько близко расположены эти точки, всегда можно *найти* или по крайней мере *вообразить еще одну* точку: здесь *нет «самого короткого» шага от данной точки к* *«следующей»*. Действительно, при этом *следующей* точки нет вообще.

Понятие *непрерывности*, «отсутствия следующего элемента», развитое Ньютоном, Лейбницем и их последователями, ведет в безграничную область анализа (*дифференциального и интегрального исчисления*) и его бесчисленных применений в науке и технике, ко всему тому, что сегодня носит название математический анализ. Другое понятие — *дискретного*, базирующееся на последовательности 1, 2, 3, ..., охватывается алгеброй, теорией чисел и символической логикой. Геометрия включает и то и другое — непрерывное и дискретное.

Главная задача математики теперь — установить гармонию непрерывного и дискретного, включить их в одну всеобъемлющую математику и исключить неясности обоих.

* * *

Возможно, несправедливо по отношению к нашим предшественникам сосредоточиваться на современном математическом мышлении, давая лишь краткие ссылки на тех пионеров, которые сделали первые и, может быть, самые трудные шаги. Однако почти все полезное, сделанное в математике до XVII в., имеет две следующие особенности: или оно столь упрощено, что является сейчас составной частью элементарного школьного курса, или уже давно поглощено как частность в трудах большей общности.

Многие вещи, которые кажутся нам теперь чрезвычайно простыми, подсказываемыми обычным здравым смыслом, например позиционная система записи чисел и введение знака для обозначения нуля, что явилось существенным заключительным моментом для нее, изобрести было необычайно трудно. Даже более простые понятия, заключающие в себе самую сущность математического мышления, — *абстракция* и *общность* — требовали столетий борьбы, чтобы утвердиться и оформиться, а их создатели исчезли, не оставив ни следа своей жизни, своей личности. Как заметил Бертран Рассел, «потребовалось множество веков для открытия того, что пара фазанов и пара дней, то и другое, являются примерами числа два». Кстати говоря, понадобились примерно двадцать пять столетий *цивилизации*, чтобы сформировалось расселовское логическое определение числа «два» или другого кардинального числа (об этом говорится в заключительной главе).

То же можно сказать о понятии точки, которое кажется нам (ошибочно) абсолютно понятным при первом ознакомлении с геометрией в школе, а значительно позже в жизни человека представляется удивительным созданием воображения. Гораций Лэмб — английский ученый в области математической физики — предлагал «воздвигнуть памятник неизвестному математику — изобретателю математической точки как высшего типа той абстракции, которая является необходимым условием научного исследования с самого его начала».

Между прочим, кто же все-таки *изобрел* математическую точку?

В одном смысле это мог быть лэмбовский «неизвестный»; в другом — Евклид с его определением «Точка есть то, что не имеет частей и не имеет величины»; в третьем — Декарт, который ввел в математику «координаты точки»; развитие понятия привело к тому, что сейчас таинственная «точка» стала столь же забытой, как и ее изобретатель, и уступила место гораздо более удобному в геометрии представлению — *совокупности чисел, записанных в определенном порядке.*

Последнее представляет современный пример абстрактности и точности, к которым постоянно стремится математика, причем нужно понимать, что все повышающиеся требования к абстрактности и точности вытекают из повышающихся требований к ясности. Наше собственное представление о «точке», несомненно, разовьется во что-то еще более абстрактное. Действительно, «числа», с помощью которых описываются теперь точки, в начале этого века растворились в голубом мерцании чистой логики, которая, в свою очередь, кажется почти исчезающей в чем-то более разреженном и столь же менее вещественном.

Нельзя утверждать, что следование шаг за шагом нашим предшественникам является надежным путем понимания как их, так и нашей собственной концепции математики. Безусловно, такое повторение пути, который привел к нашим современным взглядам, представляло бы само по себе большой интерес. Но сподручнее оглянуться на местность, с той высоты, на которой мы теперь стоим. Ложные шаги, кривые следы в пути, которые ни к чему не привели, блекнут на расстоянии, и нашему взору предстают лишь широкие столбовые дороги, ведущие прямо назад в прошлое, в котором мы теряем их в тумане неопределенности и предположений. Ни пространство, ни число, ни даже время не имели того смысла, как для нас, для тех людей, чьи великие фигуры просвечивают через туман веков.

Пифагореец, живший в VI в. до н. э, мог сказать: «Благословите нас, святые числа, порождающие богов и людей»; кантианец XIX столетия уверенно обращался к «пространству», но как к форме существования «чистой интуиции»; теоретик-астроном не так давно мог заявить, что великий творец вселенной является чистым математиком. Во всех этих высказываниях самым замечательным является то, что люди, которые были не глупее нас, некогда вкладывали в них какой-то смысл.

Для современного математика подобные всеобъемлющие обобщения ничего не значат. Но, расставшись с претензиями на то, чтобы быть общей создательницей богов и людей, математика приобрела нечто более существенное: веру в себя и свою способность производить человеческие ценности.

Наша точка зрения изменилась и продолжает изменяться. Декарт заявлял: «Дайте мне пространство и движение, и я предоставлю вам мир». Эйнштейн мог бы возразить, что потребовано слишком много и этот запрос фактически бессмыслен: без «мира», т. е. материи, нет ни «пространства», ни «движения». А чтобы уничтожить сложный и путаный мистицизм Лейбница, возникший в XVII в. из-за таинственного $\sqrt{-1}$, Гамильтон в 1840-х годах ввел пары чисел, доступные разумению любого умного ребенка, обеспечивающие для математики, для науки все то, что когда-либо давали плохо названные «мнимые числа». Мистическое «не существующее» Лейбница из XVII в. превратилось в «существующее» и стало столь же простым, как буквы алфавита.

Но не теряем ли мы чего-нибудь? Не теряет ли современный математик что-нибудь значительное, когда он с помощью аксиоматического метода ищет следы того неясного «чувства», которое описал Генрих Герц, открывший электромагнитные волны: «Трудно избежать чувства, что эти математические формулы ведут независимое существование и имеют свой собственный интеллект, что они мудрее нас, мудрее даже своих создателей, что мы извлекаем из них больше, чем вначале было в них вложено»?

Любой сведущий математик понимает «чувство» Герца, и все же он склонен считать, что, в то время как материки и электромагнитные волны *открываются*, динамо-машина и математика *изобретаются* и служат тому, чему мы заставляем их служить. Мы все еще можем мечтать, но нам уже определенно не нужны привидения. Если верно высказывание Чарлза Дарвина, что «математика кажется наделяющей человека чем-то подобным новому чувству», то это чувство является возвышенным здравым смыслом, а им-то и объявлял математику физик и инженер лорд Кельвин.

Не ближе ли к нашему образу мышления утверждение Галилея, что «великая книга природы написана математическими символами», чем слова Платона: «Бог руководствуется геометрией» или Якоби: «Бог руководствуется арифметикой»? *Если*, как утверждал Пифагор, «число управляет миром», то число является лишь нашим представителем на троне, ибо мы управляем числом.

Когда математик нашего времени отвлекается на минуту от своих символов, чтобы сообщить другим о чувстве, порождаемом в нем математикой, он может процитировать Бертрана Рассела: «Математика, рассматриваемая правильно, владеет не только истиной, но и высшей красотой — красотой холодной и строгой, подобной красоте скульптуры, без всякой апелляции к слабостям нашей натуры, без этих задрапированных капканов живописи и музыки, красотой величественно чистой, обладающей таким совершенством, которое свойственно лишь величайшему искусству».

Другой, знакомый с тем, что произошло с пониманием математической «истины» в годы, последовавшие после того, как Рассел восхвалял красоту математики, может ссылаться на «железное терпение», которое требуется для понимания того, что означает математика, и процитировать строки Джеймса Томсона (приведенные в конце книги), обращенные к гравюре Дюрера «Меланхолия» (воспроизведенной в начале этой книги). И коль скоро его будут упрекать в том, что он потратил свою жизнь на то, что многим кажется личной погоней за красотой, не находя непосредственного отражения в деятельности своих коллег, он может повторить слова Пуанкаре: «Математика ради математики! Многих шокирует эта формулировка, но она все же столь хороша, как и фраза «жизнь ради жизни», если не понимать под жизнью прозябание»[1].

* * *

Чтобы оценить, чего достигла современная математика по сравнению с древней, стоит сравнить объем работы, проделанной до 1800 г. и после него. Наиболее подробную историю математики написал Мориц Кантор; его «Geschichte der Mathematik» — это три больших тома, напечатанных мелким шрифтом (его сотрудники дополнили их четвертым томом). Все четыре книги содержат около 3600 страниц. Кантором дана лишь общая линия развития; он не делал никаких попыток вдаваться в детали описываемых результатов или объяснить специальные понятия с такой степенью полноты, чтобы непрофессионал мог понять, о чем идет речь; биографии у него лишь слегка очерчены; у читателя предполагаются некоторые предварительные знания. Этот труд охватывает математику *до 1799 г.*, как раз до того, как современная математика начала себя свободно чувствовать. Что представляло бы собой подобное описание истории математики XIX в.? Она потребовала бы 19 или 20 томов такого размера, как у Кантора, скажем около 17 000 страниц. XIX век по этой шкале внес в математику такие знания, которые по объему *превосходят примерно в пять раз* знания, добытые за всю предыдущую историю человечества.

Период до 1800 г., не имеющий начала, естественным образом делится на два подпериода. Граница проходит около 1700 г., ее проложил главным образом Исаак Ньютон (1642—1727). Крупнейшим соперником Ньютона в математике был Лейбниц (1646—1716). Согласно Лейбницу, во всей математике, созданной вплоть до времени Ньютона, наиболее важная часть принадлежит самому Ньютону. Эта высокая оценка отражает скорее силу общих методов Ньютона, чем количественную сторону его труда; «Начала» Ньютона до сих пор считаются наиболее мощным вкладом в научную мысль, сделанным когда-либо одним человеком.

Отступая во времени от 1700 г., мы не находим там ничего сравнимого с золотым веком Древней Греции — с шагом, сделанным около 2000 лет тому назад[2]. За 600 г. до н. э. мы быстро погружаемся во мрак, снова некоторое время прорезаемый светом в Древнем Египте. Наконец, мы различаем около 2000 г. до н. э. первую великую эпоху математики в долине Евфрата.

---

[1] Теоретическое и прикладное значение математики широко известно. Объектом математики, как писал Энгельс, являются «пространственные формы и количественные отношения действительного мира». Отражение этих форм и отношений с течением времени обобщается (см. примечание редактора на с. 28).

[2] Средние века на Востоке (Китай, Индия, Средняя Азия, Ближний Восток) отмечены большими успехами в области арифметики, алгебры, тригонометрии.

Потомки шумеров, жившие в Вавилоне, вероятно, были первыми «современными» математиками; их подход к решению алгебраических уравнений больше пронизан духом алгебры, чем все, что делалось в течение золотого века Греции. Но более важным достижением древних вавилонян, чем алгебраическая техника, было, как показывают их работы, осознание необходимости *доказательства* в математике. До недавнего времени считалось, что эту необходимость первыми поняли древние греки. Это был один из самых важных шагов, когда-либо сделанных людьми. К сожалению, из-за его давности следы теряются вне пределов нашей цивилизации до того, как древние греки стали сознательно ему следовать и хорошо представили его. Они не были особенно благородными по отношению к своим предшественникам.

Итак, математика насчитывает четыре великих периода: вавилонский, греческий, ньютоновский (чтобы дать название периоду около 1700 г.) и современный, начавшийся в 1800 г. и продолжающийся сейчас. Компетентные ценители назвали последний период золотым веком математики[1].

Сегодня математическое изобретение (открытие, если для вас это предпочтительней) продвигается значительно энергичнее, чем когда-либо. Видимо, единственное, что может остановить его развитие, — это общее крушение того, что нам нравится называть цивилизацией. Если оно произойдет, математика может «уйти в подполье» на столетия, как это было после упадка Вавилона; но если история повторяется, как принято говорить, то мы можем рассчитывать на бурное возрождение математики, более свежее и чистое, чем когда-либо, спустя много времени после того, как мы со всеми нелепостями нашего времени будем забыты[2].

---

[1] Такая периодизация, по существу, односторонняя, недостаточно отражает особенности развития математики.

Со времени своего появления в 1938 г., несколько совершенствуясь и видоизменяясь в дальнейшем, распространилась периодизация истории развития математики, предложенная А. Н. Колмогоровым. В ней такие периоды. Первый— зарождение математики (Египет, Вавилон до VI в. до н. э.). Второй — период элементарной математики (Древняя Греция, эллинистическая и римская эпоха, Китай, Индия, Средняя Азия и Ближний Восток, Западная Европа до XVI в., Россия до XVIII в), развитие математики постоянных величин. Третий — период создания математики переменных величин (XVII—XVIII вв.), затем — современная математика (XIX—XX вв.) с присущей ей далеко идущей абстрактностью в трактовке пространственных форм и количественных отношений действительного мира. Вероятно, можно считать, что с середины текущего столетия после появления электронных вычислительных машин начал формироваться новый период математики с характерным для него резким возрастанием значения учения о дискретном и алгоритмах.

[2] Это писалось во время разгула фашизма. Несмотря на громадные бедствия развязанной им второй мировой войны, после победного для сил мира и прогресса ее завершения, в чем решающую роль сыграл героический подвиг советского народа, математика продолжала дальше развиваться, особенно бурно в связи с созданием электронных вычислительных машин, во многом предопределивших характер происходящей ныне научно-технической революции. Математика при этом значительно обогатилась и изменилась, вновь помолодела.

ГЛАВА ВТОРАЯ

СОВРЕМЕННАЯ МЫСЛЬ ДРЕВНИХ

ЗЕНОН (490?—430? до н. э.), ЕВДОКС (408—355 до н. э.), АРХИМЕД (287—212 до н. э.)

... слава — это Греция,
величие же — это Рим. — Э. А. ПО

ЧТОБЫ ОЦЕНИТЬ наш теперешний золотой век математики, полезно вспомнить о нескольких великих и простых ключевых идеях, созданных гением древних и используемых нами сейчас. Мы бросим взгляд на жизнь и труды трех эллинов: Зенона (490?—430? до н. э.), Евдокса (408—355 до н. э.) и Архимеда (287—212 до н. э.). Евклид будет упомянут много позже, когда пойдет речь о его главном сочинении.

Зенон и Евдокс были представителями двух резко противоположных школ в математике: критически-деструктивной и критически-конструктивной. Оба были проникнуты столь же сильным критицизмом, как и их последователи в XIX и XX столетиях новой эры. Точнее, следует сказать наоборот: Кронекер (1823—1891) и Брауэр (1881—1966), современные критики математического анализа — теорий бесконечного и непрерывного, — уходят в древность к Зенону, а создатели современных теорий непрерывности и бесконечного Вейерштрасс (1815—1897), Дедекинд (1831—1916) и Кантор (1845—1918) являются интеллектуальными современниками Евдокса.

Архимед — величайший ум древности современен до мозга костей. Из всех античных мыслителей только Архимед обычно думал с такой полной свободой, какую позволяют себе математики теперь, получая в готовом виде все, что было приобретено в течение 25 столетий, чтобы сглаживать свой путь. Только он был достаточно велик и силен, чтобы смело перешагнуть через все препятствия, воздвигнутые на пути математического прогресса напуганными геометрами, которые слушались философов[1].

В любом списке трех величайших математиков мировой истории неизбежно фигурирует имя Архимеда. В качестве двух других

[1] Использование понятий движения и бесконечности ввиду их противоречивости (см. далее с. 33—34) античная философия, особенно в лице Платона, считала неправомочным при строгих рассуждениях.

обычно называют Ньютона (1642—1727) и Гаусса (1777—1855). Некоторые, учитывая общий уровень развития науки тех лет, когда жили и работали эти гиганты, ставят Архимеда на первое место.

Позади названных трех предтеч современной математической эры маячит полумифическая фигура Пифагора (596?—500? до н. э.) — мистика, математика, естествоиспытателя, «на одну десятую гения, на девять десятых выдумки». Его биография стала легендой, полной невероятных преувеличений его талантов; для истории математики представляет интерес лишь то обстоятельство, что, как можно заключить, анализируя его окутанные в туман числовой мистики высказывания, он много путешествовал по Египту, многому научился там у жрецов и еще больше принял на веру, затем посетил Вавилон и там проделал то же самое, наконец, основал в Кротоне, в Южной Италии, тайное общество для высоких математических размышлений и туманных духовных, моральных и этических спекуляций. В результате всего он внес в математику два величайших за всю ее историю вклада.

До Пифагора не было ясного понимания того, что *доказательство* должно следовать из *предположений*. По сложившейся традиции считается, что Пифагор был первым европейцем, который настаивал на выборе в геометрии некоторых *аксиом*, или *постулатов*, и на последующем построении высказываний с помощью дедуктивного рассуждения, опирающегося на эти постулаты.

Таким образом, Пифагор ввел в математику *доказательство*[1]. Это было его величайшим достижением. До него геометрия была скорее собранием эмпирически установленных правил, без какихлибо ясных указаний на их взаимную связь и без малейшего предположения, что эти правила можно логически вывести из сравнительно небольшого числа постулатов. Метод доказательства настолько пронизывает сейчас всю математику, что кажется подразумевающимся сам собой, и нам трудно представить себе период, когда этого метода еще не было.

Второй выдающийся вклад в математику Пифагора связан с исключительно важной проблемой. Это было открытие того факта, что *целых чисел* 1, 2, 3, ... *недостаточно для математических построений* даже в таких примитивных формах, которые были известны в то время. Это показалось ему унизительным и ужасным, так как прежде он с убежденностью пророка проповедовал, что всю природу, всю вселенную, *все на свете* можно свести к *дискретному набору целых* чисел и истолковать в терминах целых чисел. Одно-единственное математическое противоречие мгновенно разрушило дискретную философию, математику и метафизику Пифагора. Но, не в пример другим ученым, он в конце концов признал свое поражение — после длительной отчаянной борьбы против открытия, которое отрицало символ его веры.

[1] Первые доказательства теорем приписываются Фалесу (624?—547 до н. э).

Вот что нанесло страшный удар теории Пифагора: невозможно найти два таких целых числа, чтобы квадрат одного из них был вдвое больше квадрата другого. Это можно доказать с помощью чрезвычайно простых рассуждений, доступных любому, кто изучал алгебру хотя бы несколько недель* или просто понимает элементарную математику. Пифагор действительно нашел камень преткновения в геометрии: отношение стороны квадрата к его диагонали не может выражаться в виде отношения двух целых чисел. Это утверждение эквивалентно только что приведенному утверждению о квадратах целых чисел. Употребляя другой язык, мы можем сказать, что корень квадратный из числа 2 *иррационален*, т. е. не является ни целым числом, ни отношением двух целых чисел. Так, даже простейшее геометрическое понятие диагонали квадрата подорвало могущество чисел 1, 2, 3, ... и опрокинуло философию Пифагора. Мы легко можем построить диагональ *геометрически, но мы не сможем измерить ее с помощью конечного числа шагов*. Эта невозможность неизбежно приводит к появлению иррациональных чисел и бесконечных процессов в математике. Квадратный корень из двух можно вычислить с любой степенью точности (до любого десятичного знака) с помощью простых операций или более сильных методов, изучаемых в школе, но в получаемой при этом десятичной дроби цифры не начнут с какого-то момента повторяться (как при десятичной записи числа $^1/_7$) и будут идти одна за другой без конца. Своим открытием Пифагор выявил исток современного математического анализа.

Следствия, вытекающие из этой простой задачи, до сих пор не облечены в такую форму, которая считалась бы приемлемой для всех математиков. Они касаются математических понятий бесконечного (неограниченного, неисчислимого), предела и непрерывности — понятий, которые составляют стержень современного анализа. Время от времени парадоксы и софизмы, проникающие в математику вместе с этими, несомненно, необходимыми понятиями, объявляются окончательно устраненными, но только для того, чтобы через одно или два поколения снова появиться в слегка измененном виде. Они живее, чем что-либо другое, подводят нас к математике наших дней. Вот весьма простая и интуитивно очевидная схема:

---

* Пусть $a^2 = 2b^2$. Без ограничения общности можно предположить, что целые числа a и b не имеют общих делителей, кроме единицы (если бы они существовали, можно было бы произвести сокращение). Если a — *нечетное* число, мы сразу же приходим к противоречию, так как $2b^2$ четно. Если a *четно* и равно $2c$, тогда $4c^2 = 2b^2$, или $2c^2 = b^2$, так что и b должно быть *четным*, откуда следует, что a и b имеют общий делитель 2, а это противоречит предположению.

Рассмотрим отрезок прямой длиной в две единицы меры (например, в 2 м). Его можно представить себе как результат «непрерывного» движения «точки». Слова, взятые в кавычки, как раз и скрывают в себе основную трудность. Не анализируя их, мы можем убедить себя в том, будто бы отлично понимаем их значение. Теперь пометим левый конец отрезка числом 0, а правый его конец — числом 2. Середина всего отрезка, разумеется, будет помечена числом 1; середина отрезка от 0 до 1 будет помечена числом $^1/_2$, от 0 до $^1/_2$ — числом $^1/_4$ и т. д. Точно так же между 1 и 2 сделаем пометку $1\,^1/_2$ и т. д. Продолжая этот процесс в том же духе, мы нанесем метки $^1/_3$, $^2/_3$, $1\,^1/_3$, $1\,^2/_3$, ... и затем разобьем каждый из полученных отрезков на более мелкие равные отрезки. В конце концов, «мысленно», мы получим обозначения для *всех* таких точек, расположенных между 0 и 2; это будут *все рациональные числа от 0 до 2*. Их — бесчисленное множество. «Покроют» ли они полностью отрезок? Нет. Какой из этих точек соответствует корень квадратный из двух? Никакой, ибо этот корень не может быть получен делением *какого-либо* целого числа на другое целое число. Но $\sqrt{2}$, несомненно, является «числом»; представляющая его точка лежит где-то между точками, помеченными 1,41 и 1,42, и мы можем определить ее положение настолько точно, насколько захотим. Чтобы покрыть весь наш отрезок полностью, мы вынуждены представить себе бесконечное множество «чисел», более обширное, чем множество рациональных чисел. Это имеет место, если мы принимаем, что отрезок *непрерывен*, и *постулируем*, что каждой его точке соответствует одно и только одно «действительное число». Такого же рода представление можно ввести для плоскости и далее, но в данный момент для нас достаточно этого.

Простые задачи, подобные рассмотренной, ведут к серьезным трудностям. По отношению к этим трудностям греки, как и мы теперь, разделялись на две непримиримые группы. Одна из них остановилась на своем математическом пути и отказалась двигаться дальше к анализу, к интегральному исчислению, о котором мы еще будем говорить. Другая пыталась преодолеть трудности и преуспевала в том, что убеждала себя в их преодолении. Те, кто остановился, допустили немного ошибок, но зато и добыли мало истин. Те, кто продолжал движение, открыли многое, имеющее высочайший интерес для математики и рационального мышления вообще. Правда, кое-что из этого может подвергаться разрушительной критике точно так, как это случилось в наше время. С самых давних времен мы различаем эти два различных, антагонистических типа ума: разумно осторожный, пятящийся назад, поскольку почва колеблется под ногами, и свойственный более смелым пионерам-первооткрывателям, прыгающим в пучину, чтобы добыть сокровища. Сначала взглянем на одного из тех, кто отказался прыгать. Равного ему по изощренности мышления мы встретим только в XX в., когда дойдем до Брауэра.

З е н о н Э л е й с к и й (490?—430? до н. э.) был другом философа Парменида. Посетив Афины со своим покровителем, он вывел из себя философов тем, что установил четыре невинных парадокса, которые они не смогли объяснить. Говорят, Зенон был деревенским самоучкой. Не пытаясь решить, какова была цель выдвижения парадоксов Зеноном, — по этому поводу мнения специалистов широко расходятся[1], — мы только сформулируем их. После этого станет достаточно ясным, что Зенон противился «бесконечно продолжаемому делению нашего двухмерного отрезка». Это явствует из двух первых парадоксов — *дихотомии* и *Ахиллеса*. Последние два, однако, показывают, что Зенон возражал в равной степени и против *обратного* предположения, а именно, что отрезок *не* является «бесконечно делимым», но состоит из *дискретного* множества точек, которые можно занумеровать числами 1, 2, 3 и т. д. Все четыре парадокса вместе образуют железную стену, за которой прогресс кажется невозможным.

1. *Дихотомия.* Движение невозможно, так как, что бы ни двигалось, оно *прежде*, чем достигнуть конца пути, должно достигнуть его середины, а еще *раньше* этого должно достигнуть одной четвертой пути и так далее — без *конца*. Следовательно, движение не может никогда даже начаться.

2. *Ахиллес.* Бегущий Ахиллес никогда не сможет догнать ползущую перед ним черепаху, так как прежде всего он должен добежать до того места, откуда отправилась черепаха, но, пока Ахиллес сделает это, черепаха уже уползет с этого места и снова окажется впереди. Повторяя этот довод и дальше, мы заключаем, что черепаха всегда будет находиться впереди. Теперь с другой стороны.

3. *Стрела.* Движущаяся стрела в каждый момент времени либо находится в покое, либо нет, т. е. движется. Если момент времени неделим, то стрела в этот момент не может двигаться, ибо если бы она двигалась, то момент немедленно можно было бы разделить. Но если стрела не может двигаться в каждый момент, то она не может двигаться вообще, ибо время складывается из моментов. Следовательно, она всегда пребывает в покое.

4. *Стадион.* Докажем, что половина времени может быть равна двойному времени. Рассмотрим три ряда тел.

Первое положение

(*A*)	0	0	0	0
(*B*)	0	0	0	0
(*C*)	0	0	0	0

Второе положение

(*A*)		0	0	0	0	
(*B*)	0	0	0	0		
(*C*)			0	0	0	0

[1] В. И. Л е н и н указывал, что Зенон выявил реальную противоречивость движения. При этом он отмечал, что «вопрос не в том, существует ли движение, а в том, как выразить его с помощью логики понятий».

Ряд (A) неподвижен, ряды (B) и (C) движутся с равными скоростями в противоположных направлениях. К любому моменту, когда тела рядов поравняются друг с другом, число тел, встреченных рядом (B) в ряде (C), будет вдвое больше, чем в ряде (A). Следовательно, время, необходимое (B) для того, чтобы миновать (A), вдвое больше времени, уходящего на передвижение мимо (C). Но время, проходящее до момента, когда тела рядов (B) и (C) поравняются с (A), одно и то же. Следовательно, двойное время равно половине времени. Ряд (A) удобно представить круговым забором с колышками[1].

Так на нематематическом языке были впервые сформулированы некоторые трудности, к которым приводит непрерывность и бесконечность. В книгах, вышедших несколько десятков лет тому назад, говорилось, что «позитивная теория бесконечности», созданная Кантором, как и подобная ей теория «иррациональных» чисел, созданная Евдоксом, Вейерштрассом и Дедекиндом, раз и навсегда устраняет эти трудности. Такая точка зрения не является приемлемой теперь для всех школ математического мышления. Поэтому, говоря о Зеноне, мы начинаем спорить между собой. Желающие узнать о нем больше могут обратиться к сочинению Платона «Парменид». Те, кто шел за Зеноном, сделали сравнительно мало для развития математики, в то время как их последователи сделали много, чтобы потрясти ее основания.

Евдокс Книдский (408—355 до н. э.) унаследовал от Зенона страсть ко внесению смуты, но не больше. Подобно многим другим оставившим след в математике, Евдокс страдал в юности от крайней бедности. Когда жил Евдокс, Платон находился в расцвете своих сил; Аристотелю было около тридцати, когда Евдокс умер. Как Платон, так и Аристотель — ведущие философы античности — были весьма обеспокоены сомнениями, которые ввел Зенон в математические рассуждения и которые Евдокс своей теорией пропорций — «короной греческой математики» — должен был отвести вплоть до последней четверти XIX столетия.

Молодым человеком Евдокс прибыл в Афины из Тарента, где он учился вместе с Архитом (428—365 до н. э.) — первоклассным математиком, администратором и воином. Появившись в Афинах, Евдокс вскоре попал к Платону. Будучи слишком бедным, чтобы жить возле академии, Евдокс ходил туда каждый день из Пирея, где рыба и оливковое масло были дешевы и ничего не стоило найти пристанище.

Хотя Платон не был математиком в строгом смысле этого слова, его называли «создателем математиков»; нельзя отрицать, что он вдохновил многих людей, гораздо более сильных в математике, чем он сам, на создание некоторой настоящей математики. Но как мы увидим, его общее влияние на развитие математики было, ве-

[1] А ряды (B) и (C) — круговыми цепочками бегунов на стадионе.

роятно, губительным. Платон уяснил, что представляет собой Евдокс, и стал его преданным другом, пока не начал проявлять нечто вроде зависти к своему блестящему протеже. Говорят, Платон и Евдокс совершили совместное путешествие в Египет. Если это так, то Евдокс, кажется, был менее доверчив, чем его предшественник Пифагор, в то время как Платон вобрал немало восточной мистики чисел. Убедившись в своей непопулярности в Афинах, Евдокс в конце концов осел в Кизике, где провел свои последние годы. Он изучал медицину и, говорят, кроме математики, занимался врачеванием и законодательством. Считая, что всего этого недостаточно для занятий одного человека, он предпринял еще серьезное изучение астрономии, в которую внес значительный вклад. Как ученый, он был на столетия впереди своих приверженных к философским словопрениям современников. Подобно Галилею и Ньютону, он презирал бесплодные спекуляции о физической вселенной, которые невозможно проверить наблюдением и опытом. Если бы, поднявшись к Солнцу, говорил он, можно было бы исследовать его природу, форму и размеры, он рад был бы разделить судьбу Фаэтона, но до тех пор он не вправе строить догадки.

Некоторое представление о том, что сделал Евдокс, можно извлечь из очень простой задачи. Чтобы найти площадь прямоугольника, мы умножаем длину на ширину. Хотя это утверждение звучит понятно, оно представляет большие трудности, как только обе стороны не выражаются *рациональными* числами. Оставляя в стороне эти особые трудности, мы сталкиваемся с ними в более явной форме, когда переходим к простейшим задачам нахождения длины *кривой* линии, площади *криволинейной* поверхности или объема, заключенного между *криволинейными* поверхностями.

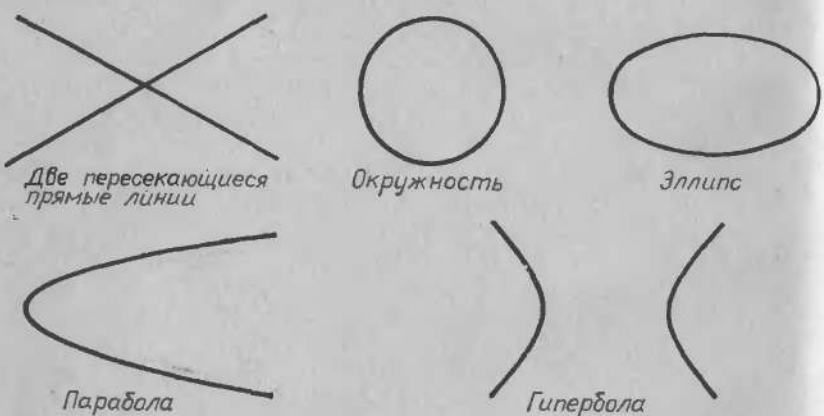
Любой юный гений, желающий испытать свои математические способности, может попытаться изобрести метод для этого. Представим, что он никогда не изучал этих вещей в школе. Как он приступил бы к строгому выводу формулы для длины окружности произвольного радиуса? Каждого, кто сделает это совершенно самостоятельно, можно справедливо провозгласить математиком первого ранга. Как только мы отрываемся от фигур, ограниченных *прямыми* и *плоскостями*, мы попадаем в мир, наполненный проблемами непрерывности, загадками бесконечности и лабиринтами иррациональных чисел. Евдокс придумал первый логически удовлетворительный метод, воспроизведенный Евклидом в V книге его «Начал», для трактовки всех этих проблем. Своим *методом исчерпывания*, примененным к отысканию площадей и объемов, Евдокс показал, что нет необходимости предполагать существование «бесконечно малых величин». Для целей математики достаточно уметь получить величину, *сколь угодно малую*, путем последовательного деления данной величины.

Расставаясь с Евдоксом, мы сформулируем его эпохальное определение равенства отношений, которое позволило математикам трактовать иррациональные числа столь же строго, как и рациональные. По существу, это определение было отправным пунктом современной теории иррациональных чисел.

«Говорят, что первая из четырех величин имеет *то же самое отношение* ко второй, какое третья имеет к четвертой, если, какие бы равнократные *первой* и *третьей* и какие бы равнократные *второй* и *четвертой* ни были взяты, кратное *первой* будет больше, равно или меньше, чем кратное *второй*, соответственно тому, будет ли кратное *третьей* больше, равно или меньше, чем кратное *четвертой*».

Из древних греков, которые еще не были названы и чьи труды оказали влияние на математику после 1600 г., заслуживает упоминания только Аполлоний (260?—170? до н. э.). Он развивал геометрию в духе Евклида — в том духе, в каком ей все еще обучают начинающих, — но продвинулся значительно дальше Евклида (330?—275? до н. э.). Как геометр этого типа — *синтетический*, «чистый» геометр, — Аполлоний не имел равных вплоть до Штейнера, жившего в XIX столетии.

Если круговой конус, простирающийся до бесконечности в обе стороны от вершины, пересечь плоскостью, в сечении получится кривая, называемая коническим сечением. Существует пять возможных типов конического сечения: эллипс; гипербола, состоя-



щая из двух ветвей; парабола — траектория пули в пустоте; окружность; пара пересекающихся прямых[1]. *Эллипс*, *парабола* и *гипербола*, согласно терминологии Платона, являются «механическими кривыми»; это значит, что их нельзя построить с помощью только циркуля и линейки, хотя эти приспособления легко позволяют построить любое число точек, лежащих на названных кривых. Геометрия конических сечений достигла высокой степени совершенства

[1] Последние два сечения являются, соответственно, частными случаями первых двух, так что, по существу, число типов сводится к трем.

благодаря Аполлонию и его последователям: она оказалась чрезвычайно важной в небесной механике XVII и следующих столетий. Действительно, если бы древнегреческие геометры не предшествовали Кеплеру, то вряд ли Ньютону удалось бы установить свой закон всемирного тяготения, опирающийся на кеплеровские тщательные вычисления планетных орбит.

У поздних эллинов и средневековых арабов Архимед вызывал такой же благоговейный трепет, как Гаусс у своих современников и последователей в XIX в., а Ньютон — у ученых XVII и XVIII вв.

Архимед был неоспоримым вождем всех их, «стариком», «мудрецом», «мастером», «великим геометром». Напоминаем, что он жил с 287 по 212 г. до н. э. От Плутарха мы узнаем о жизни Архимеда. В гибели Архимеда мы видим начало разрушения великих ценностей грубо практической цивилизацией — падение утонченной Греции под натиском опьяненного победой над Карфагеном, гордого своей доблестью Рима.

Архимед был аристократ духом и телом. Сын астронома Фидия, он родился в Сиракузах, в Сицилии, и был, как говорят, родственником Гиерона II — сиракузского тирана (царя). Во всяком случае, он был на короткой ноге с Гиероном и с его сыном Гелоном, которые оба восхищались Королем математиков. Его глубоко аристократическая натура проявлялась в отношении к тому, что мы сегодня называем прикладными науками. Хотя он был одним из величайших, если не самым великим, гением механики всех времен, он искренне презирал свои практические изобретения. С одной точки зрения он был прав. Можно написать целые книги о том, что Архимед сделал для прикладной механики, но каким бы великим ни казался нам этот вклад с нашей пристрастной к механике точки зрения, он полностью перекрывается его вкладом в чистую математику. Мы познакомимся сперва с немногими известными о нем фактами и с легендой о его личности.

По сложившейся традиции, Архимед воспринимается нами как классический музейный образец великого математика. Подобно Ньютону и Гамильтону, он оставлял нетронутой пищу, когда погружался в свои математические изыскания. В небрежности к своей одежде он даже превзошел Ньютона, так как, сделав свое знаменитое открытие о том, что тело, погруженное в жидкость, теряет в весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость, он выскочил из ванны, в которой, наблюдая за собственным, погруженным в воду телом, пришел к открытию, и побежал по улицам Сиракуз совершенно голым, крича «эврика, эврика!» (нашел, нашел!).

То, что он нашел, стало первым законом гидростатики. Согласно преданию, нечестный ювелир, делая корону для Гиерона, подмешивал к золоту серебро, и тиран, заподозрив обман, попросил Архимеда придумать что-нибудь для проверки подозрения. Любой старшеклассник знает сейчас, что эта задача решается простейшим взвешиванием и легкими арифметическими вычислениями; «закон Архимеда» и его бесчисленные практические применения теперь известны массе людей — от учащихся до кораблестроителей, а человек, который впервые открыл этот закон, обладал больше, чем здравым смыслом

Другое восклицание Архимеда, пережившее века, — «дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю». Он сам был глубоко потрясен своим открытием законов рычага, когда позволил себе некоторую хвастливость.

Архимед был своего рода одиноким орлом. Он учился некоторое время в Александрии, в Египте, где приобрел двух друзей на всю жизнь. Одним из них был Конон, одаренный математик, которого Архимед высоко ценил как ученого и как человека; другим — Эратосфен, также отличный математик, но изрядный щеголь. Эти двое, особенно Конон, кажется, были единственными людьми, с которыми Архимед делился мыслями с уверенностью, что будет понят. Некоторые из его наиболее замечательных трудов сообщались Конону в виде писем. Позже, когда Конон умер, Архимед стал переписываться с его учеником Досифеем.

Оставляя в стороне великий вклад Архимеда в астрономию и практическую механику, мы дадим беглый перечень важнейшего из сделанного им для чистой и прикладной математики.

Он нашел общие методы отыскания площадей криволинейных плоских фигур и объемов тел, ограниченных кривыми поверхностями, и применил эти методы ко многим частным случаям: к окружности, сфере, произвольному сегменту параболы, фигуре, заключенной между двумя радиусами и двумя последовательными витками спирали; к сегментам сфер, к сегментам фигур, образованных вращением прямоугольников (цилиндры), треугольников (конусы), парабол (параболоиды), гипербол (гиперболоиды) и эллипсов (эллипсоиды) относительно их главных осей[1]. Он дал метод вычисления числа π (отношение длины окружности к ее диаметру) и установил, что это число заключено между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$; он предложил также методы приближенного вычисления квадратных корней, что показывает, что он предвосхитил открытие индийцами того, что приводит к периодическим непрерывным дробям. В арифметике, далеко превзойдя неудобный греческий метод представления чисел, не позволявший изображать или даже описывать большие числа, он изобрел такую систему счисления, которая давала возможность оперировать со сколь угодно большими числами. В механике он установил некоторые основные постулаты, открыл законы рычага и применил механические принципы (закон рычага) к вычислению площадей нескольких плоских фигур и объемов тел различной формы, а также к отысканию их центров тяжести. Он со-

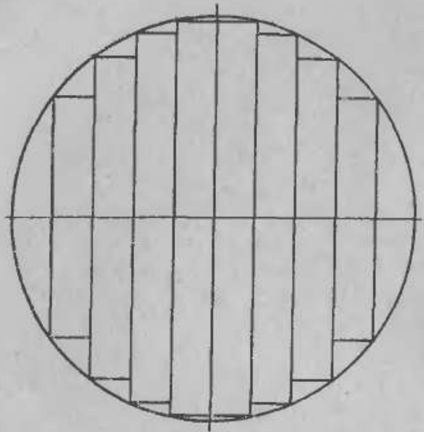
[1] Получающиеся при вращении конических сечений тела Архимед называл коноидами и сфероидами

здал науку гидростатику и применил ее к нахождению положений покоя и равновесия плавающих тел нескольких видов.

Архимед создал немало шедевров. Как это ему удалось? Его крайне скупой, логически точный стиль изложения не дает указаний о *методе*, с помощью которого он получил свои поразительные результаты. Но в 1906 г. историк древнегреческой математики И. Л. Гейберг ознакомился с сенсационной находкой — обнаруженным в Константинополе считавшимся до этого «утраченным» трактатом Архимеда, адресованном Эратосфену, — «О теоремах механики. Метод». В трактате Архимед объясняет, как, мысленно взвешивая плоскую или пространственную фигуру, площадь или объем которой неизвестны, а также фигуры с известной площадью или известным объемом, он приходил к тому, что хотел узнать, а уже потом сравнительно легко (для него) доказывал результат строго математически. Иными словами, он использовал механику для продвижения в математике. Это одно из качеств, которое убеждает в том, что мышление Архимеда было современным: *он использовал все, что подходило в качестве оружия для преодоления стоявших перед ним проблем.*

Для многих древних математика была некоей забавной игрой, которую необходимо было вести по условным правилам, установленным философским умом Платона. По Платону, в качестве инструментов геометрических построений разрешались только циркуль и линейка. Не удивительно, что многие геометры классического склада безрезультатно на протяжении столетий ломали головы над решением «трех проблем античности»: разделить угол на три части; построить куб, по объему в два раза больший данного куба; построить квадрат, равновеликий кругу. *Ни одна из этих задач не может быть решена с помощью циркуля и линейки*, и, хотя доказать это утверждение по отношению к третьей задаче трудно, оно все же было найдено в 1882 г. Все построения, выполненные с помощью других инструментов, объявлялись «механическими» и сразу же, по некоторой причине, известной только Платону и его «руководствующемуся геометрией» богу, рассматривались как крайне недостойные и строго запрещались в пользовавшейся уважением геометрии. Только тогда, когда Декарт — 1985 лет спустя после смерти Платона — опубликовал свою аналитическую геометрию, геометрия освободилась от этих предрассудков Платона. Платон умер за 60 лет до рождения Архимеда, так что, его нельзя обвинить в недооценке гибкости и силы методов Архимеда. С другой стороны, можно только вознести хвалу Архимеду за то, что он не принял установившийся жесткий пуризм Платона в отношении геометрических исследований.

Вторая обращенная к современности черта Архимеда также основывается на его методах. Предвосхищая Ньютона и Лейбница почти на 2000 лет, он подошел к изобретению интегрального исчисления, а в одной из задач предвосхитил открытие ими дифференциального исчисления. Эти два исчисления составляют вместе



то, что называется *анализом* и что следует считать наиболее мощным инструментом, когда-либо предлагавшимся математикой для изучения природы. Представим, например, что мы хотим найти площадь круга. Наряду с другими способами сделать это мы можем так: «разрезать» круг на некоторое количество параллельных полосок равной ширины, отсечь под прямым углом к полоскам их кривые концы так, чтобы отрезанные куски были возможно меньшими, и затем сложить площади всех получившихся прямоугольников. Это дает приближение к искомой площади. Увеличивая число полосок до бесконечности и взяв предел суммы площадей прямоугольников, мы получим площадь круга. Этот (грубо описанный) процесс перехода к пределу суммы называется *интегрированием*; метод проведения такого суммирования называется *интегральным исчислением*. Именно такое исчисление применил Архимед к нахождению площади сегмента параболы и к некоторым другим задачам.

Задача, в которой он подошел к *дифференциальному исчислению*, состояла в построении касательной к спирали в произвольной ее точке.

Коль скоро известен угол, образуемый касательной с некоторой данной прямой, эта касательная легко может быть построена, так как прямая, проходящая через данную точку параллельно данной прямой, строится просто. Задача же отыскания упомянутого угла (для *любой* кривой, не только для спирали) есть переведенная на язык геометрии главная задача *дифференциального* исчисления. Архимед решил эту задачу для спирали. Спираль Архимеда — это кривая, образованная точкой, движущейся равномерно вдоль прямой линии, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг фиксированной точки на этой прямой. Если кому-нибудь, кто не изучал дифференциального исчисления, задача Архимеда покажется легкой, он может попробовать решить ее самостоятельно.

Жизнь Архимеда была спокойной, какой и должна быть жизнь математика, если он хочет полностью проявить все, что в нем есть. Драматические события его жизни сконцентрировались в самом ее конце. В 212 г. до н. э. разгорелась вторая Пуническая война. Рим и Карфаген схватились не на жизнь, а на смерть. Сиракузы, родной город Архимеда, соблазнительно лежал на пути римского флота. Он был осажден. Римский военачальник Марцелл предвкушал скорую победу. Но Гиерон был другого мнения. Он хорошо подготовился к войне — значительно лучше, чем мог себе вообразить Марцелл.

Архимед, презиравший, казалось, прикладную математику, тем не менее уступал в мирное время настойчивым просьбам Гиерона и, чтобы удовлетворить тирана, показывал, что математика может в случае необходимости практически использоваться для разрушений. Чтобы убедить своего друга, что математика способна больше, чем на абстрактные дедукции, Архимед применил открытые им законы рычага и блока для умелого обращения с полностью нагруженным судном, которое он одной рукой спускал на воду. Когда тучи войны стали сгущаться над Сиракузами, Гиерон упросил Архимеда подготовить Марцеллу «достойную» встречу.

Когда римляне подошли, дьявольские изобретения Архимеда были уже в ожидании приветствовать их. Град каменных ядер, каждое из которых весило около четверти тонны, извергнулся из сверхкатапульт Архимеда. Похожие на журавлиные клювы, железные челюсти высовывались из-за городских стен, наклонялись к приближающимся кораблям, захватывали, переворачивали их и топили или разбивали о скалы. Наземное войско подверглось не лучшей участи, его также постиг разгром. Не будучи в силах заставить своих мятежных солдат предпринять новое наступление на страшные стены, знаменитый римлянин ретировался.

Марцелл захватил Мегару в тылу Сиракуз и, наконец, подкрался оттуда к Сиракузам. На этот раз удача сопутствовала ему. У сиракузян было в разгаре празднество в честь Артемиды. Разгулявшиеся сиракузяне сильно устали. Они оказались легкой добычей ворвавшихся в город убийц. Жертвой кровопролития, вместе с другими, стал и Архимед.

Первым знаком того, что город пал, была для Архимеда тень римского солдата, упавшая на чертеж, сделанный им на пыльной земле. По одной версии, солдат наступил на чертеж, и рассердившийся Архимед воскликнул: «Не порти мои окружности!» По другой, он отказался подчиниться приказу солдата идти с ним к Марцеллу, желая закончить решение задачи. Во всяком случае, солдат был разъярен, выхватил свой меч и убил безоружного семидесятипятилетнего ветерана геометрии. Так погиб Архимед.

Как заметил Уайтхед, «ни один римлянин не лишился жизни из-за того, что был слишком глубоко погружен в размышления над математическим чертежом».

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ДВОРЯНИН, ВОИН, МАТЕМАТИК

ДЕКАРТ (1596—1650)

«Геометрия» Декарта вышла в свет... в 1637 г. Это, несомненно, прочнейший памятник его славы.— Д. АРАГО

«Я ХОЧУ ЛИШЬ ПОКОЯ И ОТДЫХА». Эти слова произнес человек, которому суждено было направить математику по новому руслу и изменить ход истории науки. В своей бурной жизни Рене Декарт слишком часто испытывал стремление к покою, который пытался найти в военных лагерях, и желание отдохнуть, побуждавшее его уединиться от своих любопытных и требовательных друзей. Судьба подшутила над ним, он родился 31 марта 1596 г. в Лаэ, около Тура во Франции, в Европе, пылающей огнем войны и корчащейся в агонии религиозных и политических преобразований. Старый порядок быстро разрушался, новый еще не был установлен. Грабительское племя баронов, королей и князьков средневековья вскормило свору правителей с этикой разбойников с большой дороги в политике и в большинстве своем с интеллектом конюхов. То, что по всей справедливости было твоим, становилось моим, если я был хорошо вооружен и достаточно силен, чтобы отнять это у тебя.

На гребне волны грабительских войн во времена Декарта пылали религиозный фанатизм и нетерпимость, порождавшие новые войны и делавшие беспристрастные научные поиски крайне рискованным занятием. Ко всему этому добавлялось всеобщее неведение элементарных правил гигиены. Регулярные чумные эпидемии наряду с войнами уравновешивали высокую рождаемость и оставляли количество населения в узких границах. Таковы были «старые добрые времена».

Вместе с тем век, в котором жил Декарт, в интеллектуальном отношении был поистине одним из наиболее ярких периодов в пестрой истории цивилизации. Упоминая лишь некоторых из выдающихся людей, чьи жизни частично пересекались с жизнью Декарта, мы вспомним, что Ферма и Паскаль были его современниками в математике, что Шекспир умер, когда Декарту было 20 лет, что Декарт пережил Галилея на 8 лет и 8 лет было Ньютону в момент смерти

Декарта, что Декарту было 12, когда родился Милтон, Гарвей, открывший кровообращение, пережил Декарта на 7 лет, а Гильберт, основатель учения об электромагнетизме, умер, когда Декарту было 7 лет.

Рене Декарт принадлежал к древнему знатному роду. Хотя его отец не был богатым, его благосостояние позволяло ему готовить своих сыновей к деятельности дворян — *знатность обязывает* — на службе Франции. Рене был третьим и последним ребенком первой жены отца, Жанны Брошар, которая умерла несколько дней спустя после рождения Рене. Отец, как видно, обладал редкой добротой и сделал все, что было в его силах, чтобы дети не почувствовали резко утраты матери. У Декарта было слабое здоровье, и ту жизненную силу, которая в нем имелась, он отдавал интеллектуальной пытливости. Именно из-за неважного здоровья отец отменил для Рене обязательные уроки. Однако мальчик продолжал учиться по собственной инициативе, и отец счел благоразумным не мешать ему в этом. Когда Рене исполнилось 8 лет, отец стал подумывать о систематическом образовании сына. И после долгих размышлений он выбрал иезуитский коллеж в Ла Флеш, сочтя его идеальным учебным заведением для своего сына. Ректор, патер Шарле, с первого взгляда полюбил бледного доверчивого мальчика и занялся им особо. Понимая, что прежде, чем развить ум ребенка, необходимо укрепить его тело, ректор разрешил ему по утрам приходить в класс попозже, когда ему захочется присоединиться к своим товарищам. С тех пор в течение всей своей жизни, исключая один несчастный эпизод в самом ее конце, Декарт, если хотел продумать что-то серьезное, то оставлял это на утро. В зрелом возрасте, оглядываясь на годы учебы в Ла Флеш, Декарт утверждал, что безмолвные размышления в эти долгие спокойные утренние часы стали подлинным источником его философии и математики.

Его учение продвигалось успешно, и он получил хорошее классическое образование. Покинув коллеж в августе 1612 г. на семнадцатом году жизни, Декарт приобрел на всю жизнь друга в лице патера Шарле и был почти готов занять место в обществе. Шарле был лишь одним из многих друзей, с которыми Декарт сблизился в Ла Флеш; другой, Мерсенн (позже священник), знаменитый математик-любитель, был его старшим товарищем и стал его научным покровителем.

Яркий талант Декарта проявился с очевидностью задолго до того, как он покинул коллеж. В четырнадцатилетнем возрасте он начал подозревать, что «гуманитарные» науки, которые им преподают, являются относительно бесплодными для человечества и не представляют собой той силы, которая позволила бы людям контролировать окружающий мир и управлять своей собственной судьбой. Догмы авторитетов философии, моральные и этические рассуждения, которые нужно было слепо принимать на веру, стали казаться ему бессмысленными предрассудками. Следуя выработанной в детстве привычке не доверять никаким авторитетам, Декарт начал деликатно подвергать сомнению доказательства с ссылками на казуистическую логику, с которыми иезуиты пытались согласовать его склонности к размышлениям. Отсюда Декарт скоро пришел к фундаментальному сомнению, которое стало стимулом его деятельности на всю жизнь: как мы можем что-либо *знать?* И далее, что, возможно, еще важнее: если мы не можем определенно сказать, что знаем что-то, то каким образом мы выделим те вещи, которые мы все же способны познать?

Покинув коллеж, Декарт размышлял дальше, упорнее и отчаяннее, чем когда-либо. Первым плодом этих размышлений был еретический вывод, что сама логика — знаменитый схоластический метод средних веков, который все еще цепко удерживается в гуманитарном образовании, — бесплодна, как мул, для любой творческой задачи. Его второй вывод тесно примыкал к первому: по сравнению с доказательствами в математике, в которую он бросился, как птица в воздух, как только почувствовал за спиной крылья, доказательства в философии, этике и морали являются жалкими подделками и обманом. Но как же тогда, спрашивал он, мы узнаем что-нибудь? С помощью научного метода, хотя Декарт не называл его именно так: с помощью *проверяемого опыта* и применения строгих математических рассуждений к результатам такого опыта.

Можно спросить, что он извлек из своего рационального скептизма. Один и только один факт: «Я существую». Он сформулировал это так: «Cogito, ergo sum» — «Я мыслю, следовательно, я существую».

К 18 годам Декарт испытывал уже полное отвращение к той сухой схоластике, на изучение которой он положил столько труда. Он решил посмотреть мир и узнать, как выглядит жизнь во плоти и крови, а не на бумаге. Присоединившись к нескольким юным весельчакам-жизнелюбцам, он оставил скучное фамильное имение и поселился в Париже, где с особенным увлечением стал предаваться всем удовольствиям, которые были доступны молодому человеку его возраста и положения. Что бы он ни делал, он отдавался этому всей душой.

Это длилось недолго. Декарт вскоре снял квартиру в простом, уютном доме за городом и всецело отдался непрерывным математическим исследованиям. Но через 2 года его веселое прошлое все же нашло его, и безрассудные друзья с большим шумом нагрянули к нему. Военная служба избавила его от непрошеных гостей.

Он попал вначале в Бреду, в Голландии, чтобы учиться воинскому ремеслу под началом блистательного принца Мориса Оранского. Разочаровавшись в своих надеждах участвовать в боевых действиях под знаменами принца, Декарт почувствовал отвращение к мирной жизни лагеря, которая грозила быть копией парижской разгульной жизни. Он покинул военный лагерь и поспешил в Германию.

Декарт, как мальчишка, ловил всякий удобный случай, чтобы поглазеть на какое-нибудь пышное зрелище. На этот раз оно должно было состояться во Франкфурте, где готовилась коронация Фердинанда II. Декарт прибыл туда вовремя и вдосталь насладился спектаклем в стиле рококо. Значительно ободренный, он вернулся к своей профессии и нанялся к курфюрсту Баварии, ведшему войну против Богемии.

Армия находилась в бездействии на своих зимних квартирах близ маленькой деревни Нейбург на берегу Дуная. Декарт получил там в изобилии то, что искал: покой и отдых. Он был предоставлен самому себе и нашел себя.

История декартова «обращения», если его можно так назвать, весьма любопытна. 10 ноября 1619 г. ему приснились три ярких сна, которые, как он говорил, изменили всю его жизнь. Возникновение этих снов легко объяснить как результат подсознательного конфликта между желанием индивидуума вести интеллектуальную жизнь и сознанием ничтожности той жизни, которую он вел. Во сне Декарт видел себя наблюдающим дикий шторм беспристрастным взором ученого и заметил, что шторм, когда поймешь, каков он на самом деле, не может причинить никакого вреда.

Из сновидений Декарт, как он говорил, «вынес ощущение энтузиазма» и понял, что второй сон дает ему магический ключ к овладению бесценными сокровищами познания вселенной и раскрывает перед ним истинные основания науки.

Что же было этим чудесным ключом? Сам Декарт не говорит этого ясно, но обычно считают, что ключом было не что иное, как применение алгебры к геометрии, короче говоря, аналитическая геометрия, или, в более общем смысле, исследование явлений природы с помощью математики, наиболее развитым примером чего теперь является математическая физика.

Таким образом, 10 ноября 1619 г. можно считать официальным днем рождения аналитической геометрии, а следовательно, и современной математики. Но опубликован метод был только через 18 лет. Тем временем Декарт продолжал нести свою военную службу. Математики должны вознести хвалу Марсу за то, что ни одно шальное ядро не оторвало Декарту голову в Пражской битве. Многие подающие надежду молодые математики почти 3 столетия спустя были менее удачливыми в деле развития науки, чем Декарт.

Как никогда раньше, 23-летний воин был теперь убежден, что если он хочет найти истину, то должен прежде всего категорически отвергнуть все идеи, предлагавшиеся ему другими, и полагаться только на собственный ум. Все знания, почерпнутые от авторитетов, должны быть отброшены в сторону, вся внушенная ему система морали и духовных идей должна быть разрушена до основания — только в этом случае в нем заговорит простая, живучая, земная сила здравого смысла.

Между тем он продолжал служить в армии, и весна 1620 г. предоставила ему возможность участвовать в самом настоящем сражении — за Прагу.

Наконец, весной 1621 г. Декарт был сыт войной по горло. С несколькими веселыми офицерами он сопровождал австрийцев в Трансильванию, думая добиться славы, и добился ее, но только не там, где думал. С войной было покончено, а для философии он еще не созрел. Чума в Париже и война против гугенотов делали Францию менее привлекательной, чем Австрию. Зато Северная Европа была и мирной, и без эпидемий; Декарт решил направиться туда. Он сел на корабль с одним лишь телохранителем. Моряки решили ограбить Декарта, оглушив ударом по голове, бросить его тело на съедение рыбам. Разбойники не учли того обстоятельства, что Декарт понимал их язык. Обнажив шпагу, Декарт заставил их направить корабль обратно к берегу. Таким образом аналитическая геометрия снова избежала гибели.

Следующий год Рене провел относительно спокойно в посещениях городов Голландии, а также Ренна, где жил отец Декарта. К концу года Декарт вернулся в Париж, где занимался философией и политической игрой, направленной к получению назначения в армию. Сорвавшаяся игра предоставила ему возможность поехать в Рим. Итальянское путешествие было очень важным для интеллектуального развития Декарта по двум причинам. Его философия, слишком далекая от того, чтобы затронуть простого человека, постоянно направлялась против этого скромного индивидуума из-за всего того, что поставленный в тупик философ испытал от «грязной» толпы, стекшейся со всех концов Европы за папским благословением. К сожалению, ему не удалось встретиться с Галилеем. Если бы математик проявил желание просидеть неделю или две у ног отца современного естествознания, его собственные рассуждения о физической вселенной были бы менее фантастичны. Все, что вынес Декарт из своей итальянской поездки, было завистливой ревностью к своему несравненному современнику.

Сразу же после праздника в Риме Декарт окунулся в жаркую битву под знаменами герцога Савойского. Вернувшись в Париж кардинала Ришелье и отчаянного Д'Артаньяна, Декарт посвящает 3 года размышлениям. Несмотря на свою занятость умственной работой, он не превратился в длиннобородого ученого, носящего грязный халат, а оставался светским, изысканно одевающимся человеком и занимался фехтованием, как подобало дворянину его ранга. Он завел себе широкополую шляпу со страусовыми перьями. В таком виде он готов был появляться в любом месте кишащего разбойниками города. Однажды, когда некий подвыпивший невежа оскорбил на вечеринке даму Декарта, разгневанный философ на манер Д'Артаньяна выбил шпагу из его рук и затем подарил ему жизнь.

Упомянув одну из знакомых дам Декарта, мы не можем не вспомнить о другой, которая подарила ему дочь. Ранняя смерть ребенка глубоко потрясла отца. Возможно, причина того, что он так и не женился, заключалась в предпочтении истины красоте. Декарт имел средний достаток, он хорошо знал, что ему в жизни надо, каковы его возможности. Многие называли его холодным и эгоистичным. Но правильнее было бы сказать, что он полностью представлял важность своей цели, был умеренным и воздержанным в своих привычках. Он не был скупым, никогда не навязывал домочадцам тот спартанский образ жизни, которого иногда придерживался сам. Слуги боготворили своего хозяина. Он им помогал даже после того, как они покидали его дом. Все это отрицает его эгоистичность.

Декарта также обвиняли в атеизме. Ничего не может быть дальше от истины, чем это утверждение. Его вера была неуязвимо простой, несмотря на весь его рационалистический скептицизм. Рационалистический ум иногда представляет собой удивительнейшую смесь из рационального и иррационального.

Было у Декарта одно душевное свойство, которое сильно влияло на его поступки, пока он не изжил его благодаря строгой военной дисциплине. Из-за слабого здоровья в детстве его нежили и баловали, и это развило в нем склонность к ипохондрии. В течение многих лет его преследовал леденящий страх смерти. Достигнув средних лет, Декарт мог искренне сказать, что природа является лучшим лекарем и что секрет продления жизни состоит в том, чтобы забыть о страхе смерти.

Три года мирных размышлений в Париже были счастливейшими годами жизни Декарта. Блестящие открытия Галилея, сделанные с помощью грубых телескопов, побудили натурфилософов Европы к изготовлению линз. Декарт приобщился к этому, проводил наблюдения, но не обнаружил к этому большого интереса. Его гений был глубоко математическим и абстрактным. Открытие, которое он сделал в это время, именно открытие принципа виртуальных скоростей в механике, и поныне сохраняет свое значение в науке. Это была истинно первоклассная работа. Обнаружив, что мало кто понимает ее смысл и может ее оценить, он забросил отвлеченные занятия и обратился к тому, что считал наиболее значительным делом, — к изучению человека. Но, как он сухо замечает, скоро он обнаружил, что количество тех, кто понимает человека, пренебрежимо мало по сравнению с количеством тех, кто думает, что понимает геометрию.

Быстро растущая репутация Декарта снова привлекла толпы высокопоставленных дилетантов, и он еще раз был вынужден искать покой и отдых на полях битв. После победного окончания войны Декарт невредимым вернулся в Париж, для того чтобы пройти через еще одно «обращение» и расстаться с суетными занятиями уже навсегда.

Ему было теперь (в 1628 г.) 32 года, и только его удивительное счастье сохранило его тело от гибели, а его дух от забвения. Шальная пуля легко могла оборвать будущую славу Декарта, и он начал, наконец, понимать, что если собирается чего-то достичь, то пора уже браться за дело всерьез. Из состояния пассивного безразличия он был выведен двумя кардиналами — де Берюлем и де Банье, первому из которых научные круги должны принести благодарность за побуждение Декарта публиковаться.

На вечерах, устраиваемых де Банье, Декарт охотно говорил о своей новой философии. Чтобы проиллюстрировать трудность различения истины и лжи, Декарт выдвинул 12 неопровержимых аргументов, показывающих ложность любой неоспоримой истины и, наоборот, делающих правдоподобной любую допускаемую ложь. Как же в таком случае, спрашивали сбитые с толку слушатели, могут люди отличить правду от лжи? Декарт отвечал, что он располагает (как он считал) непогрешимым методом, подсказанным математикой, который позволяет сделать требуемое различение. Он надеется и намеревается, говорил он, показать, как этот метод может быть применен к науке и практической жизни с помощью механического изобретения.

Де Берюль высказал убеждение, что долгом Декарта является поделиться своими открытиями со всем миром. Декарт решил публиковаться. Это и было его второе обращение в возрасте 32 лет. Он сразу же вернулся в Голландию, где более холодный климат, и принялся осуществлять свое решение.

В последующие 20 лет он разъезжал по всей Голландии, нигде не оседая надолго; молчаливый отшельник глухих деревень и провинциальных отелей вел огромную научную и философскую переписку с ведущими умами Европы при посредстве своего верного друга из Ла Флеш патера Мерсенна, единственного, кто в любой момент знал тайный адрес Декарта. Гостиная монастыря ордена миноритов, недалеко от Парижа, стала передаточным пунктом (через Мерсенна) различных вопросов, математических задач, научных и философских теорий, возражений и реплик.

Во время своих длительных скитаний по Голландии Декарт занимался многим, помимо математики и философии. Оптика, химия, физика, анатомия, эмбриология, медицина, астрономия и метеорология, включая также изучение радуги, — все требовало своей доли его неутомимой активности. Любой человек, который в наши дни станет разбрасываться между столькими разнородными занятиями, неизбежно станет пустым дилетантом. Но не так было в век Декарта: талантливый человек мог тогда надеяться найти что-то интересное почти в любой науке, которая вызывала в нем любопытство. Все, что попадалось на пути Декарта, он перемалывал мельницей своего ума. Во время короткого визита в Англию он наблюдал поведение намагниченной иглы; после этого магнетизм был включен в его обширную философию. Рассуждения теологов также привлекали его внимание; во всех его теоретических рассуждениях усматривается тень его первоначального образования.

Все, что Декарт собрал и придумал, вошло во внушительный трактат «Мир». В 1634 г., в возрасте 38 лет, Декарт закончил его правку. Весь ученый Париж горел желанием увидеть шедевр. Можно сказать, что «Мир» мог бы быть написан автором книги бытия, если бы последний обладал теми познаниями в науках и философии, которыми владел Декарт. С расстояния в 3 столетия разница между «Миром» и библией усматривается небольшой, и нам трудно представить, как книга Декарта могла повергнуть епископа или папу в убийственную ярость. На самом деле, кроме Декарта, никто не предвидел этого.

Декарт хорошо представлял себе меру справедливости церковных суждений. Он знал также об астрономических исследованиях Галилея и о бесстрашии, с которым тот поддерживал учение Коперника. Декарт с нетерпением ожидал увидеть последнюю книгу Галилея, прежде чем поставит последнюю точку в своей. Но вместо получения ее экземпляра, до него дошло ошеломляющее известие: Галилей в возрасте семидесяти лет, несмотря на дружбу с ним могущественного герцога Тосканы, был передан инквизиции и принужден (22 июня 1633 г.) на коленях отречься, как от ереси, от коперниканского учения о том, что Земля обращается вокруг Солнца. Что могли сделать с Галилеем, если бы он отказался отступиться от своих научных взглядов. Декарт мог только догадываться, но имена Бруно, Ванини и Кампанеллы приходили ему на ум.

Декарт был подавлен. В своей книге он, естественно, излагал коперниканскую систему. По его мнению, он был более смелым, чем Коперник и Галилей. Для своего удовлетворения он доказал *необходимость* такого космоса, каков существует, и он думал, что показал, что если бы было создано любое количество разных вселенных, все они под воздействием законов природы рано или поздно должны согласоваться с *необходимостью* и развиться во вселенную, которая реально существует. Если Галилея поставили на колени за его слабую и консервативную ересь, то что же ожидало Декарта?

Сказать, что только страх удержал Декарта от опубликования «Мира», — значит упустить более важную часть истины. Он был не только напуган, как любой здравый человек, но и глубоко опечален. Он был уверен в правильности системы Коперника так же, как в своем собственном существовании. Но он был уверен также и в непогрешимости папы. Для него было совершенно немыслимо предать папу или Коперника. Чтобы успокоить свою совесть, он решил, что «Мир» будет опубликован после его смерти. Может быть, к тому времени папа тоже умрет, и противоречие разрешится само собой.

Решение не публиковаться распространялось на все работы Декарта. Но в 1637 г., когда Рене исполнился 41 год, друзья преодолели его предубеждение и заставили его разрешить публикацию шедевра, название которого переводится как «Рассуждение о методе, позволяющем направлять свой разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры, Геометрия, которые являются приложениями этого метода». Этот труд известен под кратким названием «Метод». Он был опубликован 8 июня 1637 г. Это был день, когда миру была подарена аналитическая геометрия.

Прежде чем описать, в чем эта геометрия превосходит синтетическую геометрию древних греков, закончим очерк о жизни ее автора.

Кардинал Ришелье дал Декарту привилегию публиковать во Франции или за границей все, что ему заблагорассудится написать. В Утрехте же, в Голландии, протестантские богословы наложили на труды Декарта проклятие как на атеистические и опасные для той мистической сущности, которая известна как «государство»[1]. Либеральный принц Оранский встал на сторону Декарта и в известных границах поддерживал его.

С осени 1641 г. Декарт жил в тихой деревушке около Гааги, в Голландии, где изгнанная принцесса Елизавета, в то время молодая особа, склонная к наукам, жила со своей матерью. Принцесса в самом деле была одарена. Выучив 6 языков и перечитав массу книг, она обратилась к математике и естественным наукам. Ни математика, ни естествознание не заинтересовали ее. Но вот на глаза ей попалась книга Декарта, и она поняла, что ей необходимо увидеть Декарта. Вскоре была устроена встреча — при некотором сопротивлении философа. Елизавета настояла, чтобы Декарт давал ей уроки.

Среди других разделов своей философии, которые он разъяснял ей, был метод аналитической геометрии. В элементарной геометрии есть одна задача, которую можно довольно просто решить с помощью чистой геометрии и которая выглядит довольно легкой, но для аналитической геометрии в ее строго декартовой форме задача является дьявольской головоломкой. Она состоит в построении окружности, касающейся произвольно заданных трех окружностей, центры которых не лежат все на одной прямой. Возможны 8 решений этой задачи. Эта задача — прекрасный образец того, что *нельзя* приспособить к мощному методу элементарной декартовой геометрии. Елизавета *решила ее методом Декарта*; она была весьма горда своим подвигом. Косвенное высказывание Декарта об этом решении воспринималось как благоприятная его оценка, хотя Декарт и знал, что Елизавета упустила суть дела.

Когда Елизавета покинула Голландию, она переписывалась с Декартом почти до самого дня его смерти. Его письма к ней содержат много прекрасного и искреннего, но хотелось бы, чтобы он был менее подвержен воздействию ее королевского происхождения.

В 1646 г. Декарт жил в счастливом уединении в Эгмонде, в Голландии, размышляя, занимаясь садоводством на крошечном участке и ведя переписку невероятных размеров с просвещенными людьми Европы. Его величайший математический труд лежал перед ним, но он продолжал думать о математике, всегда проявляя проницательность и оригинальность. Задача, которой он уделил некото-

---

[1] Еще при жизни Декарта распространение его сочинений было запрещено во Франции (см. также с. 52).

рое внимание, была связана с парадоксами Зенона об Ахиллесе и черепахе. Его решение не может быть полностью принято теперь, но для того времени оно было искусным. Он был в это время 50-летним всемирно знаменитым ученым, продолжал вести огромную работу. Но покой и отдых, к которым он стремился всю свою жизнь, все еще обходили его.

О нем прослышала шведская королева Кристина. Ей в то время было 19 лет. Она была одарена умом, уже проявила себя опытной правительницей и была физически хорошо развита. Она решила заполучить Декарта в качестве своего личного учителя.

Декарт держался до тех пор, пока Кристина не послала за ним на корабле весной 1649 г. адмирала Флеминга. Все средства были употреблены, чтобы уговорить неподатливого философа. Декарт тянул время до октября, затем, бросив последний полный сожаления взгляд на свой маленький сад, запер свой дом в Эгмонде и покинул его навсегда.

Его встретили в Стокгольме пышно, чтобы не сказать по-королевски. Своенравная Кристина вбила в свою упрямую голову, что пять часов утра — самое лучшее время для такой занятой и волевой женщины, чтобы изучать философию. Почтительный Декарт вставал в безбожной утренней темноте, влезал в присланную за ним карету и через холодную вьюжную площадь Стокгольма ехал во дворец, где Кристина в своей ледяной библиотеке уже нетерпеливо ждала пяти часов, чтобы точно вовремя начать занятия философией.

Старожилы Стокгольма говорили, что они не помнили столь суровой зимы. Декарт пытался отдыхать после обеда, но скоро Кристина лишила его и этой возможности. В результате ее плодотворной активности возникла Шведская королевская Академия наук, где Декарт постоянно сопровождал королеву.

Скоро для придворных стало ясно, что Декарт и их королева обсуждают на бесконечных совещаниях многое, помимо философии. Утомленный философ понял, что он оказался в осином гнезде. Начались недовольства. Со всех сторон на него посыпались укусы. Как только поползли слухи об «иностранном влиянии», Кристина решила «сделать» из Декарта шведа и королевским указом пожаловала ему поместье. Любое отчаянное движение, которое он предпринимал, чтобы выпутаться из сети, только затягивало его сильнее. К январю 1650 г. он был связан уже по рукам и ногам. Со своим укоренившимся уважением к королевскому достоинству он не в силах был произнести слова, которые вернули бы его обратно в Голландию.

В это время заболел воспалением легких Шаню, французский посланник, у которого жил Декарт. Декарт ухаживал за ним. Когда Шаню выздоровел, заболел Декарт. Встревоженная королева прислала докторов. Декарт выставил их. Ему становилось все хуже. Декарт встретил смерть спокойно, говоря, что завещание, которое он составил, может быть, загладит его грехи. Его последние мысли были далеко, в Ла Флеш. Он умер 11 февраля 1650 г., став жертвой высокомерного тщеславия своевольной властительницы.

Кристина горевала. Семнадцать лет спустя, через много времени после того, как она потеряла и свою корону, и свою веру, прах Декарта был возвращен во Францию и погребен в Париже там, где теперь Пантеон. При этом должны были состояться публичные выступления, но они поспешно были запрещены королевским указом, так как учение Декарта все еще было слишком сильно действующим на народ средством. Комментируя эти события, Якоби заметил: «Часто выгоднее обладать прахом великих людей, чем самими людьми при их жизни».

Вскоре после смерти Декарта его книги были занесены в «Индекс»[1] той самой церковью, которая, принимая совет кардинала Ришелье, при жизни автора разрешала их публикацию. Приверженцы религии не очень-то заботились о последовательности.

Мы не будем касаться здесь монументального вклада, который Декарт внес в философию. Также оставим мы в стороне его блистательное участие в подготовке расцвета экспериментального метода. Эти области лежат далеко от области чистой математики, к которой принадлежат его, вероятно, самые выдающиеся работы[2].

---

[1] Список запрещенных книг, издаваемый католической церковью.

[2] В деятельности Декарта занятия философией, естествознанием и математикой тесно переплелись.

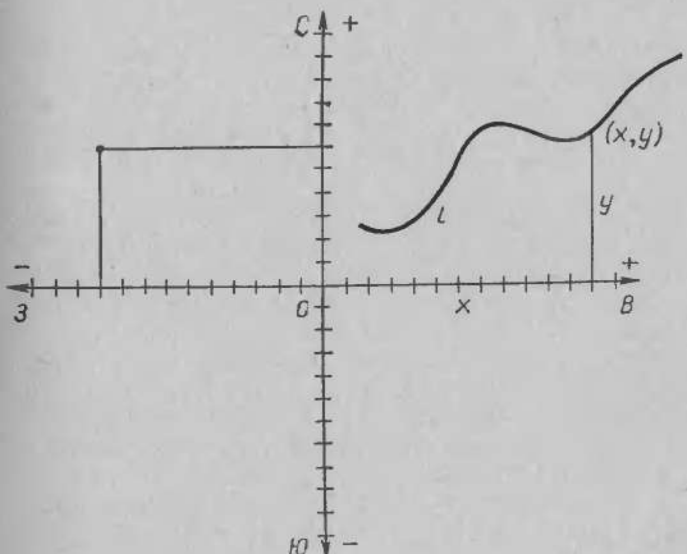
Поскольку философские воззрения Декарта оказали существенное влияние на его математические интересы, на этом следует, хотя бы кратко, остановиться дополнительно.

Как философ, Декарт был дуалистом. Он признавал два принципиально противоположных и несводимых друг к другу начала: материальную и духовную субстанции. Исторически прогрессивное значение имело не идеалистическое учение Декарта о духовной субстанции, а его материалистическое учение о телесной субстанции. Именно с последним связаны научные исследования Декарта по математике и естествознанию. Борясь против схоластики, за изучение природы, за приобретение реальных знаний, Декарт пришел к рационалистическому методу познания. Согласно этому методу, на первое место в научном исследовании выдвигается разум как решающий критерий оценки результатов исследования. Прямое, непосредственное выражение могущества разума, познания Декарт усматривал в математике, которая представлялась ему идеалом и образцом для других наук, универсальным методом изучения природы. Дедуктивный математический подход к исследованию вопросов естествознания позволил Декарту построить прогрессивную для его времени механистическую картину мира, хотя она и явилась ограниченной сама по себе. Разработка этой картины сочеталась со стремлением Декарта создать всеобщую математику, которую он трактовал как общую науку о пространственных образах, их расположении и измерении. На этом он сосредоточил свои основные усилия с самого начала научной деятельности, не позднее чем с 1619 г. Его усилия увенчались рядом открытий по вопросам решения алгебраических уравнений, механического и геометрического построения их корней, классификации соответствующих задач и классификации плоских кривых, разработки буквенного исчисления отрезков и его применения к геометрии линий, которые затем и составили основное содержание знаменитой *«Геометрии»* (La Geométrie) Декарта. Из представленной в таком виде всеобщей математики Декарта выросла не только аналитическая

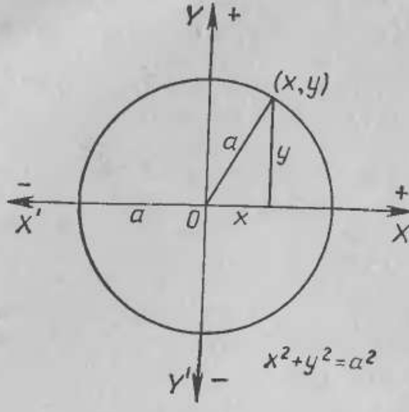
Только немногим людям дано обновить весь строй человеческой мысли. Декарт был одним из них. Чтобы не затуманить блестящую простоту его величайшего вклада, мы кратко расскажем только о нем, оставив в стороне многие другие прекрасные результаты, полученные им в алгебре и особенно в системе алгебраических обозначений и теории уравнений.

Этот основной вклад отмечен высшим совершенством и простотой, свойственными лишь нескольким величайшим вкладам всех времен в математику. Декарт переделал геометрию и сделал возможным существование современной геометрии.

Основная идея, как и все истинно великие идеи математики, проста до очевидности. Начертим на плоскости две пересекающиеся прямые. Не теряя общности, можем предположить, что они образуют прямой угол. Вообразим теперь город, спланированный на американский манер, в котором проспекты идут на юг и на север, а улицы — на восток и запад. План города может быть описан полностью, если выбрать *некоторый* проспект и *некоторую* улицу в качестве *осей*, пересекающихся в точке, называемой *началом*, от которой последовательно отсчитываются номера проспектов и улиц. Эти номера дают адрес, по которому сразу же представляем соответствующее место. Такая идея, позволяет нам *однозначно* определить положение любой *точки* относительно *осей*, задавая *пару* чисел, которые измеряют ее удаление от *осей* на *восток* или



геометрия, о которой говорится дальше в основном тексте, но и буквенная алгебра. Созданная Декартом система обозначений, с блеском проявившая себя в *Геометрии*, стала основой развития современной математической символики и вошла в нее как существенная составная ее часть.



запад и на *север* или *юг*; эта пара чисел называется *координатами* точки (относительно осей).

Теперь предположим, что точка движется по плоскости. *Координаты* (*x*, *y*) любой точки кривой, по которой перемещается точка, будут связаны между собой *уравнением* (читатель, никогда не строивший графиков, может принять это на веру), которое называется *уравнением кривой*. Предположим теперь для простоты, что наша кривая является окружностью. Мы имеем ее уравнение. Что можно извлечь из него? Вместо этого конкретного уравнения мы можем написать более общее уравнение того же вида (например, это будет уравнение *второй* степени без произведения координат и с равными коэффициентами при их квадратах), а затем исследовать его с помощью алгебры. В конце концов, все результаты алгебраических преобразований переходят в свои эквиваленты в терминах координат точек кривой, о чем все это время мы намеренно забывали. Алгебра просматривается легче, чем паутина прямых элементарной геометрии в духе древних греков. То, что мы сделали, было *применением алгебры для нахождения и исследования геометрических теорем, касающихся окружностей*.

Для прямых линий и окружностей это не кажется очень поразительным: мы знали раньше, как с ними обращаться, пользуясь другим, древнегреческим, способом. Истинная сила метода проявляется лишь тогда, когда мы *начинаем иметь дело с уравнениями любой степени и любой сложности и интерпретируем их алгебраические и аналитические свойства геометрически*. Таким образом, мы не только освобождаем геометрию от обязанности быть нашим лоцманом, но и нагружаем ее багажом, прежде чем взять на борт. *С этого времени алгебра и анализ становятся нашими лоцманами в неведомых морях «пространства» и его «геометрии»*. Все, что мы проделали, может быть распространено на пространство любого числа измерений; на плоскости нам нужны *две* координаты, в обычном пространстве — *три*, в механике и теории относительности — *четыре* и, наконец, в «пространстве», которое по нраву математикам, — *n* координат, или столько координат, сколько существует *всех* натуральных чисел 1, 2, 3, ..., или столько, сколько всех точек на прямой. Это уже похитрее, чем бег Ахиллеса за черепахой.

Декарт не ревизовал геометрию, он воссоздал ее. Будет справедливо, если последнее слово о Декарте скажет кто-нибудь из его знаменитых соотечественников; поэтому мы сошлемся на Жака Адамара. Он заметил прежде всего, что простое изобретение метода координат не было величайшей заслугой Декарта, так как оно было сделано уже «древними», — утверждение, которое верно только в том случае, если принимать за сделанное неясно выраженное побуждение. К чему полусырые идеи «древних», если эти «древние» не смогли сварить их в собственном котле?

«Совсем другое дело — распознать [как при использовании координат] общий метод и развить его идею до логического завершения»[1]. Это действительно является заслугой, важность которой понимает всякий настоящий математик. Именно такова заслуга Декарта перед геометрией. То, к чему он все время стремился, было применение метода координат не только к представлению уравнениями уже определенных геометрически кривых, но и к взгляду с совершенно противоположной точки зрения, к *априорному* определению все более и более сложных кривых и, следовательно, к все большему и большему обобщению...

Непосредственно самим Декартом и позже, косвенно, сделанным в следующем столетии в указанном обратном направлении, было всецело революционизировано понимание предмета математической науки. Декарт действительно полностью понял значение сделанного им, и он был совершенно прав, когда хвастался, что превзошел всю предшествовавшую ему геометрию настолько же, насколько риторика Цицерона превосходит азбуку.

---

[1] Приведенное высказывание Декарта не лишено субъективизма, тем более что геометрия раньше понималась широко, часто в смысле математики вообще. Вместе с тем Декарт действительно сыграл выдающуюся роль в развитии математики. «Поворотным пунктом в математике, — отмечал Ф. Энгельс, — *была декартова переменная величина.* Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем».

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

КОРОЛЬ ЛЮБИТЕЛЕЙ

ФЕРМА (1601—1665)

Я установил множество исключительно красивых теорем. — П. ФЕРМА

ПРЕДСТАВИВ ЧИТАТЕЛЮ ДЕКАРТА как одного из ведущих математиков всех времен, мы не погрешим против истины, если повторим распространенное и редко вызывающее возражения мнение, что величайшим математиком XVII столетия был современник Декарта — Ферма (1601—1665). Разумеется, при этом мы оставляем в стороне Ньютона (1642—1727). Но Ферма был *по крайней мере* ровней Ньютону *как чистый математик*; кроме того, почти треть жизни Ньютона приходится на XVIII столетие, тогда как Ферма жил в XVII.

Представляется, что Ньютон рассматривал свою математику главным образом как инструмент для научных исследований и к ним приложил он основные свои усилия. Ферма, наоборот, был гораздо больше увлечен чистой математикой, хотя и сделал некоторые значительные работы по применению математики к естественным наукам, особенно к оптике.

Математика была введена в современную фазу развития в 1637 г., после того, как только была опубликована аналитическая геометрия Декарта. В течение многих лет она так сильно развивалась, что любой одаренный человек мог с полным правом надеяться выполнить хорошее исследование как в ней самой, так и в прикладных разделах.

Как чистый математик Ньютон достиг своей вершины в изобретении анализа, которое было также независимо сделано Лейбницем. Об этом дальше будет сказано подробно. Сейчас следует заметить, что Ферма уяснил и применил ведущую идею дифференциального исчисления на 13 лет ранее рождения Ньютона и на 17 лет ранее рождения Лейбница, хотя он не свел свой метод, подобно Лейбницу, к совокупности правил, которые даже нерадивый может применять к решению легких задач.

Совершенно независимо друг от друга Декарт и Ферма изобрели аналитическую геометрию. Они переписывались между собой, но это не умаляет сути предыдущего утверждения. Бóльшая часть усилий Декарта направлялась на различные естественнонаучные исследования, разработку его философии и его нелепую «вихревую» теорию солнечной системы, которая долгое время была даже в Англии серьезным соперником прекрасной в своей простоте, лишенной метафизики, ньютоновской теории всемирного тяготения. Ферма же, в отличие от Декарта и Паскаля, никогда, кажется, не увлекался философствованиями о боге, человеке и вселенной в целом. Получив результаты, относящиеся к анализу и аналитической геометрии, он посвятил почти все свое время, не занятое наполнявшей его ясную и тихую жизнь работой ради куска хлеба, своему любимому развлечению — чистой математике, чтобы совершить величайший труд по основанию теории чисел, на котором покоится его неоспоримая и неделимая слава.

Теперь видно, что Ферма разделяет с Паскалем лавры создателя математической теории вероятностей. Если всех этих первоклассных достижений недостаточно, чтобы возвыситься на голову над его современниками — чистыми математиками, то позволительно спросить: кто сделал больше? Ферма — прирожденный новатор. Он также был в самом строгом смысле этого слова любителем как в естествознании, так и в математике. Без сомнения, он один из величайших любителей в истории науки, если не самый великий.

Жизнь Ферма была тихой, трудовой и лишенной громких событий, но он извлек из нее поразительно много. Мы упомянем лишь о наиболее существенных фактах его мирной карьеры. Сын торговца кожей Доминика Ферма, второго консула Бомона, и Клэр де Лонг, дочери юриста парламента, математик Пьер Ферма родился в Бомон де Ломань, во Франции, в августе 1601 г. (дата неточная).

Первоначальное образование он получил дома в своем родном городе; последующая учеба, подготовка к магистерскому званию протекали в Тулузе. Так как Ферма всю жизнь был скромным и сдержанным человеком, избегающим бесплодных диспутов, и не имел любящей сестры, подобной Жильберте Паскаля, которая могла бы описать для потомства его проявившиеся в детстве чудесные способности, то особенно мало известно из пережитого им в бытность студентом. Что он должен был быть блестящим студентом, становится очевидным ввиду его достижений и образованности, проявившихся в зрелые годы; без твердых основ взыскательного обучения никто не мог стать таким знатоком классического наследия и литературы, каким стал Ферма. Удивительные его работы в теории чисел и в математике вообще не имеют отношения к его официальной учебе: те области, в которых он сделал лучшие свои работы, не были еще открыты во времена его студенчества.

Вот те немногие события его жизни, которые достойны упоминания: назначение на должность уполномоченного по прошениям в Тулузе в возрасте 30 лет (14 мая 1631 г.); женитьба 1 июня того же года на Луизе де Лонг (кузине его матери), подарившей ему трех сыновей и двух дочерей; его выдвижение в 1648 г. королевским советником местного парламента в Тулузе — на пост, который он занимал с достоинством, честью и с большим умением в течение 17 лет (вся его трудовая жизнь, длившаяся 34 года, была отдана государственной службе); наконец, его смерть в Кастре 12 января 1665 г. на 65-м году жизни. Этот спокойный, уравновешенный, честный и аккуратный человек прожил жизнь, которая является одной из самых интересных в истории математики.

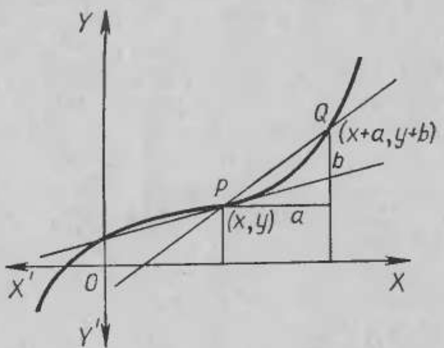
Его жизнь была в работе, скорее даже в отдыхе. К математическим трудам побуждала его бескорыстная любовь к математике, и лучшие из его открытий так просты (по формулировке, но не по завершенности или подражанию), что любой школьник с нормальными способностями может понять их смысл и оценить их красоту. Труды этого короля любителей математики воодушевляли любителей всех стран в течение трех столетий. Теория чисел, вероятно, является единственной отраслью математики, в которой талантливый любитель до сегодняшнего времени может надеяться получить что-то интересное.

Мы сначала бросим взгляд на другой вклад Ферма в математику, но еще раньше сделаем замечание о его «исключительной эрудиции», которую многие называют гуманитарным образованием. Его знания основных европейских языков и литератур континентальной Европы были обширными и точными, а древнегреческая и латинская филология обязана ему несколькими важными поправками. В сочинении латинских, французских и испанских стихов — распространенном светском занятии того времени — он обнаруживал незаурядное мастерство и прекрасный вкус. Чтобы понять его спокойную, наполненную умственным трудом жизнь, нужно представить себе приветливого человека, без мнительности, без нетерпимости к критике, без гордыни, но с чувством собственного достоинства, которое Декарт — его противоположность во всех отношениях — характеризовал словами: «Мсье де Ферма — гасконец, а я — нет». Упоминание о принадлежности к гасконцам, возможно, намекает на милую разновидность хвастливости. Это качество исподволь проявляется в письмах Ферма, но оно всегда имеет довольно наивную и безобидную форму и совершенно не связано с его мнением о собственных работах, даже когда он писал письма в момент наибольших творческих удач. Что же касается Декарта, то нужно помнить, что он не был полностью беспристрастным судьей. Мы еще отметим позже, как его собственное упрямство выставило его не в лучшем свете в его затяжном споре с «гасконцем» о чрезвычайно важном вопросе, относительно касательных.

Принимая во внимание характер официальных обязанностей Ферма и большое число выполненных им блестящих работ по математике, некоторые не могут понять, как он находил время для всего этого. Один его соотечественник, кажется, нашел решение вопроса: служба Ферма как королевского советника скорее помогала его интеллектуальным занятиям, чем мешала им. В отличие от других должностных лиц, например в армии, парламентские советники не были связаны с повседневными городскими делами и включались в активную деятельность главным образом тогда, когда возникали подозрения во взятках или другие чрезвычайные обстоятельства. Поэтому Ферма располагал достаточным досугом.

Теперь мы кратко охарактеризуем вклад Ферма в эволюцию математического анализа. Как отмечалось в главе об Архимеде, геометрическим эквивалентом основной задачи *дифференциального исчисления* является построение прямой, касательной к данной несамопересекающейся непрерывной кривой в произвольной ее точке. Достаточно близкое описание того, что означает здесь «непрерывная» кривая: «плавная, без разрывов и скачков». Чтобы дать точное математическое определение, понадобились бы несколько страниц, посвященных ряду других понятий, которые, кстати говоря, немало бы озадачили и удивили изобретателей анализа, включая Ньютона и Лейбница[1]. И можно думать, что если бы все те тонкости, которые требуются от современного студента, изучающего анализ, были известны его основателям, то анализ, возможно, не был бы изобретен.

Создатели анализа, в том числе и Ферма, руководствовались геометрической и физической (больше всего кинематической и динамической) интуицией в своих исследованиях. Они *вдумывались* в то, что происходило в их воображении на *графике* «непрерывной кривой» при проведении касательной к ней в любой ее точке P, когда через две ее точки P и Q проводилась прямая, а затем точка Q начинала двигаться вдоль дуги кривой по направлению к точке P до тех пор, пока точка Q не сливалась с точкой P, т. е. когда *секущая* PQ в своем *предельном положении* становилась *касательной* к кривой в точке P, т. е. тем, что ими разыскивалось.



Следующий шаг состоял в том, чтобы перевести все это на алгебраический, аналитический язык. Зная координаты x, y точки P и координаты $x + a$, $y + b$ точки Q (до того, как Q начинает двигаться к P), они всматривались в график и обнаруживали, что *наклон секущей* PQ определяется *отношением* $\frac{b}{a}$ — очевидной

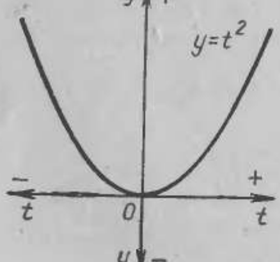
[1] Во времена Ньютона и Лейбница, а также много позднее, вплоть до первых десятилетий XIX в., в понятие непрерывности кривой включалось, как само собой разумеющееся, также свойство ее гладкости, т. е. возможности проведения в каждой ее точке касательной к ней. Именно применительно к таким кривым правомерно рассматривать основную задачу дифференциального исчисления.

мерой «крутизны» секущей относительно оси Ox. Отсюда совершенно ясно следовало, что *искомый наклон касательной в точке* P (после того, как точка Q, скользя по кривой, совпала с P) определится *предельным значением* отношения $\frac{b}{a}$, когда и b и a одновременно стремятся к *нулю*. Это предельное значение и давало искомый наклон. Зная его, можно теперь строить касательную в точке P.

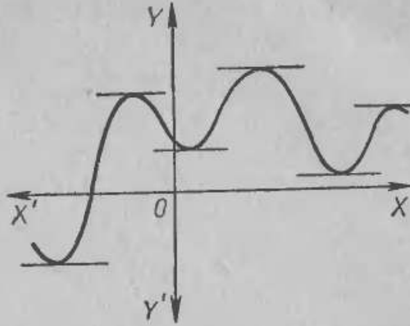
Приведенное рассуждение не является точным описанием предложенного Ферма процесса построения касательных, но этот процесс в общем эквивалентен ему.

Почему все это могло стать достойным серьезного внимания разумного и практичного человека? Это сложная история, о которой только вскользь можно сказать здесь; более подробно о ней пойдет речь в главе о Ньютоне. Одним из основных понятий динамики является понятие *скорости* (быстроты) движущейся частицы. Если мы представим расстояния, проходимые частицей в разные моменты времени, в виде графика, мы получим линию — прямую или кривую, которая наглядно изображает процесс *движения* частицы, а *крутизна* этой линии в данной ее точке, очевидно, даст нам *скорость* частицы в соответствующий момент времени: чем быстрее движется частица, тем круче *наклон касательной*. Этот наклон действительно дает меру скорости частицы в любой точке ее траектории. Задача о *движении* при переводе ее на язык геометрии является как раз задачей нахождения наклона касательной в заданной точке кривой. Имеются подобные задачи, связанные с касательными плоскостями к поверхностям (они также имеют важное истолкование в механике и математической физике), и все они подвластны дифференциальному исчислению, основную задачу которого мы попытались описать в том виде, в каком она представлялась Ферма и его последователям.

Другое применение этого исчисления можно указать, исходя из уже сказаного выше. Допустим, что некоторая величина y есть «функция» другой величины t, что записывается так: $y = f(t)$; это означает, что при подстановке любого определенного числа, пусть 10, вместо t мы получаем $f(10)$ — «значение функции f при $t = 10$». Если предположить заданным *алгебраическое выражение* для f, мы можем вычислить *соответствующее* значение y, здесь $y = f(10)$. Чтобы это было еще понятнее, пусть $f(t)$ является той «функцией» t, которая в алгебре обозначается через t^2. Тогда при $t = 10$ имеем $y = f(10)$, и, следовательно, *здесь* $y = 10^2 = 100$ для *этого* значения t; при $t = \frac{1}{2}$ y будет равен $\frac{1}{4}$ и так далее для *любого* значения t.



Все это знакомо каждому, кто учился в средней школе не более чем 30—40 лет назад, но некоторые могли забыть, что они делали по арифметике, будучи детьми. Однако даже самые забывчивые поймут, что можно начертить график функции $y = f(t)$ для любого частного вида f (когда этой функцией является t^2, график представляет собой параболу — кривую, подобную перевернутой арке). Вообразим, что график нарисован. Если он имеет *максимумы* (наивысшие точки) или *минимумы* (наинизшие точки) — это точки выше или ниже *их ближайших соседних* точек, мы замечаем, что в каждой точке *максимума* и *минимума* касательная *параллельна* оси x. Значит, *наклон* касательной в точках *экстремума* (максимума или минимума) функции $f(t)$ равен *нулю*. Поэтому, если мы захотим найти *экстремумы* некоторой данной функции $f(t)$, нам нужно будет опять решить задачу отыскания наклона касательной для этой конкретной кривой $y = f(t)$ в *произвольной* точке (t, y), приравнять полученное выражение нулю и найти соответствующие значения t. В этом сущность метода нахождения максимумов и минимумов, изобретенного Ферма в 1628—1629 гг. и получившего некоторую известность 10 лет спустя, когда Ферма послал его изложение через Мерсенна Декарту[1].



Научные применения описанного простого аппарата, конечно значительно усовершенствованного для решения более сложных, чем рассмотренная сейчас, задач, многочисленны и разнообразны. В механике, например, как установил Лагранж, имеется некоторая «функция» координат и скоростей тел, отыскание экстремума которой дает нам «уравнения движения» рассматриваемой системы тел, а это, в свою очередь, позволяет полностью описать движение, т. е. определить положение тел в любой данный момент времени. В физике тоже имеется много подобных функций, простое требование экстремума каждой из которых резюмирует не одну обширную область математической физики*: в 1916 г. Гильберт ввел одну из таких функций для общей теории относительности. Ферма не занимался пустой тратой времени, когда он отдыхал от трудных служебных дел, решая задачи нахождения максимумов и минимумов. Он сам нашел удивительно красивое применение своих принципов к оптике. Мимоходом можно отметить, что это особое откры-

[1] Свой метод Ферма разработал применительно к алгебраическим функциям.

* Для нашего изложения это утверждение достаточно правильно. На самом деле требуются значения переменных (координат и скоростей), при которых рассматриваемая функция *стационарна* (грубо говоря, не возрастает и не убывает). *Экстремум* является стационарным значением, а *стационарное* значение необходимо не является экстремумом.

тие оказалось зародышем квантовой теории, или, в ее математическом аспекте, волновой механики, развиваемой с 1926 г.

Ферма открыл то, что обычно называют «принципом наименьшего времени». Более точно следовало бы сказать «экстремального» (наименьшего *или* наибольшего) вместо «наименьшего» (см. сноску на предыдущей странице).

Согласно этому принципу, луч света, идущий от точки A к точке B, отражается и преломляется («преломляется» — значит претерпевает изгибы, как при переходе из воздуха в воду или при прохождении через среду переменной плотности) таким образом, что *время*, затрачиваемое на прохождение луча от A до B по всему изогнутому и повернутому вследствие отражения и преломления пути, должно достигать экстремального значения (см. сноску на предшествующей странице): из этого единственного требования следует определять сам путь.

Из этого принципа Ферма вывел известные законы отражения и преломления: угол падения равен углу отражения (при отражении); отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина *постоянная* для данной пары сред (при преломлении).

Предмет аналитической геометрии был уже упомянут. Ферма первым применил ее положения к трехмерному пространству. Декарт удовлетворился двумя измерениями. Обобщение, известное сегодня любому студенту, совсем не было очевидным для самых одаренных людей времен Декарта. Можно сказать, что в перенесении конкретных результатов геометрии с плоскости в трехмерное пространство обычно заключена намного бóльшая трудность, чем в их перенесении из последнего в пространство четырех, пяти, ..., n измерений. Ферма поправил Декарта в существенном пункте (касающемся классификации кривых по их степеням). Естественно, чувствительный Декарт должен был ступить в спор с неисправимым «гасконцем» Ферма. В своей полемике относительно метода касательных с Ферма он был часто раздражен и уязвлен; уравновешенный юрист всегда оставался одинаково вежливым. Как это обычно бывает, человек, который сохраняет спокойствие, находит лучшие аргументы. Но Ферма выиграл спор не потому, что он был более искусным в диспутах, а потому, что он был прав.

Можно было предположить, что Ньютон слышал об использовании Ферма анализа и ознакомился со сведениями об этом. По этому поводу ничего не было опубликовано до 1934 г., когда профессор Л. Т. Мор, публикуя биографию Ньютона, привел прежде не замеченное письмо, в котором Ньютон ясно говорит о том, что намеком на метод дифференциального исчисления для него послужил метод построения касательных Ферма.

Теперь мы обратимся к величайшему труду Ферма, доступному как для профессионалов, так и для любителей математики. Это, так называемая «теория чисел», или «высшая арифметика», или, наконец, если употреблять менее педантичное название, устраивавшее Гаусса, просто *арифметика*.

Древние греки делили всю совокупность разнородных понятий, которые мы охватываем в школьных учебниках словом «арифметика», на две отличимые друг от друга ветви: *логистику* и *арифметику*, первая из которых касалась практических применений счета к торговле и к повседневной жизни вообще, а вторая, как и арифметика в смысле Ферма и Гаусса, занималась исследованием свойств чисел как таковых.

Основные и, вероятно, наиболее трудные задачи арифметики состоят в изучении взаимных связей между целыми числами 1, 2, 3, 4, 5, ..., которые мы начинаем называть почти тогда же, когда обретаем умение говорить. Стремясь объяснить эти взаимосвязи, математики развили тонкие и трудные теории в алгебре и в анализе, так что первоначальные задачи, касающиеся чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., совершенно затерялись в дебрях технических деталей этих теорий, но их истинное назначение остается направленным на решение все тех же задач. Между тем, как побочный продукт этих кажущихся бесполезными исследований, появились многие мощные методы, примененные в других областях математики, имеющих прямое отношение к изучению явлений природы. Приведем только один пример. Позднейшая фаза развития алгебры, достигнутая в результате работ профессиональных алгебраистов и пролившая совершенно новый свет на теорию алгебраических уравнений, ведет свое начало непосредственно от попыток решить весьма просто формулируемую последнюю теорему Ферма (с которой мы познакомимся, как только для этого будет подготовлена почва).

Мы начнем со знаменитого утверждения Ферма, касающегося простых чисел. Положительное простое число, или, короче, *простое число*, — это число, большее единицы, которое делится без остатка только на единицу и на самое себя. Простыми, к примеру, являются числа 2, 3, 5, 7, 13 или 257 и 65 537. Но число 4 294 967 297 не является простым, так как оно делится на 641; так же не будет простым число 18 446 744 073 709 551 617, делителем которого служит число 274 177. Числа 641 и 274 177 — простые. Когда в арифметике говорят, что одно число имеет в качестве делителя другое или что число делится на другое, то имеют всегда в виду *точное деление — деление без остатка*. Так, 14 делится на 7, а 15 не делится. Два больших числа, приведенных выше, были избраны с коварным умыслом, который сейчас станет ясным. Напомним еще одно определение: *n-й степенью* числа N называется результат умножения этого числа самого на себя n раз, она записывается как N^n. Так, $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$; $8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$. Для единообразия само N можно записывать как N^1. А запись такого типа, как 2^{3^5}, будет означать, что вначале вычисляется число 3^5 (оно равно 243), а затем 2 возводится в эту степень, так что получается 2^{243}, — это число имеет 74 цифры.

Следующее замечание играло важную роль в жизни Ферма, а также в истории математики. Рассмотрим числа 3, 5, 17, 257, 65 537. Все они принадлежат к «последовательности» определенного вида, так как порождаются одним и тем же простым процессом, усматриваемым из равенств: $3^1 = 2 + 1$; $5 = 2^2 + 1$; $17 = 2^4 + 1$; $257 = 2^8 + 1$; $65\,537 = 2^{16} + 1$. Можно легко проверить, что два больших числа, приведенных выше, — это не что иное, как $2^{32} + 1$ и $2^{64} + 1$, — также числа нашей последовательности. Итак, мы имеем семь чисел последовательности, *из которых первые пять — простые числа, а последние два не являются простыми.*

Прослеживая, как составляется эта последовательность, мы замечаем, что «показатели» (верхние числа, показывающие, какие степени числа 2 берутся), а именно числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, представляют собой $1 = (2^0)$, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, т. е. наша последовательность определяется как $2^{2^n} + 1$, где n принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Но можно не останавливаться на $n = 6$ и, беря $n = 7, 8, 9, \ldots$, продолжить последовательность как угодно далеко, получая все более и более громадные числа.

Пусть теперь мы хотим узнать, является ли какое-либо из чисел этой последовательности простым. Несмотря на то что имеется много удобных правил делимости, позволяющих сразу отбросить целые группы чисел, заведомо не являющихся делителями, несмотря на то что современная арифметика ограничивает виды возможных делителей, задача все же будет того же порядка трудоемкости, что и последовательное деление данного числа на простые числа 2, 3, 5, 7, ..., которые не превосходят квадратного корня из данного числа. Если последнее не делится ни на одно из них, значит, оно простое. Нет необходимости говорить, что труд для проведения такого испытания, даже при использовании известных уловок, оказывается колоссальным даже при таких небольших значениях n, как 100 (читатель может убедиться в этом сам, пытаясь одолеть случай $n = 8$).

Ферма высказал убеждение, что *все числа рассматриваемой последовательности являются простыми.* Вышеприведенные числа (соответствующие $n = 5$ и $n = 6$), как мы видели, противоречат этому утверждению. Это приводит к замечанию, имеющему исторический интерес: *предположение* Ферма *было ошибочным, но он не утверждал, что доказал это предположение.* Несколько лет спустя он *сделал* одно неясное заявление, из которого некоторые исследователи заключают, что он все же заблуждался. Важность этого факта выяснится в дальнейшем.

Любопытно, что Зера Колбёрн, юный американский счетчик-феномен, когда его спросили, является ли простым шестое число Ферма (4 294 967 297) или нет, после короткого вычисления в уме ответил, что не является, так как делится на 641. Но он был не в состоянии объяснить, каким образом пришел к этому правильному заключению[1].

[1] Русский математик-любитель, самоучка И. М. Первушин (1827—1900)

Прежде чем расстаться с «числами Ферма» $2^{2^n} + 1$, мы забежим вперед — в последнее десятилетие XVIII в., когда эти таинственные числа частично вызвали одно из двух или трех самых значительных событий всей истории математики. Некий 18-летний юноша, как и положено в этом возрасте, колебался, чему посвятить свои незаурядные способности — математике или филологии. Он был одинаково одарен в обеих областях. Окончательное решение предопределилось сделанным им красивым открытием, связанным с известной каждому школьнику простой задачей элементарной геометрии.

Правильным многоугольником называется многоугольник, в котором все стороны равны и все углы при вершинах равны. Еще древние греки нашли способы построения правильных многоугольников с числом сторон 3, 4, 5, 6, 8, 10 и 15 с использованием только циркуля и линейки; с помощью этих же инструментов легко также, имея правильный многоугольник с данным числом сторон, построить правильный многоугольник с удвоенным числом сторон. Следующий шаг состоял в поисках таких же построений правильных многоугольников с числом сторон 7, 9, 11, 13, ... Многие искали, но не могли найти их, так как такие построения невозможны (только они не знали этого). И вот после промежутка более 2200 лет молодой человек, колеблющийся между математикой и филологией, сделал следующий — большой — шаг вперед.

Как было сказано, достаточно рассмотреть только многоугольники, имеющие *нечетное* число сторон. Юноша доказал, что построение такого многоугольника с помощью циркуля и линейки возможно тогда и только тогда, когда число сторон является либо простым числом Ферма (т. е. простым числом вида $2^{2^n} + 1$), либо произведением *различных* простых чисел Ферма. Так, построение возможно для 3, 5 или 15 сторон, о чем знали еще греки, но невозможно для 7, 9, 11 или 13 сторон, а также возможно для 17, 257 или 65 537 сторон (каково следующее простое число в последовательности Ферма и *есть ли оно*, никто еще не знает); оно возможно и для $3 \cdot 17$ или $5 \cdot 257 \cdot 65\,537$ сторон и так далее. Об этом открытии было сообщено 1 июня 1796 г., но сделано оно было 30 марта. Оно побудило юношу предпочесть математику филологии и посвятить ей свою жизнь. Его имя было Гаусс.

В качестве открытия другого типа, которое Ферма сделал в области теории чисел, рассмотрим «теорему Ферма» (*не* «последнюю теорему Ферма»[1]). Если n — целое число и p — простое число, то $n^p - n$

установил, что числа Ферма при $n = 12$ и $n = 23$ делятся соответственно на 114 689 и 167 772 161. Он же доказал (1883), что число $2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$ простое.

С помощью электронных вычислительных машин в 1963 г. было установлено, что число $2^{11213} - 1$ простое (Д. Гиллис; наибольшее из известных тогда простых чисел, для его записи требуется около 3376 цифр), а в 1971 г. — что простым является и число $2^{19937} - 1$ (12 003 цифры).

[1] Последнюю называют еще Великой теоремой Ферма, а рассматриваемую — Малой, хотя она и играет особенно важную роль в математике (см. дальше).

делится на p. Например, возьмем $p = 3$, $n = 5$, тогда $5^3 - 5 = 120 = 3 \cdot 40$; если взять $n = 2$, $p = 11$, то получаем $2^{11} - 2 = 2046 = 11 \cdot 186$.

Очень трудно, если не невозможно, объяснить, почему некоторые теоремы арифметики считаются «важными», а другие, которые ничуть не легче доказать, — малоинтересными. Один из критериев, хотя не обязательный, — использование теоремы в других областях математики; другой — побудительное влияние на исследования в арифметике и в математике вообще; третий — известная универсальность. Теорема Ферма удовлетворяет всем этим, несколько условным, требованиям. Она широко используется во многих отделах математики, включая теорию групп, которая, в свою очередь, является базой теории алгебраических уравнений; она побудила ко многим исследованиям (читателю-математику можно напомнить как важный пример теорию примитивных корней); наконец, она универсальна в том смысле, что устанавливает свойство *всех* простых чисел; такие общие утверждения крайне трудно найти, и их известно очень мало.

Как обычно, Ферма высказал свою теорему относительно $n^p - n$ без доказательства. Впервые оно было дано Лейбницем в его не датированной рукописи, но, кажется, он его знал до 1683 г. Читатель может испробовать свои силы на поисках доказательства. Все, что для него необходимо, — это следующие факты, которые можно доказать, а можно и предположить установленными: всякое целое число может быть представлено как произведение простых чисел только одним способом (отвлекаясь от перестановки сомножителей), а именно если произведение двух целых чисел делится на данное простое число, то на него делится по крайней мере одно из этих чисел. Иллюстрация: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ никаким существенно другим способом не может быть представлено как произведение простых чисел (представления $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$, $2 \cdot 3 \times \times 2 \cdot 2$, $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ не считаются различными); 7 является делителем числа 42, именно $42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$, и во всех случаях по крайней мере один из сомножителей числа 42 делится на семь; $98 = 7 \cdot 14$, здесь оба сомножителя, а значит, по крайней мере один из них, делятся на 7. Из этих двух положений можно вывести требуемое доказательство менее чем на половине страницы. Оно доступно разумению всякого нормального 14-летнего подростка, но можно спокойно держать пари, что из миллиона людей обычного интеллекта любого или всех возрастов, обладающих математическими познаниями в объеме школьной арифметики, меньше десяти найдут доказательство за какое-то обозримое время, пусть за год.

Здесь как будто уместно процитировать некоторые знаменитые высказывания Гаусса, касающиеся излюбленной области интересов Ферма и его собственных. Они содержатся в предисловии Гаусса к собранию математических трудов Эйзенштейна, опубликованному в 1847 г.

«Высшая арифметика предлагает нам неиссякаемый запас интересных истин — истин, которые не стоят изолированно, а соединены глубокими внутренними связями и между которыми по мере увеличения нашего знания мы постоянно открываем все новые и иногда полностью неожиданные связи. Значительная часть ее теорий порождает дополнительное очарование необычностью тех важных предложений, отмеченных впечатляющей простотой, которые часто выводятся путем индукции и тем не менее имеют столь глубокий характер, что мы находим их доказательства только после многих тщетных попыток; но даже, когда мы добиваемся успеха, его приносит зачастую громоздкий и искусственный вывод, тогда как более простые методы могут долго оставаться скрытыми от нас».

Одной из тех интересных истин, о которых упоминает Гаусс, является иногда рассматриваемая как самая красивая (но не самая важная) истина, относящаяся к числам и открытая Ферма: каждое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов, причем представляется такой суммой единственным способом. Легко доказать, что ни одно число вида $4n - 1$ не является суммой двух квадратов. Все простые числа, большие чем 2, как легко видеть, можно записать в виде одной из этих двух форм. Например, число 37 (простое) при делении на 4 дает в остатке 1, — значит, оно есть сумма двух квадратов целых чисел. С помощью проб (имеются лучшие способы) мы находим, что $37 = 1^2 + 6^2$ и что нет других двух целых чисел x и y, таких, что $x^2 + y^2 = 37$. Для простого числа 101 имеем $101 = 1^2 + 10^2$; для 41 находим $41 = 4^2 + 5^2$. С другой стороны, число 19, равное $4 \cdot 5 - 1$, не представимо суммой двух квадратов.

Как и почти во всех своих работах по арифметике, Ферма не оставил доказательства этой теоремы. Она была доказана впервые великим Эйлером в 1749 г., после того как он бился над ней *семь лет*. Но Ферма описал хитроумный метод, который он изобрел и с помощью которого доказывал это и некоторые другие свои замечательные утверждения. Он называется «бесконечным спуском». Ферма сам описал этот метод коротко и ясно: мы дадим свободный перевод его описания по письму к Каркави от августа 1659 г.

«Долгое время я не находил возможности применить мой метод к доказательству утвердительных предложений, так как запутанность и уловки для их получения являются намного более беспокойными, чем те, которые я использую для отрицающих предложений. Поэтому когда мне пришлось доказывать, что *всякое простое число, являющееся кратным* 4, *увеличенным на* 1, *состоит из двух квадратов*, я испытал немало мучений. Но в конце концов размышление, много раз повторенное, осветило мой ум, и теперь утвердительные предложения также подходят под мой метод, к которому добавлены некоторые новые принципы, оказавшиеся необходимыми. Ход моих рассуждений при этом таков: если произвольно взятое простое число вида $4n + 1$ не есть сумма двух квадратов, [я доказываю, что] тогда существует другое число той же самой природы, меньшее выбранного вначале, а [затем], что существует третье, еще меньшее число, и так далее. Продолжая так бесконечный спуск, я прихожу, наконец, к числу 5 — к наименьшему простому числу такого вида [$4n+1$]. [Из нашего предположения и в результате рассуждения] следует, что 5 не является суммой двух квадратов, однако оно является ею. Следовательно, мы можем заключить *от противного*, что все простые числа вида $4n+1$ суть суммы двух квадратов».

Вся трудность применения спуска к новой задаче заключается в первом шаге — в доказательстве того, что *если* наше предположение *верно* для любого числа данного вида, выбранного наугад, *то* оно будет *верно* и для *меньшего* числа *того же вида*. Не существует общего метода, применимого ко всем задачам, как именно делать первый шаг. Чтобы найти правильный путь, иногда, как в пустыне, требуется нечто большее, чем тупое терпение или пресловутое «бесконечное упорство». Те, кто думают, что гений — это не больше, чем простая способность корпеть над бумагами, могут попытаться приложить свое бесконечное терпение к доказательству последней теоремы Ферма. Но до того, как мы ее сформулируем, дадим еще один пример обманчиво простой на вид задачи, которую Ферма рассмотрел и решил. Он введет нас в область *Диофантова анализа*, в котором Ферма был несравненным мастером.

Каждый, кто возился с числами, испытывал, вероятно, замешательство перед тем любопытным фактом, что $27 = 25 + 2$. Суть заключена здесь в том, что 27 и 25 — это точные степени, именно $27 = 3^3$ и $25 = 5^2$. Следовательно, мы замечаем, что уравнение $y^3 = x^2 + 2$ имеет решение *в целых числах* x и y; решение это таково: $y = 3$, $x = 5$. В качестве теста превосходства своего ума читатель может взять доказательство того, что это *единственная* пара целых чисел, удовлетворяющих уравнению. Такое доказательство не является легким. Оно, хотя и кажется детской вещью, требует бо́льших способностей мышления, чем для постижения теории относительности.

Уравнение $y^3 = x^2 + 2$ *с ограничением, что его решение x и y* — целые числа, есть *неопределенное* уравнение (так как здесь больше неизвестных, чем уравнений, именно два неизвестных x и y и одно связывающее их уравнение), или же *диофантово уравнение*, по имени древнего грека, который одним из первых рассматривал *целочисленные* решения уравнений, или, менее ограничительно, *рациональные* (дробные) решения. *Без* ограничения целочисленности нетрудно указать бесчисленное множество решений. Так, можно придать x *любое* значение и затем определить y путем извлечения кубического корня из $x^2 + 2$. Но *диофантова* задача отыскания *всех целочисленных* решений — совсем другое дело. Решение $y = 3$, $x = 5$ отыскивается подбором; сложность задачи состоит в доказательстве того, что нет *никаких других* целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению. Ферма доказал, что их нет, но, как обычно, умолчал о своем доказательстве, которое нашли только много лет спустя после его смерти.

На этот раз он не высказывал догадки; задача является трудной. Он утверждал, что располагает доказательством, и доказательство позже было найдено. И так было со всеми утвердительными предложениями, за исключением одного утверждения, кажущегося простым, составляющего содержание его Последней теоремы, которое математики не могут доказать в течение более 300 лет: когда Ферма утверждал, что он *доказал* что-то, утверждение, кроме указанного исключения, в дальнейшем доказывалось. Его скрупулезная честность и несравненные арифметические способности заставляли предполагать многих, хотя и не всех, что он знал, о чем говорил, когда утверждал, что располагает доказательством теоремы.

Ферма имел привычку, читая труды Диофанта в издании Баше, записывать результаты своих размышлений в виде коротких замечаний на полях своего экземпляра книги. Эти поля не были подходящими для записи доказательств. Поэтому, комментируя восьмую задачу второй книги «Арифметики» Диофанта, состоящую в отыскании рациональных решений уравнения $x^2 + y^2 = a^2$, Ферма написал: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, и, вообще, никакую степень, бóльшую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком малы» (Ферма, Oeuvres, III, p. 241)[1]. Это и есть знаменитая Последняя теорема, которую он установил около 1637 г.

Переформулируем ее на современном языке. Задача Диофанта состоит в отыскании x, y и a, целых или дробных, таких, что $x^2 + y^2 = a^2$. Ферма утверждает, что *не* существует целых или дробных чисел, таких, что $x^3 + y^3 = a^3$, или $x^4 + y^4 = a^4$, или вообще $x^n + y^n = a^n$, если n — целое число, большее, чем 2.

Задача Диофанта имеет бесконечное множество решений; примеры: $x = 3$, $y = 4$, $a = 5$; $x = 5$, $y = 12$, $a = 13$. Сам Ферма дал доказательство своим методом бесконечного спуска невозможности равенства $x^4 + y^4 = a^4$. С тех пор невозможность решения уравнения в целых (или дробных) числах доказана для многих значений n (для всех простых чисел*, меньших, чем $n = 14\,000$, если ни одно из чисел x, y, a не делится на n). Но это не то, что нужно. Требуется дать доказательство для *всех* n, бóльших, чем 2. Ферма утверждал, что он располагал таким «чудесным» доказательством.

После всего, что было сказано, похоже, что он обманулся. Мы оставляем этот вопрос читателю. Один из гигантов арифметики, Гаусс, высказался против Ферма. Но ведь, лиса, которая не может достать виноград, заявляет, что он незрелый. Другие согласны с Ферма. Ферма был первоклассным математиком, безупречно честным человеком и непревзойденным в истории арифметиком.

---

[1] См. также: Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах. М., 1974, с. 197.

* Читатель может легко увидеть, что достаточно рассмотреть случай, когда n есть нечетное простое число, поскольку, как известно из алгебры, $u^{ab} = (u^a)^b$, где u, a, b — любые числа.

ГЛАВА ПЯТАЯ

„ВЕЛИЧИЕ И НИЧТОЖНОСТЬ ЧЕЛОВЕКА“

ПАСКАЛЬ (1623—1662)

> *...Теория вероятностей по своей сути есть не что иное, как здравый смысл, сведенный к вычислениям; она позволяет нам точно оценивать то, что разум чувствует как бы инстинктивно, часто не будучи в состоянии объяснить это... Замечательно, что [эта] наука, началом которой были рассуждения об азартных играх, должна стать одним из важнейших предметов человеческого знания.*— П. С. ЛАПЛАС

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ, который был на 27 лет моложе своего современника Декарта, родился во французском городе Клермоне, в Оверни, 19 июня 1623 г. и пережил Декарта на 12 лет. Его отец, Этьен Паскаль, председатель налогового управления Клермона, был человеком большой культуры и с интеллектуальными запросами; его мать, Антуанетта Бегон, умерла, когда ему было 4 года. У Паскаля было две красивых и талантливых сестры: Жильберта и Жаклин. Обе они, особенно последняя, играли важную роль в его жизни.

Блез Паскаль хорошо известен широким читательским кругам по своим двум классическим литературным произведениям — «Размышлениям» и «Письмам провинциала». Его математическим занятиям принято отводить несколько абзацев, теряющихся в обширных описаниях его деятельности. Наша точка зрения несколько иная, и мы рассмотрим Паскаля в первую очередь как высокоодаренного математика, постепенно деградировавшего к неврастеническому состоянию.

По своей потенциальной математической силе Паскаль, возможно, является первым во всей истории. Ему не повезло в том, что он только несколькими годами предшествовал Ньютону и жил в одно время с Декартом и Ферма — гораздо более основательными людьми, чем он сам. Его наиболее новаторская работа — создание теории вероятностей — пересекается с аналогичными трудами Ферма, который легко мог бы сделать все один. В геометрии, где он в детстве прославился своими феноменальными способностями, его творческие идеи побуждались значительно менее знаменитым Дезаргом.

Как ученый-экспериментатор Паскаль обладал значительно более ясным пониманием научного метода, чем Декарт (с современной точки зрения), но он не был таким целеустремленным человеком, как Декарт.

Говоря о Паскале как о математике, можно считать, что он совершил то, на что был способен, и что ни один человек не может сделать больше. Его жизнь представляет собой историю человека, погубившего свой талант. Если когда-либо существовал высокоодаренный человек, решивший хранить молодое вино естествознания XVII в. в сосуде средневековых представлений, это был Паскаль.

В возрасте 7 лет Паскаль переехал с отцом и сестрами из Клермона в Париж. В это время отец начал с ним заниматься. Паскаль и его сестры от природы были одарены значительно больше, чем это выпадает на долю среднего человека. Но бедный Блез унаследовал не только блестящий ум, но и слабое здоровье.

Сперва все шло достаточно хорошо. Паскаль старший, пораженный легкостью, с которой его сын поглощает плоды тогдашнего классического образования, пытался умерить его пыл в учебе, чтобы оградить его здоровье от опасности. На математику был наложен запрет, так как было сочтено, что юный гений может перенапрячь свой мозг. Запрещение заниматься математикой, естественно, только разожгло любопытство мальчика. Однажды в возрасте примерно 12 лет Паскаль пожелал узнать, что представляет собой геометрия. Отец дал ему ясное описание этой науки. Оно поразило Паскаля так, будто он увидел свое настоящее призвание. Потом он изменил свое мнение, но все же он был рожден не для того, чтобы сокрушать иезуитов, а стать великим математиком. В решающий момент внутренний голос обманул его, и он вступил на неверный путь.

Рассказ, связанный с тем, как юный Паскаль изучал геометрию, стал одной из легенд о его раннем математическом развитии. Между прочим, следует заметить, поразительные математические способности в детстве не всегда приводят к тому, что от них ожидают. Раннее математическое развитие часто связано просто с первой вспышкой зрелости ума, хотя его, как правило, оценивают наоборот. Но у Паскаля ранний математический гений не погас, а был заглушен другими интересами. Способность получать первоклассные результаты в математике сохранялась в нем до конца его слишком короткой жизни, как это видно из эпизода с циклоидой, а его сравнительно ранняя математическая кончина, была, вероятно, обусловлена болезнью желудка. Первым его математическим подвигом было доказательство, проведенное целиком по собственному почину, без использования какой-либо книги, того, что сумма трех углов треугольника составляет два прямых угла. Это вдохновило его на продвижение вперед семимильными шагами.

Поняв, что его сын — прирожденный математик, Паскаль старший дал ему «Начала» Евклида. Эта книга была проглочена очень быстро — не как задание, а как игра. Мальчик своими играми сделал занятия геометрией. В связи с быстрым усвоением Паскалем

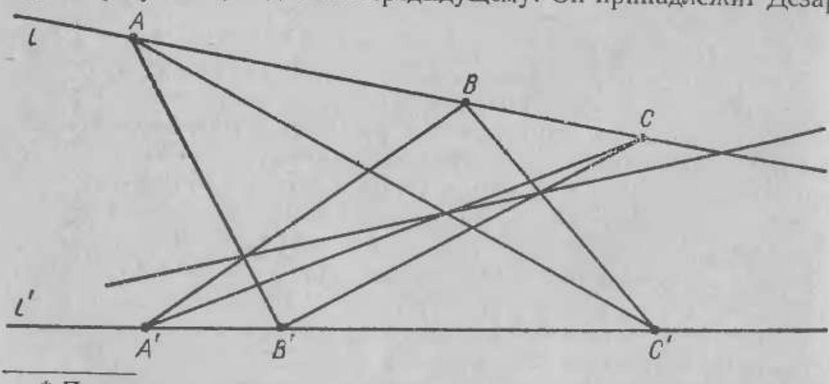
«Начал» Евклида, Жильберта позволила себе допустить потом некоторые преувеличения. Разумеется, можно простить Жильберте ее хвастовство: ее брат стоил этого. В 14-летнем возрасте он был уже допущен к ежедневным научным дискуссиям, проводимым Мерсенном, из которых выросла впоследствии Французская академия наук.

Пока юный Паскаль в течение короткого времени самостоятельно осваивал геометрию, старший Паскаль из-за своей честности и прямоты нажил себе неприятности по службе. В частности, он вступил в разногласия с кардиналом Ришелье по поводу некоторых налогов. Кардинал пришел в ярость; семье Паскаля пришлось скрываться, пока буря не улеглась. Они нашли приют и безопасность в Руане. Там юный Паскаль встретил знаменитого драматурга Корнеля, который был весьма поражен гениальностью подростка. В то время Паскаль был всецело поглощен математикой, так что Корнель, вероятно, и не подозревал, что его молодой друг станет одним из великих создателей французской литературы.

Все это время Паскаль непрерывно учился. Ему еще не было шестнадцати (около 1639 г.), когда он доказал одну из самых красивых теорем всей геометрии*. К счастью, ее можно объяснить на языке, понятном каждому. Мы рассмотрим сначала частный случай общей теоремы, в котором построения выполнимы с помощью одной лишь линейки.

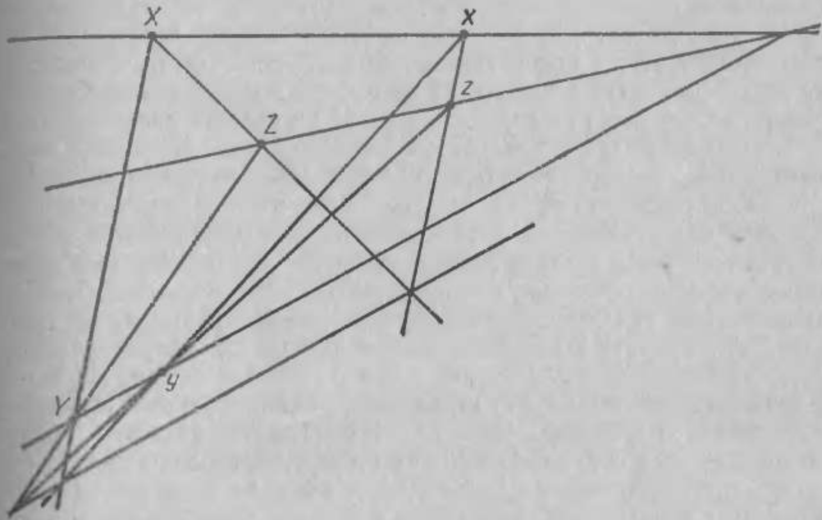
Обозначим пересекающиеся прямые через l и l'. На l возьмем любые три различные точки A, B и C, а на l' — другие три различные точки A', B' и C'. Соединим эти точки прямыми накрест, таким образом: A и B', A' и B, B и C', B' и C, C и A', C' и A. Две прямые каждой из этих пар пересекаются в некоторой точке. Всего получаем три таких точки пересечения. Частный случай теоремы Паскаля, рассматриваемый сейчас нами, утверждает, что эти точки лежат на одной прямой.

Перед тем как дать общую формулировку теоремы, упомянем другой результат, подобный предыдущему. Он принадлежит Дезар-



* По мнению авторитетов, возраст Паскаля, когда он сделал это, колеблется от 15 до 17 лет.

гу (1593—1662). Если три прямые, соединяющие соответственные вершины двух треугольников XYZ и xyz, пересекаются в одной точке, то три точки пересечения пар соответствующих сторон (их продолжений) лежат на одной прямой. Так, *если* прямые, соединяющие точки X и x, Y и y, Z и z, пересекаются в одной точке, *то* точки пересечения прямых XY и xy, YZ и yz, XZ и xz лежат на одной прямой.



В главе 2 говорилось, что такое коническое сечение. Вообразим любое коническое сечение, скажем, для определенности, эллипс. Пометим на нем любые 6 точек: A, B, C, D, E, F — и соединим их в этом порядке прямыми. Получим шестисторонник, вписанный в коническое сечение, в котором AB и DE, BC и EF, CD и FA являются парами противоположных сторон. Две прямые каждой из этих трех пар пересекаются и три получаемые таким образом точки пересечения лежат на одной прямой (см. рисунок в главе 13). Это и есть теорема Паскаля. Вероятно, он доказал теорему вначале для окружности, а затем перешел с помощью проектирования к любому коническому сечению. Для построения в случае окружности нужны только линейка и циркули двух растворов.

В своем «Трактате о конических сечениях», содержащем его великую теорему как центральное положение, этот поразительно одаренный 16-летний юноша изложил не менее 400 предложений о конических сечениях, включая вклад Аполлония и других авторов, в систематическом порядке в виде следствий своей теоремы, полагая пары из рассматриваемых шести точек двигающимися до совпадения, так что секущая становится касательной, и другими способами. «Трактат» в своем полном виде никогда не был опубликован и, вероятно, безвозвратно утерян, но Лейбниц видел и читал его в переписанном виде. *Разновидность* геометрии, которой здесь занимался Паскаль, фундаментальным образом отличается от геометрии древних греков. Это не *метрическая* геометрия, а *проективная.* Величины отрезков и углов не входят ни в утверждение, ни в доказательство теорем. Уже одна эта теорема опровергает определение математики, идущее от Аристотеля и иногда повторяемое в словарях, как науки о «количестве». В геометрии Паскаля нет «количеств».

Чтобы понять, что означает *принадлежность* теоремы проективной геометрии, вообразим (круговой) конус света, исходящий из некоторой точки и падающий на плоское стекло. Если это стекло поворачивать, мы будем видеть на нем различные *конические сечения*, которые будут ограничивать световое пятно. Если нарисовать на стекле шестисторонник Паскаля так, чтобы его *коническое сечение* совпадало с ободом пятна, а затем поставить на пути световых лучей еще одно стекло, то на втором стекле *получим другой шестисторонник Паскаля*, в котором три точки пересечения пар противоположных сторон будут лежать на прямой, являющейся тенью аналогичной прямой первоначального шестисторонника. Это означает, что теорема Паскаля *инвариантна* (неизменна) *при коническом проектировании.* Метрические же свойства фигур, изучаемые в элементарной геометрии, не являются инвариантными при проектировании. Например, тень прямого угла не является прямым углом для всех положений второго стекла. Очевидно, что *проективная*, или *дескриптивная*, геометрия — это одна из геометрий, естественным образом приспособленная к некоторым задачам перспективы. *Метод* проектирования был использован Паскалем при доказательстве своей теоремы, но еще раньше он был применен Дезаргом при выводе приведенного выше утверждения о двух треугольниках, «перспективно» расположенных. Паскаль в полной мере отдал дань замечательному открытию Дезарга.

Слава, широкая известность были куплены дорогой ценой. Начиная с 17-летнего возраста и до конца своей жизни до 39 лет Паскаль постоянно страдал от физических болей. Острая диспепсия причиняла ему постоянные мучения, а хроническая бессонница приводила к ночным кошмарам. Тем не менее он постоянно работал. В возрасте 18 лет он изобрел и сделал первую в истории вычислительную машину, которая является предшественницей всех арифметических машин, заменяющих массы людей при выполнении счетной работы в наше время[1]. Дальше мы увидим, к чему привело это его искусное изобретение. Пятью годами позже, в 1646 г., Паскаль пережил свое первое «обращение». Оно, правда, не

[1] Недавно выяснилось, что в изобретении счетной машины Паскаля примерно на 20 лет опередил друг Кеплера Вильгельм Шикард (1592—1635), однако его машина, изготовленная в единственном экземпляре, не сохранилась. Имеется лишь ее описание.

стало еще тогда роковым, так как Паскалю было всего 23 года и он увлеченнс занимался математикой.

Семья Паскалей в 1646 г. приняла веру янсенистов — религиозных реформаторов, боровшихся против иезуитов. Так 23-летний Паскаль пошел навстречу своей медленной духовной смерти.

Его величие как ученого вспыхнуло вновь в 1648 г. в совершенно новой области. Изучая работы Торричелли (1608—1647) по атмосферному давлению, Паскаль превзошел его и показал, что он понял научный метод, предложенный Галилеем, учеником которого был Торричелли. Экспериментируя с барометром, который он усовершенствовал, Паскаль установил те факты, которые теперь известны всякому, кто начинал изучать физику атмосферы. Его сестра Жильберта вышла замуж за Перье. По предложению Паскаля Перье провел опыт с поднятием барометра на возвышенности Пюи де Дом в Оверни и обнаружил, что ртутный столбик понижается из-за уменьшения атмосферного давления. Позже, переехав со своей сестрой Жаклин в Париж к отцу, Паскаль повторит опыт, получив тот же результат.

Вскоре после возвращения Паскаля с сестрой в Париж к отцу, который был восстановлен в должности государственного советника, семье был нанесен как бы формальный визит со стороны Декарта. Он и Паскаль обсуждали многие вопросы, включая опыты с барометром. Но между ними не возникло привязанности. С одной стороны, Декарт открыто отказывался верить тому, что знаменитый «Трактат о конических сечениях» был написан 16-летним юношей. С другой стороны, Декарт подозревал, что Паскаль позаимствовал идею опытов с барометром у него самого, так как их возможность он обсуждал в письмах к Мерсенну. Как уже упоминалось, Паскаль посещал еженедельные ученые собрания у Мерсенна с 14-летнего возраста. Третья причина для неприязни обеих сторон друг к другу порождалась взаимной религиозной антипатией. Наконец, по откровенному признанию Жаклин, ее брат и Декарт сильно завидовали друг другу. Визит был довольно холодным.

Тем не менее Декарт дал своему юному другу некоторые превосходные советы относительно сна и диеты. Однако Паскаль игнорировал их, возможно, потому, что они исходили от Декарта. (Паскаль не обладал чувством юмора.)

В это время Жаклин начала подавлять гений своего брата. В 1648 г. в прекрасном 23-летнем возрасте, Жаклин объявила о своем намерении переселиться в Пор Ройяль, близ Парижа, в главное убежище французских янсенистов, и стать монахиней. Отец горячо воспротивился этому, и Жаклин пришлось сосредоточить свои усилия на религиозном воспитании своего заблуждающегося брата. (Он стал убежденным янсенистом.) На два года семья вернулась в Клермон. Состояние здоровья Паскаля несколько улучшилось.

Беспокойная семья возвратилась в Париж в 1650 г. В следующем году умер отец Паскаля. Теперь распорядителем поместья, стал Блез Паскаль, у него появилась возможность расширить общение со своими последователями. Жаклин удалилась в Пор Ройяль, отец не мог больше этому помешать.

Письмо, написанное в предыдущем (1650) году, показывает еще одну грань характера Паскаля, или, возможно, его зависть к Декарту. Ослепленный блеском шведской королевы Кристины, Паскаль смиренно умоляет «величайшую принцессу мира» принять в дар его вычислительную машину. Что делала Кристина с этой машиной, неизвестно, но быть учителем она его не пригласила.

23 ноября 1654 г. Паскаль ехал с большой скоростью на четверке лошадей. Две передние лошади перелетели через парапет моста вниз, но по счастливой случайности постромки оборвались, и Паскаль остается жив. Весь остаток жизни его преследовали галлюцинации, связанные с пропастью, разверзшейся у его ног.

Частично по собственному побуждению, частично из-за настойчивых просьб Жаклин Паскаль отвернулся от всего мирского и переехал жить в Пор Ройяль, где он окончательно похоронил свой талант. Это было в 1654 г., когда ему был 31 год. Но перед тем, как навсегда погубить свое тело и свой ум, он все же сделал свой важнейший вклад в математику, создав вместе с Ферма математическую теорию вероятностей.

Его жизнь в Пор Ройяле протекала спокойно. Именно там он написал свои знаменитые «Письма провинциала». Эти прославленные письма (их было 18; их публикация началась в 1656 г.) служат образцом искусства диалектики; они нанесли по иезуитам такой удар, от которого те уже никогда не могли полностью оправиться.

Наряду с этим Паскаль был еще способен создавать блестящие математические работы, хотя он рассматривал научные занятия как проявление тщеславия. Примером является знаменитый случай с циклоидой.

Эта красивая кривая (ее образует траектория фиксированной точки окружности, катящейся по прямой линии) впервые появилась в математической литературе около 1501 г., когда Шарль Бувель описал ее в связи с задачей квадратуры круга. Галилей и его ученик Вивиани изучали эту кривую и решили задачу построения касательной в произвольной ее точке (эту задачу Ферма решил сразу же, как только она была сообщена ему). Галилей предложил использовать циклоиду при построении арок мостов. Со времени широкого применения железобетона циклоидальные арки стали часто встречаться. По соображениям механического

характера (неизвестным Галилею) циклоидальная арка предпочтительнее любой другой. Среди знаменитых людей, изучавших циклоиду, был архитектор из Лондона Кристофер Рен, который нашел длину любой дуги циклоиды и центр тяжести этой дуги. Гюйгенс использовал циклоиду при создании маятниковых часов. Одно из наиболее красивых открытий Гюйгенса (1629—1695) состоит в доказательстве *таутохронности* этой кривой: если циклоиду повернуть выпуклостью вниз и поместить на образующийся склон в *любом* его *месте* шарик, то под действием силы тяжести он, скользя вдоль кривой, достигнет самого низкого положения в течение *одного и того же времени*. Благодаря своей строгой красоте, изящным свойствам и бесконечным спорам, которые она вызывала между математиками, предлагающими один другому решить ту или иную связанную с ней задачу, циклоида была названа «Еленой Геометрийской» — по примеру той Елены, чье прекрасное лицо, как говорят, «отправило тысячи судов» на греко-троянскую войну.

Паскаль за 8 дней построил для себя геометрию циклоиды и преуспел в решении многих важных задач, связанных с этой кривой. Некоторые из этих открытий были им опубликованы под псевдонимом Амос Деттонвиль как вызов французским и английским математикам. В своем отношении к своим соперникам в этих вопросах Паскаль не всегда был таким скрупулезным, каким он мог бы быть. Это последняя вспышка его математической активности и его единственный вклад в науку, сделанный после переезда в Пор Ройяль.

В том же году (1658) Паскаль заболел еще серьезнее, чем прежде, и вынужден был перебраться жить к своей замужней сестре. 19 августа 1662 г. его мученическое существование прекратилось. Он умер в возрасте 39 лет.

Вопреки всему, Паскаль сделал крупные открытия в математике и в естествознании, оставил во французской литературе имя, все еще уважаемое спустя 3 столетия.

То, что было сделано Паскалем в геометрии, возможно, за исключением теоремы о шестисторожнике, было бы сделано, если бы не им, то кем-то другим. Особенно это относится к исследованию циклоиды. После изобретения математического анализа все это стало несравнимо легче, чем раньше, а сейчас включается в учебники в качестве лишь упражнений для начинающих студентов. Но в своем совместном с Ферма создании теории вероятностей Паскаль открыл новый мир. Похоже, что память о Паскале-математике, участнике этого замечательного открытия, значение которого все более возрастает, переживет его славу писателя. В теории вероятностей Паскаль рассмотрел и решил сто́ящую задачу подчинения кажущегося беспорядочным чистого случая строгой закономерности. Эта тонкая теория теперь представляется одним из истинных корней человеческого знания и не в меньшей степени основанием физической науки. Ее проявления распространены повсюду — от квантовой механики до биологии.

Основателями математической теории вероятностей были Паскаль и Ферма, развившие ее основные положения в переписке, происходившей в 1654 г. Эта переписка опубликована в 1904 г.

Паскаль и Ферма сделали равные по значению вклады в основание теории. Их правильные решения задач отличаются в деталях, но не в основных положениях. Преодолевая необходимость утомительного перебора возможных случаев, Паскаль в одной задаче попытался сократить вычисления и впал в ошибку. Ферма указал на эту ошибку, которую Паскаль признал.

Отправная задача, послужившая началом всей обширной теории, была поставлена перед Паскалем неким шевалье де Мере — более или менее профессиональным игроком. Задача касается «очков»: если два игрока, например, в кости прерывают игру раньше, чем кем-либо из них набрано необходимое для выигрыша количество очков, то как следует поделить между ними ставки? Количества очков каждого из игроков в момент прекращения игры даны. Задача, следовательно, сводится к определению вероятности, с которой каждый игрок может выиграть, продолжая игру с данным количеством очков. Предполагается, что условия выпадения очков одинаковы для обоих игроков. Решение этой задачи не требует ничего, кроме обычного здравого смысла; *математический* аспект вероятности появляется тогда, когда мы вводим метод перебора возможных случаев без фактического их пересчета. Например, сколько возможно различных вариантов сдачи 6 карт, из которых 3 карты — двойки, а 3 другие — нет, при колоде из 52 карт? Или: сколько имеется способов выпадения 3 тузов, 5 двоек и 2 шестерок при сдаче 10 карт той же колоды? Еще одна безделица того же типа: сколько различных ожерелий можно сделать, употребляя 10 жемчужин, 7 рубинов, 6 изумрудов и 8 сапфиров, если камни одного сорта считаются неразличимыми?

Нахождение с подробностями числа способов, которые позволяют сделать то, что предписано, или случиться вполне определенному явлению, относится к так называемому *комбинаторному анализу*. Его применимость к теории вероятностей очевидна. Предположим, например, что мы хотим узнать вероятность выпадения двух единиц и одной двойки при одном бросании трех костей. Если нам известно *полное* количество возможных вариантов (оно равно $6 \cdot 6 \cdot 6$, или 216) выпадения очков при бросании трех костей, а также количество способов, при которых могут выпасть две единицы и одна двойка (пусть это количество равно n, читатель может найти это число самостоятельно), то искомая вероятность равна $n/216$ (в примере n равно 3, так что она равна 3/216).

В связи с задачами комбинаторного анализа и теории вероятностей Паскаль широко использовал числовой треугольник

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot,
\end{array}$$

в котором числа любого ряда, кроме первых двух, получаются из предыдущего ряда повторением крайних единиц и сложением последующих (слева направо) пар чисел предшествующего ряда. Так $5 = 1 + 4$; $10 = 4 + 6$; $10 = 6 + 4$; $5 = 4 + 1$. Числа n-го ряда представляют собой количества возможных различных наборов из одного, двух, трех и так далее предметов из n разных предметов. Например, 10 есть число различных пар предметов, которые можно выбрать из пяти разных предметов. Эти числа суть также коэффициенты разложения бинома $(1 + x)^n$. Так, для $n = 4$

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Треугольник Паскаля обладает также многими другими интересными свойствами. Хотя он был известен и до Паскаля, он обычно называется так ввиду искусного его применения Паскалем к вычислению вероятностей.

Теория, которая возникла из-за спора игроков, теперь служит основой многих рассмотрений, которые мы считаем значительно более важными, чем те, которые встретились при бросании костей[1]. Сюда относятся вопросы страхования разных видов, математической статистики и ее применений к биологии и социологии, многое из современной теоретической физики. Сейчас мы уже не считаем, что электрон «находится» в данной точке в данный момент; мы можем лишь вычислить вероятность его пребывания в данной области. Небольшое размышление показывает, что производимые нами даже простейшие измерения (когда мы пытаемся измерить что-то точно) имеют статистический характер.

Скромный исток этой исключительно полезной математической теории весьма поучителен. Некоторая кажущаяся простой задача, вначале решенная, возможно, лишь из простого любопытства, ведет к глубоким обобщениям, что в случае современной статистической теории атома в квантовой теории вызывает пересмотр всей нашей концепции физической вселенной. Применение же статистических методов к разработке интеллектуальных тестов и к изучению наследственности могут привести нас к изменению традиционных взглядов на «величие и ничтожность человека». Ни Паскаль, ни Ферма, конечно, не могли предвидеть, во что разрастется их малопочтенное создание. Ткани математической науки характерно такое тесное переплетение нитей, что ни одну из них, как бы она ни была запутана, нельзя исключить, не опасаясь нарушения цельности.

---

[1] Некоторые из этих рассмотрений, особенно практические вопросы статистики и страхования, появлялись во времена Паскаля и Ферма и даже раньше.

Первым печатным трудом по теории вероятностей было сочинение Х. Гюйгенса «О расчетах в азартной игре» (1657), который отмечал, что «при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории».

ГЛАВА ШЕСТАЯ

НА БЕРЕГУ ОКЕАНА

НЬЮТОН (1642—1727)

Метод флюксий есть универсальный ключ, которым современные математики открывают секреты Геометрии, а следовательно, и природы. — БЕРКЛИ

Я не измышляю гипотез. — И. НЬЮТОН

«Я НЕ ЗНАЮ, чем я могу казаться миру; но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени отыскивает камешек, более цветистый, чем обыкновенно, или более красивую раковину, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным».

Так оценил Исаак Ньютон свой труд на склоне своей долгой жизни. Но те из его последователей, которые были в состоянии понять хотя бы главную долю его работ, указывали на Ньютона как на самый могучий ум человеческой истории: «Тот, кто по гениальности превосходил род человеческий».

Исаак Ньютон родился 25 декабря (по старому стилю) 1642 г., в год смерти Галилея, в семье мелкого фермера в Вулсторпе, в восьми милях к югу от Грэнтхэма, в графстве Линкольн, в Англии. Его отец умер в возрасте 37 лет еще до рождения сына. При рождении Ньютон был слабым и тщедушным.

Отца Ньютона считали «диким, чудным и слабым человеком»; его мать, Анну Эйскоу, — экономной, умелой и способной хозяйкой. Выйдя замуж вторично, она оставила своего трехлетнего сына на попечение бабушки, позаботилась и о материальном обеспечении сына. Ньютон был одним из тех великих математиков, перед которыми не возникала необходимость борьбы с нищетой.

Ньютон не был крепким мальчиком, поэтому в детстве он избегал участвовать в грубых играх своих сверстников. Его непревзойденный экспериментальный гений, выразившийся в исследовании им тайн света, выявлялся в изобретательности его детских забав, которые он сам придумывал себе, в самостоятельном изготовлении разнообразных действующих игрушек, таких, как водяное колесо, мельница, солнечные и стенные часы. Таковы были вещи, в которых раскрывались его интересы. Он невероятно много читал и с помощью придуманной им системы сокращений записывал в свою тетрадь все, что поражало его в книгах.

Начальное образование Ньютон получил в деревенской школе своего округа. Дядя по материнской линии, Вильям Эйскоу, вероятно, был первым, кто заметил, что Ньютон представляет собой что-то необычное. Он в конце концов убедил мать Ньютона отправить в Кембридж своего сына, вместо того чтобы держать Исаака дома как помощника по управлению фермой в Вулсторпе. (Ее второй муж умер, когда Ньютону было 15 лет.)

Однако еще до этого Ньютон перешел свой Рубикон по собственной инициативе. По совету дяди он поступил в Грэнтхэмскую среднюю школу. Учась там во 2-м классе, Ньютон стал однажды жертвой жестокости своего глупца-одноклассника, который ударил его в живот, причинив страшную боль. Разъяренный Ньютон вызвал обидчика на честную схватку и победил его. После этого случая Ньютон, который раньше не проявлял к урокам особого интереса, решил доказать, что его голова так же хороша, как его кулаки, и скоро стал первым учеником всей школы. Директор — дядя Ньютона Эйскоу решил, что Исаак Ньютон готов для Кембриджа, когда застал племянника читающим в тени кустарника в то время, когда он должен был помогать по хозяйству.

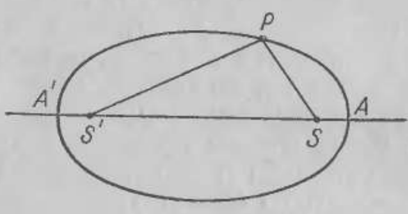
Учась в Грэнтхэмской школе и потом, готовясь к Кембриджу, Ньютон жил на квартире у мистера Кларка, деревенского аптекаря. На чердаке аптеки Ньютон обнаружил множество старых книг (которые он тут же прочитал), а в самом доме его сердце поразила падчерица Кларка, мисс Стори. Он обручился с нею, перед тем как в июне 1661 г. уехать из Вулсторпа в Кембридж в возрасте 19 лет. Хотя Ньютон всегда с теплотой вспоминал о своей первой и единственной сердечной привязанности, но рассеянность и возрастающая занятость работой отодвинули назад романтику, и Ньютон так и не женился.

Перед тем как обратиться к студенческим годам Ньютона в Тринити-колледже Кембриджского университета, бросим беглый взгляд на Англию тех времен и на совокупность научных знаний, наследником которых становился молодой ученый. Ньютон рос в атмосфере гражданской войны — политической и религиозной, в которой и пуритане и роялисты одинаково грабили население для пополнения ресурсов своих сражающихся армий.

Зверства и лицемерие того времени оказали воздействие на формирование характера юного Ньютона. Он на всю жизнь возненавидел тиранию, угнетение и обман. Когда король Яков впоследствии пытался вмешиваться в университетские дела, великому математику и философу не нужно было объяснять, что решительная демонстрация твердости и объединение всех тех, кому угрожает потеря свободы, являются самыми эффективными средствами борьбы против ничем не брезгующих политиканов. Он знал это не только инстинктивно, но и в результате наблюдений.

Ньютону приписывают слова: «Если я увидел несколько дальше других, то только потому, что стоял на плечах гигантов». Это верно. Среди самых великих из этих гигантов были Декарт, Кеплер и Галилей. От Декарта Ньютон получил аналитическую геометрию, которая сперва казалась ему очень трудной; от Кеплера — три основных закона движения планет, открытых эмпирически после двадцати двух лет нечеловеческих вычислений; от Галилея — первые два из трех законов движения, ставшие ядром его собственной механики. Но кирпичи не являются еще домом. Ньютон стал архитектором, построившим динамику и небесную механику.

Поскольку законы Кеплера играли центральную роль в развитии ньютоновской теории всемирного тяготения, мы приведем их здесь полностью.



I. *Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам; Солнце находится в одном из фокусов этих эллипсов.* (Если S и S' суть фокусы эллипса, а P — любая точка, в которой находится планета на своей орбите, то $SP + PS'$ всегда равна AA'— большой оси эллипса; см. рис.)

II. *Линия, соединяющая Солнце с планетой, описывает в равные отрезки времени равные площади.*

III. *Квадраты времен обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца.*

Эти законы могут быть доказаны на одной-двух страницах, средствами математического анализа с использованием ньютоновского закона всемирного тяготения:

Всякие две материальные частицы притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Так, если m и M — массы двух частиц и d — расстояние между ними (измеренные в соответствующей системе единиц), то сила их взаимного притяжения есть $\frac{k \cdot m \cdot M}{d^2}$, где k —некоторая постоянная (соответствующим выбором системы единиц измерения масс и расстояний можно сделать эту постоянную равной 1 и получить закон в простой форме $\frac{m \cdot M}{d^2}$).

Для полноты мы сразу же сформулируем и три ньютоновские закона механики:

I. *Всякое тело остается в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока не будет вынуждено действием силы выйти из этого состояния.*

II. *Изменение количества движения* [произведение массы на скорость] *пропорционально действующей силе и происходит вдоль того направления, по которому действует сила.*

III. *Действие и противодействие* [как, например, при столкновении на идеально гладком столе двух абсолютно упругих шаров] *равны по величине и противоположны по направлению* [количество движения, теряемое одним шаром, приобретается другим].

Наиболее важное с математической точки зрения выражение во всех этих утверждениях открывает второй закон механики: *изменение количества движения*. Какова мера этого изменения? Количество движения, как было сказано, есть произведение массы на скорость. Массы, о которых говорил Ньютон, считались постоянными, в отличие от того, что мы знаем сейчас о массе, например, электрона, движущегося со скоростью, близкой к скорости света. Поэтому, чтобы исследовать «изменение количества движения», Ньютону достаточно было выяснить понятие *скорости*, являющейся мерой изменения положения. Решив эту задачу, он дал удобный, хотя не совсем строгий, математический метод исследования скорости движущейся любым образом частицы, обрел ключ, открывающий дверь к тайнам самых различных изменений и их измерений, а именно к *дифференциальному* исчислению.

Подобная задача, встающая в связи с изменением величин, привела к созданию им *интегрального* исчисления. Как вычислить полный путь, пройденный движущейся с переменной скоростью частицей за данный промежуток времени? Отвечая на этот и некоторые другие подобные вопросы, иногда геометрического характера, Ньютон пришел к интегральному исчислению. Наконец, размышляя над задачами обоих типов сразу, Ньютон сделал капитальное открытие: дифференциальное и интегральное исчисление тесно взаимосвязаны тем, что сейчас называют «основной теоремой анализа»[1]. О ней мы расскажем в соответствующем месте.

В добавление к тому, что Ньютон унаследовал от своих предшественников в естествознании и математике, он, как истинный сын своего времени, сильно увлекался богословием и проявлял неугасимое влечение к алхимии. Осуждать его за то, что он отдавал часть своего несравненного ума этим двум вещам, которые сегодня представляются не стоящими серьезного внимания,— значит отрываться от времени. Во времена Ньютона алхимия *была* химией, и тогда *не* было еще показано, что в ней не содержалось абсолютно ничего путного, кроме вышедшей из нее современной химии. Ньютон — человек с врожденным научным мышлением — должен был лично проверить *с помощью эксперимента* все утверждения тогдашних алхимиков.

В июне 1661 г. Ньютон поступил в Кембридж, в Тринити-колледж, в качестве субсайзера — студента, который должен был совмещать учебу с выполнением услуг ради заработка. Гражданская

---

[1] Анализ появился у Ньютона в виде учения о флюентах (текущих величинах) и флюксиях (скоростях изменения флюент). В виде дифференциального и интегрального исчисления анализ был создан Лейбницем.

война, восстановление монархии в 1661 г. и раболепие части университетских деятелей перед короной привели к тому, что во времена обучения Ньютона Кембридж как учебное заведение дошел до одной из самых низких точек во всей своей истории.

Преподавателем математики у Ньютона был Исаак Барроу (1630—1677), математик и богослов, о котором было сказано, что столь блестящий и оригинальный ученый, каким он, несомненно, был в области математики, имел несчастье стать лишь предтечей Ньютона, утренней звездой, возвещавшей скорый восход солнца. Барроу охотно признал, что пришел некто превосходящий его и, когда настал момент (в 1669 г.), отказался от Люкасовской кафедры математики в пользу своего несравненного ученика. Геометрические лекции Барроу содержали, кроме многого другого, его собственные методы отыскания площадей и проведения касательных к кривым — ключевые вопросы дифференциального и интегрального исчисления, и эти лекции вдохновили Ньютона на его поиски.

Сведения о студенческой жизни Ньютона разочаровывающе скупы. Первые 2 года были посвящены изучению элементарной математики. Ни один из современных биографов Ньютона не указывает точно время, когда он проявил себя зрелым исследователем. Кроме того, что в течение трех лет (1664—1666; в возрасте от 21 до 23 лет) он заложил основы всех последующих своих работ в естествознании и математике и что непрерывный труд до поздней ночи привел его к болезни, мы не знаем ничего определенного. Это еще усугубилось тенденцией Ньютона к умолчанию обо всем, что касается его открытий.

С чисто человеческой стороны Ньютон был обычным студентом: иногда отдыхал и веселился. Степень бакалавра он получил в январе 1664 г.

Нашествие великой чумы (это была бубонная чума) в 1664—1665 гг. и ее более слабые вспышки в следующем году предоставили Ньютону вынужденный досуг. Университет был закрыт, и в течение почти двух лет Ньютон прожил в Вулсторпе. До этого времени он не добился еще ничего выдающегося. Во всяком случае, если достижения и были, он держал их в тайне. На протяжении этих двух лет он изобрел метод флюксий (анализ), открыл закон всемирного тяготения и доказал экспериментально, что белый солнечный свет представляет собой смесь компонентов разных цветов. Все это он сделал до 25 лет.

Рукопись, датированная 20 мая 1665 г., показывает, что Ньютон в возрасте 23 лет уже достаточно глубоко развил принципы анализа, так что мог находить касательную и кривизну в любой точке любой непрерывной кривой. Он назвал свой метод «методом флюксий» исходя из понятия «флюент», или переменных величин, и скоростей их «течения», или «роста» — «флюксий». Он установил биномиальную формулу, и это было существенным шагом в направлении к полной разработке анализа.

Биномиальная теорема обобщает простые соотношения, вроде таких:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

и других, которые устанавливаются непосредственным вычислением, и заключается в равенстве:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots ,$$

где точки означают, что дальнейшие члены ряда строятся по тому же самому принципу, что и написанные. Например, следующий член будет такой:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{n-4} \cdot b^4.$$

Если n есть положительное целое число 1, 2, 3, ..., то разложение автоматически обрывается на $n+1$-м члене. Это можно легко доказать методом математической индукции.

Но если n не есть положительное целое число, разложение никогда не окончится и такой метод доказательства будет непригодным. Поскольку строгое доказательство теоремы для дробных и отрицательных значений n с наложением необходимых ограничений на a и b было дано только в XIX в., мы примем здесь на веру, что обобщение формулы, сделанное Ньютоном, справедливо для тех значений a и b, которые были им рассмотрены.

Если аналогичным образом отбросить характерные для современной математики строгие требования и к другим доказательствам (в XVII в. этой строгости не было), то легко проследить за процессом создания анализа. Вот основополагающие понятия: *переменная*, *функция*, *предел*. Наиболее пространного объяснения требует последнее понятие.

Буква, например, s, которой можно придавать различные значения в ходе математического изучения вопроса, обозначает *переменную*. Переменной является, скажем, высота падающего тела над поверхностью земли.

Слово *функция* (или его латинский эквивалент) было введено в математику Лейбницем в 1694 г. Оно выражает понятие, ныне доминирующее в математике и необходимое в естественных науках. Понятие стало точным в дальнейшем[1]. Если x и y суть две переменные,

[1] Понятие функции Лейбниц истолковывал интуитивно геометрически. Геометрически он вводил и понятия дифференциалов dx и dy, бывших у него исходными. Понятие производной было введено Лагранжем (1798), до этого пользовались равносильным ему понятием дифференциального коэффициента $\frac{dy}{dx}$. Изложение в тексте на последующих двух страницах по духу ближе всего к трактовке соответствующих вопросов Эйлером (1755) и Даламбером. Даламбер пытался развить имевшееся у Ньютона представление о пределе, но рабочим понятием анализа оно стало позднее, с начала XIX в., в результате дальнейших уточнений.

связанные таким образом, что для всякого численного значения x определяется численное значение y, то y называется (однозначной) функцией x. Это обозначается с помощью записи: $y = f(x)$.

Вместо того чтобы дать современное определение *предела*, мы ограничимся простейшими примерами того типа, которые привели последователей Ньютона и Лейбница (особенно первого) к использованию пределов при рассмотрении скоростей изменения. Для предшественников анализа понятия переменной и предела были интуитивными. Для нас они стали очень сложными и тонкими, и подход к ним сейчас неизбежно пролегает через дебри таинственных представлений, касающихся природы чисел, как рациональных, так и иррациональных.

Пусть y есть функция x, т. е. $y = f(x)$. *Скорость изменения* y *по отношению к* x, или, как говорят, *производная* y *по* x, определяется следующим образом. Допустим, что x получил некоторое приращение Δx, так что его значение стало теперь равным $x + \Delta x$, а $f(x)$, или y, стала равной $f(x + \Delta x)$. Соответствующее приращение Δf, или Δy, равно *новому значению минус начальное значение*, именно $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. В качестве грубого приближения скорости изменения y по отношению к x, согласно нашему интуитивному представлению о средней величине, возьмем частное от деления приращения Δy на приращение Δx, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Но это все же слишком грубо, так как x и y оба меняются и мы не можем утверждать, что наше среднее отношение представляет скорость для *любого конкретного* значения x. Поэтому мы уменьшим Δx *неопределенно*, так, чтобы «в пределе» оно приблизилось к нулю, и посмотрим, что при этом произойдет со «средним» отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; Δy, соответственно, тоже бесконечно уменьшается, приближаясь неограниченно к нулю, но $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не превращается в бессмысленный символ $\frac{0}{0}$, а дает нам определенное *предельное значение*, каковое и является искомой скоростью изменения y по отношению к x.

Чтобы ознакомиться с тем, как это происходит, возьмем вместо $f(x)$ конкретную функцию, пусть x^2, т. е. положим $y = x^2$. Следуя вышесказанному, мы можем написать:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}.$$

Пока ничего еще не сказано относительно предела. Используя алгебраические упрощения, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Теперь нам становится очевидным, что, когда Δx стремится к нулю, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к значению $2x$. В более общем случае, если $y = x^n$, предельное значение для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет равно $n \cdot x^{n-1}$. Это можно доказать с помощью биномиальной формулы.

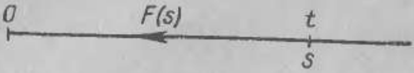
Такие рассуждения покажутся неубедительными для сегодняшнего студента, но они (или подобные им рассуждения) вполне удовлетворяли создателей анализа, поэтому и мы удовлетворимся ими здесь. Если $y = f(x)$, то *предельное значение* отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (если оно существует) называется *производной* y *по* x и обозначается $\frac{dy}{dx}$. Это обозначение введено Лейбницем и стало сейчас общепринятым; Ньютон использовал другое, менее удобное, — $\dot{y}$.

Простейшими примерами скоростей изменения в физике являются скорость и ускорение — два основных понятия динамики. Скорость есть скорость изменения *пути* во *времени*; *ускорение* — скорость изменения *скорости* во *времени*.

Если s обозначает путь, пройденный ко времени t движущейся частицей (т. е. можно сказать, что путь является функцией времени), то скорость в момент времени t есть $\frac{ds}{dt}$. Обозначая скорость через $\mathbf{v}$, мы получим соответствующее ускорение: $\frac{dv}{dt}$.

Это приводит к идее *скорости изменения скорости*, или *второй производной*. Поскольку для ускоренного движения скорость не является постоянной, а меняется и поскольку эта скорость имеет определенную скорость изменения, то можно сказать, что ускорение есть скорость изменения скорости изменения пути (обе во времени). Чтобы указать на *второй* порядок, ускорение записываем как $\frac{d^2s}{dt^2}$. Оно само, конечно, имеет какую-то скорость изменения, и ее можно обозначить через $\frac{d^3s}{dt^3}$. И так далее — для четвертой, пятой, ... производных. Наиболее важными производными в приложениях анализа являются первая и вторая.

Если мы теперь вспомним снова, что утверждает второй закон движения Ньютона, и сопоставим его с тем, что было сейчас сказано об ускорении, мы увидим, что этот закон устанавливает пропорциональность «силы» и вызываемого ею ускорения. Благодаря этому мы можем составить *дифференциальное уравнение* движения для случая, который ни в коей мере не является тривиальным, — для «центральной силы», т. е. для задачи, когда частица притягивается к определенной точке и сила притяжения всегда направлена по линии, проходящей через эту точку. Пусть эта сила изменяется как некоторая функция расстояния s, скажем $F(s)$, зависящего от



t, где s есть расстояние до частицы в момент времени t от фиксированной точки 0.

Нам нужно описать движение частицы. Небольшое размышление убедит нас в том, что

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -F(s).$$

Знак минус здесь взят потому, что притяжение уменьшает скорость частицы. Это и есть *дифференциальное уравнение* для нашей задачи. Оно называется так потому, что содержит скорость изменения (ускорение), а скорости изменения (производные) являются предметом изучения в *дифференциальном* исчислении.

Теперь, когда мы перевели нашу задачу на язык дифференциального уравнения, нам требуется решить это уравнение, т. е. найти нужную функцию s от t. Здесь и начинаются трудности. Часто ничего не стоит описать физическую картину рядом дифференциальных уравнений, которые, однако, ни один математик не будет в состоянии решить. Вообще каждая возникающая отрасль физики влечет за собой появление дифференциальных уравнений нового типа, которые для своего решения требуют создания новой ветви математики. То частное уравнение, которое у нас получилось выше, тем не менее легко может быть решено в элементарных функциях, если $F(s) = \frac{1}{s^2}$, что соответствует закону тяготения Ньютона. Но вместо того чтобы заниматься этим конкретным уравнением, мы рассмотрим сначала еще более простое уравнение, которое достаточно разъяснит нам суть дела:

$$\frac{dy}{dx} = x.$$

Нам дано, что y есть функция от x и производная от y равна x; требуется выразить y как функцию x. В более общей постановке задача выглядит так: дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

требуется найти функцию y (от x), чья производная по x равна $f(x)$. Допустим, что мы нашли такую функцию (или, что она просто существует). Назовем ее *первообразной* функции $f(x)$ и обозначим через $\int f(x)\,dx$ — по причине, которая выяснится позже. Сейчас важно, что через $\int f(x)\,dx$ обозначается функция (если она существует), *производная которой* равна данной функции $f(x)$.

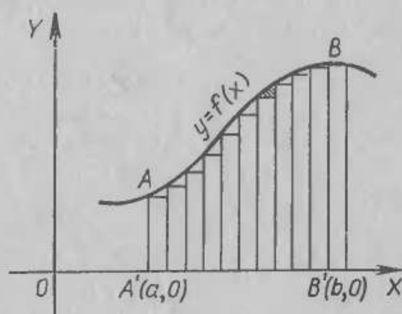
Методом подбора мы обнаруживаем, что первому из приведенных уравнений удовлетворяет функция $\frac{1}{2}x^2 + C$, где C — постоянная (величина, не зависящая от переменной x); следовательно,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Даже этот простой пример показывает, что задача отыскания первообразной $\int f(x)\,dx$ сравнительно невинно выглядящих функций $f(x)$ может превысить наши возможности. «Ответ» не всегда может быть выражен через *известные функции*, если $f(x)$ берется случайно; это бывает во многих случаях (первообразная «невычислима»). Когда физическая задача заводит в один из таких тупиков, в дело пускают приближенные методы, с помощью которых результат получается с желаемой степенью точности.

Имея два основных понятия анализа $\frac{dy}{dx}$ и $\int f(x)\,dx$, мы можем записать *основную теорему анализа*, связывающую эти две величины. Для простоты изложения будем обращаться к чертежу, хотя это вовсе не обязательно и даже, строго говоря, нежелательно.

Рассмотрим непрерывную, несамопересекающуюся кривую, уравнение которой в декартовых координатах $y = f(x)$. Требуется найти площадь фигуры, ограниченной сверху данной кривой, снизу — осью x, а с боков — двумя перпендикулярами AA' и BB' к оси x, опущенными на ось x из двух точек A и B, находящихся на кривой. Расстояния OA' и OB' равны, соответственно, a и b, следовательно, координаты точек A' и B' суть $(a, 0)$ и $(b, 0)$. Как это делал Архимед, мы разрежем нашу фигуру на параллельные полосы равной ширины, заменим их соответствующими прямоугольниками, пренебрегая вверху треугольными кусочками (один из которых заштрихован на рисунке), сложим площади этих прямоугольников и, наконец, рассмотрим *предел этой суммы* при стремлении числа прямоугольников к бесконечности. Все это хорошо, но как найти этот предел? Ответ на этот вопрос, несомненно, представляет собой одну из самых поразительных вещей, когда-либо открытых математиками.



Прежде всего найдем $\int f(x)\,dx$. Пусть результат будет $F(x)$. Подставив сюда a и b вместо x, получим $F(a)$ и $F(b)$. Затем вычтем первую величину из второй. *Это и будет искомая площадь.*

Обратите внимание на связь между уравнением данной кривой $y = f(x)$, производной $\frac{dy}{dx}$, которая (как это ясно из главы о Ферма) дает *наклон* касательной в данной точке (x, y) кривой, и $\int f(x)\,dx$, или $F(x)$, представляющей собой функцию, производная которой по x равна $f(x)$. Как только что было указано, отыскиваемая нами *площадь*, которая есть *предел суммы* архимедовского типа, дается выражением $F(b) - F(a)$. Итак, мы связали *наклон* кривой, т. е. *производную*, с *предельной суммой*, которую называют *определенным интегралом*. Символ $\int$ есть не что иное, как написанная по-старому первая буква латинского слова Summa.

Резюмируя все это с помощью символов, записываем рассматриваемую площадь как $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (a — *нижний предел*, b — *верхний предел*) и затем: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$,

где $F(b)$ и $F(a)$ вычисляются посредством нахождения «*неопределенного интеграла*» $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а именно, такой функции $F(x)$, производная от которой по x, именно $\frac{dF(x)}{dx}$, равна $f(x)$. Это равенство и выражает основную теорему анализа, которая была найдена (в геометрической форме) Ньютоном и независимо от него Лейбницем. Повторяем еще раз предупреждение: в нашем рассуждении были пропущены многочисленные уточнения, которые требуются при современном изложении.

В заключение этого очерка о главных понятиях анализа, какими они появились у их создателей, отметим два простых, но важных момента. До сих пор рассматривались только функции одной переменной. Но в природе обычно встречаются функции многих или даже бесчисленного множества переменных.

Обратимся для примера к некоторой массе газа. Объем газа V есть функция его температуры T и его давления P. Это можно записать так: $V = F(T, P)$ — конкретный вид функции F для нас сейчас не существен. Когда меняются T и P, меняется и V. Но предположим, что *только одна* из переменных T, P меняется, в то время как вторая остается постоянной. Тогда перед нами снова будет функция одной переменной и производная от нее может быть вычислена по отношению к этой переменной. Если меняется T, а P остается постоянным, производная от $F(T, P)$ по T называется *частной производной* (по T). Чтобы показать, что переменная P остается постоянной, для производной в этом случае применяют новый символ — ∂, обозначая производную таким образом: $\frac{\partial F(TP)}{\partial T}$. Аналогично, если меняется P, а T остается постоянной, может быть вычислена частная производная $\frac{\partial F(T,P)}{\partial P}$. Для второй, третьей и т. д. частных производных сохраняется обычный принцип записи. Так, $\frac{\partial^2 F(T,P)}{\partial T^2}$ есть частная производная по T от $\frac{\partial F(T, P)}{\partial T}$.

Подавляющее большинство важнейших уравнений математической физики являются *уравнениями в частных производных*. Знаменитым примером служит уравнение Лапласа, широко применяющееся в теории тяготения, в теории электричества и магнетизма, течения жидкости и т. д.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Вывод этого уравнения не представляет сейчас для нас интереса, но рассмотрение его физического смысла может прояснить положение. Если в потоке жидкости нет завихрений, три компоненты скорости любой частицы жидкости, параллельные осям x, y и z, вычисляются как частные производные

$$-\frac{\partial u}{\partial x},\ -\frac{\partial u}{\partial y},\ -\frac{\partial u}{\partial z}$$

одной и той же функции u, которая определяется конкретным типом движения. Используя этот факт, а также то, что жидкость является несжимаемой и неразрывной, что в любой малый объем за единицу времени втекает столько же жидкости, сколько и вытекает из него, мы при помощи довольно простых математических операций (вычисляя общее количество вошедшей и вышедшей из данного объема жидкости) получим уравнение Лапласа.

Действительно удивительной вещью, связанной с уравнениями математической физики, является то, что самые простые физические соображения, обработанные математически, доставляют непредвиденные сведения, весьма далекие от тривиальных. «Предвидения» физических явлений, упоминаемые в дальнейшем, порождаются при математической обработке общеизвестного.

Однако со всем этим связаны две немалые трудности. Первая касается физика, который всегда где-то подозревает, что упрощение его задачи может исказить ее смысл. Вторая связана с математиком и относится к важному вопросу — последнему в этом кратком очерке анализа, к тому, что называют *граничными задачами*.

Физик отнюдь не ждет от математика *общего* решения уравнения. Ему нужно знать *частное решение*, которое удовлетворяет не только данному дифференциальному уравнению, но и определенным *дополнительным условиям*, зависящим от конкретного характера решаемой задачи. Найти такое решение (обычно) намного труднее.

Это можно довольно просто пояснить на примере задачи о распространении тепла. Существует *общее* уравнение (уравнение Фурье) передачи тепла, подобное уравнению Лапласа для движения жидкости. Представим, что нас интересует окончательное распределение температуры в цилиндрическом стержне, основания которого имеют одну и ту же постоянную температуру, а на боковой поверхности поддерживается другая температура. «Окончательное» распределение означает распределение, устанавливающееся через достаточно большой промежуток времени после начала процесса и уже не меняющееся. Решение в данном случае должно не только удовлетворять вообще уравнению, но и давать на поверхности нужные значения температуры, т. е. удовлетворять граничным условиям.

Удовлетворить граничным условиям очень нелегко. Для цилиндрического стержня задача решается совершенно другим способом, чем для стержня с прямоугольным сечением. Теория граничных задач имеет дело с отысканием решений дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным граничным условиям. В основном она была создана в недавнем прошлом. Ее в определенном смысле можно отождествить с математической физикой.

Вторым вдохновенным творением Ньютона, законченным им в 1666 г. в Вулсторпе, был закон всемирного тяготения (который уже формулировался). Мы не будем в связи с этим повторять здесь историю об упавшем яблоке.

Большинство авторитетов считает, что Ньютон сделал некоторые приближенные расчеты в 1666 г. (ему было тогда 23 года), чтобы проверить, соответствует ли его закон кеплеровским законам движения планет. Много лет спустя (в 1684 г.), когда Галлей спросил его, какой закон притяжения обеспечивает эллиптические орбиты планет, Ньютон сразу ответил: обратный квадрат. И в ответ на вопрос, откуда ему это известно, добавил: «Я вычислил это».

О двадцатилетней задержке опубликования Ньютоном закона всемирного тяготения было написано многое. Из трех объяснений такой отсрочки мы выберем менее романтическое, но более предпочтительное с математической точки зрения.

Эта длительная задержка была связана с неспособностью решить определенную задачу интегрального исчисления, имевшую прямое отношение к закону тяготения. Перед тем как рассматривать движение падающего яблока и обращающейся вокруг Земли Луны, Ньютон должен был найти силу притяжения, возникающую между однородным сплошным шаром и материальной точкой, находящейся вне шара. *Каждая* частица шара притягивает внешнюю частицу с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния. Но какова будет результирующая всего этого бесконечного множества сил?

Это, очевидно, задача интегрального исчисления. Теперь она приводится в учебниках в качестве примера и молодые студенты решают ее за 20 минут или же быстрее. Ньютона же она задержала на 20 лет. В конце концов он решил ее: сила притяжения будет такой же, как если бы вся масса шара была сосредоточена в *единственной точке*, в его центре. Таким образом, задача свелась к простой задаче отыскания силы взаимодействия между двумя материальными точками и была немедленно решена согласно ньютоновскому закону тяготения. Если это объяснение двадцатилетней задержки публикации верно, оно дает нам некоторое представление о том громадном труде, который затратили поколения математиков со времен Ньютона для развития и упрощения математического анализа в такой мере, что его эффективно могут использовать рядовые 16-летние юноши.

Хотя мы интересуемся здесь Ньютоном в первую очередь как великим математиком, рассказ о нем нельзя прервать на описании незавершенного шедевра 1666 г. Чтобы дать должное представление о его величии, кратко изложим очерк других сторон его деятельности.

По возвращении в Кембридж Ньютон был избран членом Тринити-колледжа в 1667 г., а в 1669 г., в 26-летнем возрасте, он стал преемником Барроу в качестве профессора Люкасовской кафедры математики. Его первые лекции касались оптики. В них он изложил свои открытия и набросал корпускулярную теорию света, согласно которой свет представляет собой поток частиц, а не волны, как утверждали Гюйгенс и Гук. Хотя эти две теории кажутся противоречащими одна другой, обе они оказались полезными при современном истолковании явлений света и нашли применение в квантовой теории. Поэтому неправильно говорить, как склонны были это делать некоторое время тому назад, что корпускулярная теория света Ньютона была полностью ошибочной.

В 1668 г. Ньютон собственными руками построил отражательный телескоп (рефлектор) и использовал его для наблюдений за спутниками Юпитера. Он, несомненно, ставил целью проверить, подчиняется ли движение этих спутников закону всемирного тяготения. Этот год является также знаменательным для истории анализа. Внимание Ньютона привлекли вычисления Меркатора с помощью бесконечного ряда площади, связанной с гиперболой. Метод практически совпадал с методом самого Ньютона, тогда еще не опубликованным; теперь Ньютон изложил его, передал Барроу и позволил распространить его в небольшом кругу лучших математиков того времени.

При избрании в 1672 г. в Королевское общество Ньютон представил свои работы о телескопах и корпускулярную теорию света. Для рассмотрения работы по оптике была назначена комиссия из трех человек, включая придирчивого Гука. Превысив свои полномочия, Гук воспользовался случаем, чтобы пропагандировать свою волновую теорию, противопоставляя ее теории Ньютона. Сначала Ньютон, как истый ученый, оставался спокойным под огнем критики, но постепенно он стал терять терпение.

При чтении переписки по этому первому из раздражавших Ньютона споров каждый уяснит, что Ньютон не был по натуре скрытным или мнительным по отношению к своим открытиям. Тон его писем изменяется постепенно — вначале он свидетельствует об искреннем желании прояснить те места, которые другие находят трудными; только потом возникает горестное недоумение от того, что наука рассматривается учеными как поле боя для личных ссор. От этого недоумения он быстро переходит к гневу, обиде и несколько наивному решению в будущем оставлять свои мысли при себе.

Наконец, в письме от 18 ноября 1676 г. он заявляет: «Я вижу, что стал рабом философии; но когда я освобожусь от дела мистера Люкаса, то я решительно распрощаюсь с философией навсегда, за исключением того, что делаю для собственного удовлетворения или для опубликования после моей смерти, ибо я вижу, что ученый должен либо решиться не предлагать ничего нового, либо стать рабом ради его защиты»[1]. Почти такими же словами выражал свои чувства Гаусс в связи с неевклидовой геометрией.

Раздражительность Ньютона по отношению к критике и к бесполезным спорам проявилась еще раз тогда, когда были опубликованы «Начала». 20 июня 1688 г. он писал Галлею: «Философия [природы] настолько непомерно сутяжничающая дама, что человек, который имеет с ней дело, неизбежно оказывается вовлеченным в тяжбу». Математика, динамика и небесная механика, как можно заключить из его слов, были вторичными интересами Ньютона; его сердце принадлежало алхимии, исследованиям по хронологии и теологическим изысканиям.

Только по внутреннему побуждению он обращался к математике как к отдыху. Еще в 1679 г., когда ему было 37 лет (и когда он уже надежно замкнул свои более важные открытия в своей голове или в своем письменном столе), он писал Гуку: «В течение нескольких последних лет я пытался переключиться с философии на другие предметы столь упорно, что посвящал этой науке только отдельные часы, чтобы отвлечься от других занятий». Эти «отвлечения», случалось, требовали от Ньютона больше непрерывных размышлений, чем занятия, которые он считал основными для себя. Так, размышления днем и ночью о движении Луны привели к тому, что он серьезно заболел, и он говорил, что эта задача была единственной, которая причиняла ему головные боли.

Весной 1673 г. Ньютон написал Ольденбургу, что отказывается от членства в Королевском обществе. Эту вспышку раздражительности истолковывали по-разному. Сам Ньютон выдвинул в качестве причины финансовые трудности и дальность проживания от Лондона. Ольденбург поймал его на слове и ответил, что, согласно уставу, он может оставаться членом Общества, не оплачивая взносов. В результате Ньютон взял свое заявление об отставке и полностью успокоился. Ньютон вовсе не был рассеянным мечтателем, когда дело касалось денег. Он был очень практичен и умер

---

[1] В то время философия включила в себя естественные науки, а философия природы (натурфилософия), по существу, являлась физикой.

богатым для своего времени человеком. Но, будучи экономным и расчетливым, он вместе с тем очень свободно обращался с деньгами и был всегда готов помочь другу в нужде, не проявляя при этом навязчивости. Особенно благороден он по отношению к молодежи.

Период с 1684 по 1686 г. — один из величайших в истории человеческого мышления. Поддавшись уговорам Галлея, Ньютон согласился наконец написать для опубликования труд, заключавший в себе его открытия в астрономии и механике. Вероятно, ни один смертный не думал так напряженно и так непрерывно, как Ньютон при составлении своих «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» («Математических начал натуральной философии»). Никогда особенно не заботившийся о своем здоровье, Ньютон при написании своего шедевра, казалось, совсем забыл о том, что у него есть тело, нуждающееся в пище и сне. Он пренебрегал приемом пищи или забывал о нем, спал урывками, а проснувшись мог часами сидеть на неубранной постели, распутывая нити своего математического лабиринта. В 1686 г. «Начала» были представлены Королевскому обществу, а в 1687 г. напечатаны за счет Галлея.

Описание содержания «Начал» не входит здесь в наши задачи, но мы все же коротко укажем на малую толику неисчерпаемых сокровищ, содержащихся в них. Весь труд оживляет дух динамики Ньютона, его закон всемирного тяготения и их применение к Солнечной системе — к «системе мира». Хотя математический анализ не проявляется в синтетических геометрических доказательствах «Начал», Ньютон утверждал (в одном письме), что использовал его для *получения* своих результатов, а после этого придал доказательствам, добытым с помощью анализа, геометрический характер, чтобы современникам было легче постичь главную мысль, состоящую в динамической гармонии мира.

Вначале Ньютон выводит эмпирические законы Кеплера из своего закона всемирного тяготения и показывает, каким образом можно вычислить массу Солнца или массу любой планеты, имеющей спутника. Затем он кладет начало чрезвычайно важной теории *возмущений*. Луна, например, притягивается не только Землей, но также и Солнцем, следовательно, орбита Луны возмущается притяжением Солнца. При этом Ньютон учитывает наблюдения, проведенные в древности Гиппархом и затем Птолемеем. В наши дни высокоразвитая теория возмущений применяется для расчетов электронных орбит, в частности атома гелия. Из закона всемирного тяготения были выведены дополнительно к вытекавшим из наблюдений древних 7 других неправильностей в движении Луны, которые наблюдались Тихо Браге (1546—1601) Флемстидом (1646—1719) и другими астрономами.

Аналогично рассмотрены были движения планет. Ньютон положил начало теории возмущений планетных орбит, которая привела к открытию в XIX в. Нептуна, а в XX — к открытию Плутона.

«Незаконные» кометы, на которые смотрели как на предупреждение грозных небес, подчинились действию универсального закона, как смиренные члены солнечной семьи, с такой точностью, что мы теперь можем предвычислять и предсказывать эффектное их возвращение (если Юпитер или другая внешняя планета не исказит кометную орбиту слишком сильно). Именно так было в 1910 г., когда замечательная комета Галлея явилась на небосводе точно в «назначенное» время после 74-летнего отсутствия.

Ньютон начал обширное и еще незавершенное исследование эволюции планет, вычисляя (с помощью своей динамики и закона тяготения) сжатие Земли у полюсов, возникающее вследствие суточного вращения, и доказал, что форма планеты определяет продолжительность дня на ее поверхности. Так, если бы мы точно знали величину сжатия Венеры, то можно было бы сказать, за какое время она делает один полный оборот вокруг оси, проходящей через ее полюса. Он вычислил изменение веса тела с изменением широты. Он доказал, что в полом однородном пространстве, ограниченном концентрическими сферическими поверхностями, не проявляется действие силы на маленькое тело внутри его. Этот результат имеет важные следствия в электростатике; он был также использован в качестве мотива забавных фантазий.

Предварение равноденствий было замечательно объяснено притяжением экваториального пояса Земли Луной и Солнцем, в результате чего наша планета покачивается подобно волчку. Таинственные приливы и отливы, как лунные, так и солнечные, также естественно включались в великое построение. Они были предварительно вычислены, и путем сравнения с данными наблюдений о высотах приливов и отливов была определена масса Луны. Первая книга «Начал» содержала законы механики; вторая была посвящена движению тел в сопротивляющейся среде и движению жидкостей; третья — знаменитой «системе мира».

Вероятно, ни один другой закон природы не объединил так просто такую массу явлений природы, как закон всемирного тяготения Ньютона в его «Началах». К чести современников Ньютона нужно сказать, что они поняли, хотя и не в полной мере, величие сделанного им, несмотря на то что лишь немногие из них были способны проследить за рассуждениями, с помощью которых было свершено изумительное чудо унификации, и они провозгласили автора «Начал» полубогом. Через некоторое время ньютоновская система стала преподаваться в Кембридже (1699) и Оксфорде (1704). Франция дремала еще полстолетия, пока освободилась от чар декартовых вихрей. Но вскоре мистицизм уступил дорогу разуму, и Ньютон обрел своего величайшего последователя не в Англии, а именно во Франции, где Лаплас поставил перед собой задачу продолжения и закругления «Начал».

После «Начал» наступил спад. Хотя теория Луны продолжала беспокоить его, Ньютон какое-то время чувствовал себя уставшим от «философии» и приветствовал удобный случай обратиться к земным делам. Король Яков II, упрямый шотландец и фанатичный католик, решил, несмотря на возражения ученых, добиться присвоения Кембриджским университетом магистерской степени одному бенедиктинскому монаху. Ньютон был одним из делегатов, направленных в 1687 г. в Лондон, чтобы представлять университет в комиссии Верховного суда. Когда делегаты должны были подписать позорный компромисс, именно Ньютон убедил других не делать этого.

Кембридж, по-видимому, оценил мужество Ньютона, так как в январе 1689 г. он был избран в парламент от университета, — после того как Яков II бежал из страны, освободив место Вильгельму Оранскому. Ньютон заседал в парламенте вплоть до его роспуска в феврале 1690 г. Он не произнес там ни одной речи. Однако он добросовестно выполнял свой долг и отнюдь не был чужд политике.

Проверка Ньютона «реальной жизнью» Лондона предопределила его отход от науки. Влиятельные и высокопоставленные друзья, среди которых был философ Джон Локк (1632—1704), убедили Ньютона в том, что он не получает тех почестей, каких заслуживает. В 1699 г. англичане, наконец, сделали Ньютона главным смотрителем Монетного двора, поручив ему проведение реформы денег и их чеканку.

Потеря сна и безразличие к пище в течение 18 месяцев создания «Начал» стали сказываться на здоровье. Осенью 1692 г., когда Ньютону было почти 50 лет — прекрасный возраст, — он серьезно заболел. Болезнь временно сопровождалась манией преследования и была чем-то совсем близким к полному упадку умственной деятельности.

Известие о болезни Ньютона достигло континента, где, естественно, было сильно преувеличено. Его друзья, в том числе и тот, кто стал потом злейшим его врагом, радовались наступившему выздоровлению. Лейбниц в письмах своим знакомым выражал удовлетворение тем, что Ньютон снова стал самим собой. Но как раз в год своего выздоровления (1693) Ньютон впервые услышал, что анализ уже хорошо известен ученым континента и приписывается ими Лейбницу.

Десятилетие после опубликования «Начал» было заполнено примерно в одинаковой степени алхимией, теологией и спорадическими мучительными размышлениями о теории Луны. С Лейбницем Ньютон был тогда в сердечных отношениях. Их уважаемые «друзья», не разбиравшиеся в математике, в частности в анализе, не успели еще натравить их друг на друга из-за приоритета в изобретении анализа и вызвать наиболее постыдную склоку во всей истории математики. Ньютон признавал заслуги Лейбница, Лейбниц признавал заслуги Ньютона, и никто из них на той мирной стадии отношений не мог даже на миг вообразить себе, что другой похитил у него идею анализа.

Позже, в 1712 г., когда любой встреченный на улице патриот, совершенно ничего не знающий о фактах, смутно представлял, что Ньютон сделал нечто гигантское в математике (вероятно больше, как сказал Лейбниц, чем было сделано за всю историю до него), вопрос о приоритете в создании анализа перерос в вопрос острой национальной зависти. Вся образованная Англия при попустительстве своего сбитого с толку кумира кричала, что его соперник — вор и лжец.

Вначале Ньютона не в чем было упрекнуть. То же можно сказать и о Лейбнице. Но, по мере того как британский спортивный инстинкт охватывал его, Ньютон все больше разрешал себе недостойные выпады и в конце концов разработал или принял план действий, абсолютно нечестный и направленный на победу в международном состязании любой ценой — даже ценой национальной чести. Лейбниц и его сторонники действовали так же. Результатом всего этого было то, что упрямые британцы практически не продвинулись в математике в течение целого столетия после смерти Ньютона, в то время как более прогрессивные швейцарцы и французы, развивая идеи Лейбница и пользуясь его несравненно более удобным способом *обозначений* в анализе, усовершенствовали анализ и сделали его простым, легко применимым средством исследований, сделали то, что должны были сделать непосредственные последователи Ньютона.

В 1696 г., в возрасте 54 лет, Ньютон стал хранителем Монетного двора, а затем его сделали главным смотрителем этого двора. Единственное удовлетворение, которое математики могут получить из этой деградации величайшего интеллекта всех времен, — это опровержение глупого предрассудка, будто математики лишены практических способностей. Ньютон был одним из лучших смотрителей, которых когда-либо имел Монетный двор. К своему делу он относился весьма серьезно.

В 1701—1702 г. Ньютон снова представлял Кембриджский университет в парламенте, а в 1703 г. был избран президентом Королевского общества. На этот почетный пост его переизбирали время от времени вплоть до его кончины в 1727 г. В 1705 г. он был пожалован королевой Анной дворянским титулом. Эта честь, вероятно, была оказана ему как признание скорее его заслуг по делу перечеканки монет, чем его превосходства в храме мудрости.

Умер ли математический гений Ньютона? Конечно, нет. Ньютон все еще был равен Архимеду. Но старый мудрый эллин имел удачу родиться аристократом и никогда не заботился о своем общественном положении, так как оно всегда было высоким; до последнего мгновения своей долгой жизни он отдавался математике с той же полнотой, как и в молодости. В сопротивлении болезням и нищете математики представляют собой значительно более выносливое племя, чем поэты, живописцы и даже естествоиспытатели, — творческий период у математиков на десятилетия дольше. Ньютон оставался интеллектуально столь же могучим, как и прежде. Если бы его влиятельные друзья оставили его в покое, он легко мог бы создать вариационное исчисление — инструмент открытий в физике и математике, непосредственно примыкающий к анализу, а не предоставлять возможность положить ему начало Бернулли, Эйлеру и Лагранжу. Намек на это есть у него в «Началах», — там, где он определяет вид поверхности вращения, которая испытывала бы наименьшее сопротивление при движении в жидкости. Он должен был положить его в основу широкого развития всего метода. Подобно Паскалю, когда он променял земной мир на туманное небесное царство, Ньютон все еще был математиком, когда оставил свои занятия в Кембридже и перебрался в более внушительные аппартаменты Монетного двора.

В 1696 г. Иоганн Бернулли и Лейбниц бросили две дьявольские загадки — два вызова математикам Европы. Первый касался задачи, которая и сейчас является важной.

Представьте, что на вертикальной плоскости выбраны наугад две точки. Каков вид кривой, соединяющей эти точки, вдоль которой частица скользит (без трения) под действием силы тяжести так, что проходит путь от верхней точки к нижней за *наименьшее время*? Это задача о *брахистохроне* — кривой «кратчайшего времени». После того как она в течение 6 месяцев не давала покоя европейским математикам, ее предложили еще раз, и 29 января 1696 г. о ней впервые услышал Ньютон. Уставший после долгого рабочего дня в Монетном дворе, он пошел домой и, пообедав, решил эту задачу (так же, как и вторую), а на следующий день передал анонимно решение в Королевское общество. Но, несмотря на все его предосторожности, ему не удалось скрыть свое авторство и продолжать держать всех в убеждении, что ему удалось отгородиться в своем Монетном дворе от всех научных интересов. Увидев решение, Бернулли сразу же воскликнул: «Узнаю льва по когтям!»

Второе доказательство жизнеспособности Ньютона относится к 1716 г., когда ему было 74 года. Лейбниц бросил математикам Европы очередной вызов. Предложил задачу, которая казалась ему особенно трудной (касавшуюся отыскания ортогональных траекторий однопараметрического семейства кривых). Лейбниц, в частности, метил в Ньютона. Получив условия задачи в 5 часов вечера, Ньютон нашел ее решение в тот же вечер. Лейбниц был доволен, что ему удалось поймать в капкан льва.

Во всей истории математики не было человека, превосходящего Ньютона (а может быть, и равного ему) по способности концентрировать все силы своего разума на немедленном преодолении трудностей.

Ньютон получил все, что может получить смертный. Он был одним из самых удачливых великих людей истории. Его физическое здоровье было прекрасным до самых последних лет жизни; он никогда не носил очков; за всю жизнь он потерял только один зуб;

его волосы поседели к тридцати годам, но оставались густыми и мягкими до самой смерти.

Однако описание конца его жизни по-человечески трогательно. Даже Ньютону не пришлось избежать страданий. Мужество и стойкость, проявленные им в течение последних двух или трех лет, наполиенных постоянными болями, добавляют лавровые листья в его венец. Он переносил пытки «каменной болезни» с необыкновенной выдержкой, и, хотя на его лбу часто проступал холодный пот, он всегда находил слово симпатии для тех, кто посещал его. Ньютон тихо скончался во сне между часом и двумя ночи 20 марта 1727 г. в возрасте 85 лет. Он похоронен в Вестминстерском аббатстве.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

МАСТЕР НА ВСЕ РУКИ

ЛЕЙБНИЦ (1646—1716)

У меня так много идей, что, возможно, некоторые из них окажутся со временем полезными, если люди более целеустремленные, чем я, продумают их когда-нибудь глубже меня и добавят совершенство своей мысли к моему труду. — Г. В. ЛЕЙБНИЦ

МАТЕМАТИКА была только одной из многих областей, в которых Лейбниц (1646—1716) проявил свой яркий гений: он внес значительный вклад также в юриспруденцию, государственное управление, историю, литературу, логику, вероучение, метафизику и философию. Каждое из его занятий обеспечило бы ему славу и сохранило бы память о нем. Определение «универсальный гений» применимо к Лейбницу без преувеличения, в то время как его соперника в математике Ньютона так назвать нельзя, хотя он был несравненно сильнее в натуральной философии.

Даже в математике универсальность Лейбница контрастирует с неизменной устремленностью Ньютона к одному свершению, к применению математического рассуждения к явлениям природы: Ньютон создал в математике одну вещь первостепенной важности, Лейбниц — две. Первой из них был анализ (интегральное и дифференциальное исчисление), второй — комбинаторный анализ. Анализ представляет собой естественный язык для описания *непрерывного*; комбинаторный анализ — для описания *дискретного* (смотри главу 1). В комбинаторном анализе мы имеем дело с совокупностями отдельных предметов, обладающих индивидуальностью, и выясняем, какие соотношения можно установить между этими полностью разнородными элементами. Здесь мы интересуемся не сходством, а различием элементов или в крайнем случае тем, что различные *индивидуальные* элементы, как таковые, имеют общего, — очевидно, его будет не так много. Действительно, кажется, что в конце концов все, что можно назвать комбинаторным, сводится к пересчету элементов разными способами и сравнению результатов. То, что эта явно отвлеченная и как будто бесплодная процедура может привести к чему-то важному, является, по существу, удивительным, однако это факт. Лейбниц был пионером в этой области, и он один из первых понял, что структура логики — «законов мышления»—есть предмет комбинаторного анализа. В наше время этот предмет полностью арифметизирован.

В Ньютоне реализовался математический дух его времени. После работ Кавальери (1598—1647), Ферма (1601—1665), Валлиса (1616—1703), Барроу (1630—1677) и других анализ неизбежно должен был вскоре сформироваться в самостоятельную дисциплину. Подобно кристаллу, брошенному в пересыщенный раствор в критический момент, Ньютон объединил рассеянные вокруг идеи того времени, и анализ приобрел конкретную форму. Любой высокий интеллект в равной мере мог послужить таким кристаллом. Лейбниц был другим первоклассным интеллектом эпохи и также выкристаллизовал анализ. Но он представлял собой и нечто большее, чем средство для выражения духа времени. Ньютон в математике этим не был. В своих мечтах о «всеобщей характеристике» Лейбниц более чем на два столетия опередил свой век, если даже ограничиться математикой и логикой. Как показывают исторические исследования, Лейбниц в своем втором великом математическом замысле был одинок.

Соединение в одном человеке исключительных способностей к двум обширным и противоположным областям математической мысли — аналитической и комбинаторной, или же относящимся к непрерывному и дискретному, — не встречалось ни в ком до Лейбница и не имело аналога после него. Он является единственным человеком в истории математики, владевшим обеими формами мышления в одинаково высочайшей степени. Лейбниц-комбинаторик имел своих последователей в Германии, делавших в основном тривиальные вещи, и только в XX в., когда появились труды Уайтхеда и Рассела, продолжавшие исследования Буля в XIX в., частично осуществилась мечта Лейбница об универсальном символическом рассуждении, колоссальная важность которого для всего математического и научного мышления комбинаторного характера стала такой значительной, какой, как предсказывал Лейбниц, она должна быть. Теперь лейбницевский комбинаторный метод, получивший развитие в символической логике и ее расширениях, настолько же важен для анализа, прошедшего путь от своих зачинателей Лейбница и Ньютона до нынешнего сложного своего строения, насколько анализ важен сам по себе: символический метод дает единственную видимую возможность освободить математический анализ от парадоксов и противоречий, которые вредят его основам со времен Зенона.

Комбинаторный анализ уже упоминался в связи с работами Ферма и Паскаля в области теории вероятностей. Однако здесь он является лишь деталью той «всеобщей характеристики», которую имел в виду Лейбниц и к которой (как будет показано) он сделал первый важный шаг. Но развитие анализа и его применений обрело такую могучую привлекательность для математиков XVIII столетия, что программа Лейбница серьезно не рассматривалась до 1840 г.

И даже после этого она игнорировалась всеми, кроме нескольких отступников от математической моды. Лишь в 1910 г. возникло современное течение в области символических рассуждений, связанное с другими «Началами» — «Началами математики» Уайтхеда и Рассела.

С 1910 г. программа Лейбница стала одной из наиболее интересных в современной математике. По курьезному правилу «вечного возвращения» теория вероятностей, положившая начало комбинаторному анализу в узком смысле (в каком понимали его Паскаль, Ферма и их последователи), подверглась в рамках программы Лейбница существенному пересмотру, пересмотру основных концепций вероятности, желательность чего была указана опытом, в частности квантовой механикой. Теперь теория вероятностей становится провинцией в обширной империи символической логики — «комбинаторики» в лейбницевском широком смысле[1].

Роль, которую Лейбниц играл в создании анализа, а также злосчастный спор, порожденный его участием в этом, были отмечены в предыдущей главе. В течение многих лет после смерти Ньютона и Лейбница (Ньютон был похоронен в Вестминстере, священном для всех людей в мире, говорящих по-английски, Лейбниц — в обычной могиле, у которой в момент похорон находились только секретарь и могильщики) лишь Ньютону воздавались честь и хвала, лишь на него сыпались упреки, связанные с великим открытием, по крайней мере везде, где пользовались английским языком.

Сам Лейбниц не реализовал свой великий проект сведения всех точных рассуждений к оперированию символами. Более того, это не сделано и до сих пор. Но он представлял себе, как все это сделать, и положил тому многозначительное начало. Служба у князьков, приносившая суетные почести, универсальность его ума и изматывающие споры последних лет жизни — все это препятствовало созданию им шедевра, подобного ньютоновым «Началам». Подытоживая все, что Лейбниц довел до конца при своем ненасытном любопытстве и разносторонности своей активности, мы видим известную трагедию разбрасывания великого таланта, случившуюся не с одним математиком. Ньютон добивался поста, который не стоил его мизинца, Гаусс отвлекался от важнейших трудов, чтобы завоевать признание людей, значительно уступавших ему интеллектуально. Из величайших математиков один только Архимед никогда не отклонялся от своих занятий; он принадлежал по рождению к тому классу, в который стремились попасть другие: Ньютон — грубо и прямо, Гаусс — косвенно и, несомненно, бессознательно (сам по себе он был простым из простых).

У Лейбница алчность к деньгам, которые он получал от своих

---

[1] В этом плане сложилось аксиоматическое построение теории вероятностей на основе понятия булевой алгебры событий. Наиболее распространенной стала логическая схема построения теории вероятностей, разработанная в 1933 г. А. Н. Колмогоровым. В ее основу положено понятие множества элементарных событий.

аристократических заказчиков, породила его интеллектуальную праздность: он всегда был занят распутыванием генеалогий полукоролевских отпрысков. Но более гибельную роль, чем страсть к деньгам, сыграла универсальность его интеллекта. Гаусс порицал его за то, что он расточал свой блестящий талант к математике, занимаясь разными вещами, в которых никто не может надеяться быть выше всех других, в то время как в математике он имел все для этого. Многообразие его гения позволило ему прийти к тому, что упустили и Архимед, и Ньютон, и Гаусс, — к мечте об «универсальной характеристике». Пусть другие занялись ее осуществлением, Лейбниц участвовал в этом, насколько это было возможно.

Про него можно сказать, что он прожил не одну, а несколько жизней. Как дипломат, историк, философ и математик он сделал в каждой из этих областей достаточно, чтобы заполнить одну обычную трудовую жизнь. Будучи почти на четыре года младше Ньютона, он родился в Лейпциге 1 июля 1646 г. и прожил не 85 лет, как Ньютон, а только 70. Умер он в Ганновере 14 ноября 1716 г. Он происходил из состоятельной семьи, три поколения которой служили саксонскому правительству. Отец его был профессором моральной философии. С ранних лет Лейбниц дышал атмосферой науки и политики.

В 6-летнем возрасте он потерял отца, но до этого успел перенять от него любовь к истории. Хотя Лейбниц посещал школу в Лейпциге, он в значительной степени был самоучкой благодаря непрестанному чтению книг из библиотеки отца. Восьми лет он начал учить латынь и к 12 годам освоил ее настолько, что мог сочинять вполне приличные латинские стихи. От латыни он перешел к греческому, который выучил также в основном самостоятельно.

Изучение классических языков перестало удовлетворять его, и он обратился к логике. Ему не было и 15 лет, когда он предпринял попытку реформировать логику, именно логику древних, логику схоластов и отцов церкви. И из этой попытки возник зародыш его всеобщей характеристики, или универсальной математики, которая, как показали Кутюра, Рассел и другие, является ключом к пониманию его философии. Символическая логика, изобретенная Булем в 1847—1854 гг., есть только часть «характеристики» — часть, которую Лейбниц назвал *исчислением высказываний* (calculus ratiocinator). Позже мы приведем его собственное описание универсальной характеристики.

В возрасте 15 лет Лейбниц поступил в Лейпцигский университет и стал студентом-юристом. Юриспруденция, однако, не занимала все его время. В первые два года учебы он увлекался чтением философских книг и вскоре открыл для себя новый мир, созданный Кеплером, Галилеем и Декартом. Увидев, что постигнуть этот мир может лишь тот, кто знает математику, Лейбниц провел лето 1663 г. в Иенском университете, где посещал математические лекции Эрхарда Вейгеля — человека со значительной местной репутацией, но вряд ли стóящего математика.

Вернувшись в Лейпциг, Лейбниц сосредоточил свое внимание на праве. К 1666 г., в возрасте 20 лет, он был уже полностью подготовлен к соисканию докторской степени. Напомним что это был тот самый год уединения Ньютона в Вулсторпе, который привел его к открытию анализа и закона всемирного тяготения. Факультетские власти отказали Лейбницу в присвоении степени — официально из-за его молодости, а по существу потому, что знали юриспруденцию в меньшей степени, чем Лейбниц.

Перед этим он получил степень бакалавра (в 1663 г.) в 17-летнем возрасте, написав блестящий очерк, в котором содержались наметки одного из основных учений его философии зрелых лет.

Не перенеся мелочности на факультете, Лейбниц навсегда оставил родной город и переехал в Нюрнберг, где 5 ноября 1666 г. от Альтдорфского университета сразу же получил степень доктора; ему предложили стать профессором права университета. Но Лейбниц отказал в просьбе, сказав, что имеет совершенно другие намерения. Кажется маловероятным, что они заключались в решении служить мелким князькам, но именно так вскоре получилось. Трагедия Лейбница состояла в том, что он столкнулся с юристами раньше, чем с естествоиспытателями.

По пути из Лейпцига в Нюрнберг Лейбниц составил очерк о преподавании права и о предлагаемом его пересмотре. Это очень характерно для Лейбница, всю жизнь обладавшего способностью работать где угодно, в любое время и в любых условиях. Он читал, писал и размышлял непрерывно. Большинство его математических работ, не говоря уж о сочинениях на бесчисленное множество других тем, написаны им в тряских, продуваемых ветрами колымагах, таскавших его по Европе XVII в. Результатом всей этой беспрестанной активности была масса бумаг всех размеров и всех сортов, огромная, как стог сена, которые он никогда так и не разобрал и тем более не опубликовал. Сейчас большинство из них лежат сложенными в кипу в Ганноверской библиотеке, ожидая терпеливого труда армии исследователей для того, чтобы отделить зерна от соломы. Кажется невероятным, что одна человеческая голова могла породить столько мыслей, опубликованных и неопубликованных, которые содержатся в бумагах Лейбница.

Счастливый для Ньютона 1666 год был знаменательным также для Лейбница. В сочинении «О комбинаторном искусстве», 20-летний юноша поставил своей целью создать «*общий метод, с помощью которого все истины могут быть сведены к некоторому виду вычислений. В то же время это должен быть род универсального языка или записей, однако коренным образом отличный от всех предложенных до сих пор*; *в нем символы и даже слова будут направлять мысль, и ошибки, исключая ошибки в данных, могут быть только ошибками вычислений. Очень трудно будет составить или изобрести этот язык, или характеристику, но его будет очень легко понимать без всяких словарей*». В более позднем описании Лейбниц уверенно (и оптимистично) оценивает количество времени, нужное для осуществления этого проекта: «Я думаю, что несколько подходящих людей могут выполнить задачу за пять лет». К концу своей жизни Лейбниц сожалел, что слишком много отвлекался на другие предметы и не осуществил свою идею сам. Он говорил, что, если бы был моложе или хотя бы имел сведущих молодых помощников, он мог бы все еще сделать это.

Забегая несколько вперед, скажем, что мечта Лейбница воспринималась современными ему математиками и естествоиспытателями именно как мечта и ничего больше. Ее вежливо игнорировали как идею-фикс здравомыслящего во всем другом, универсально одаренного гения. В письме от 8 сентября 1679 г. Лейбниц (говоря о геометрии, в частности о всяких рассуждениях вообще) сообщает Гюйгенсу о «новой характеристике, совершенно отличной от алгебры, которая будет иметь большие преимущества для точного представления разуму естественным образом всего, что опирается на творческие способности ума».

Такой прямой символический способ трактовки в геометрии был изобретен в XIX столетии Германом Грассманом (чьи алгебраические работы обобщали работы Гамильтона). Лейбниц продолжал обсуждать трудности, присущие его проекту, и вскоре подчеркнул, что он усматривает его превосходство перед декартовой аналитической геометрией.

«Но главная его полезность состоит в выводах и рассуждениях, которые можно преобразовывать с помощью действий над знаками [символами], которые для своего выражения графиками (или даже моделями) потребовали бы слишком большой обработки или образовали бы столь запутанную систему огромного количества точек и прямых, что разобраться в ней было бы немыслимо без неисчислимых тщетных попыток; в противоположность этому указанный метод вел бы [к конечной цели] уверенно и просто. Я думаю, что механику можно будет трактовать с помощью этого метода почти так же, как геометрию».

Из конкретных вещей, которые Лейбниц сделал в области своей всеобщей характеристики, называемой теперь символической логикой[1], можно упомянуть здесь формулировку основных свойств логического сложения и логического умножения, отрицания, нулевого класса и класса включения. Все это промелькнуло мимоходом. Если бы оно было подхвачено способными людьми, когда широко пропагандировалось Лейбницем, а не в 1840-х годах, история математики могла бы быть теперь совсем другой. Но поздно все же лучше, чем никогда.

Лелея свою универсальную мечту в 20-летнем возрасте, Лейбниц вскоре обратился к более практическим делам и стал своеобразным юристконсультом и прославленным коммивояжером курфюрста Майнцского. Бросая последний взгляд на мир своих мечтаний,

---

[1] С недавнего времени, чаще — математической логикой.

перед тем как погрузиться с головой во всякую политику, Лейбниц посвятил несколько месяцев алхимии.

Курфюрст поручил Лейбницу пересмотреть свод законов. Ему доверяли важные дела всех степеней деликатности. Он стал первоклассным дипломатом — всегда любезным, всегда располагающим к себе своей прямотой, но лишенным искренности. Это его гений создал, по крайней мере частично, нестойкую формулу, известную как «равновесие сил».

Вплоть до 1672 г. Лейбниц знал мало о современной ему математике. Ему было 26 лет, когда началось его настоящее математическое образование под руководством Гюйгенса, с которым он встречался в Париже в промежутках между дипломатическими делами. Христиан Гюйгенс (1629—1695) был прежде всего физиком. Несколько из лучших его работ относятся к часовому делу и волновой теории света, но он был и замечательным математиком. Он подарил Лейбницу экземпляр своего математического труда о маятниковых часах. Пораженный мощью математического метода, находящегося в умелых руках, Лейбниц попросил Гюйгенса давать ему уроки, на что последний, видя глубокую одаренность Лейбница, с удовольствием дал согласие. К этому времени Лейбниц уже составил впечатляющий список открытий, сделанных им с помощью собственных методов, проявлений всеобщей характеристики. Среди них была вычислительная машина, намного лучшая, чем машина Паскаля, производившая лишь сложение и вычитание. Машина Лейбница выполняла также умножение, деление и извлечение корней. Благодаря руководству опытного Гюйгенса Лейбниц быстро нашел свое призвание, ведь он был прирожденным математиком.

Занятия были прерваны с января по март 1673 г., когда Лейбниц находился в Лондоне в качестве атташе курфюрста. В Лондоне Лейбниц встретился с английскими математиками и показал им некоторые из своих работ, но от них лишь узнал, что все это уже известно. Его английские друзья рассказали ему о Меркаторовой квадратуре гиперболы, одной из путеводных нитей, которым следовал Ньютон в изобретении анализа. Так, Лейбниц ознакомился с методом бесконечных рядов, разработку которого он продолжил. Одно из его открытий, иногда приписываемое шотландскому математику Джеймсу Грегори (1638—1675), следует упомянуть в этой связи; его, если обозначить через π отношение длины окружности к ее диаметру, можно записать так:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots,$$

где ряд продолжается подобным образом неограниченно. Это не дает практического способа вычисления значения числа π (3,1415926...), но простая связь между π и *всеми* нечетными числами является поразительной.

Во время пребывания в Лондоне Лейбниц присутствовал на собраниях Королевского общества, где демонстрировал свою вычислительную машину. За это, а также за другие работы он был избран иностранным членом Общества, перед тем как вернулся в Париж в марте 1673 г. Он и Ньютон последовательно в 1700 г. стали первыми иностранными членами Французской академии наук.

Сделанное Лейбницем в ходе его поездки очень понравилось Гюйгенсу, и он настаивал на продолжении занятий. Лейбниц посвящал каждую свободную минуту математике и до того, как уехал из Парижа в Ганновер в 1676 г., чтобы поступить на службу к герцогу Брауншвейг-Люнебургскому, установил некоторые первоначальные формулы анализа и открыл «основную теорему анализа» (смотрите предыдущую главу) в 1675 г., если принять дату, называемую им самим. Это оставалось необнародованным до 11 июля 1677 г., когда прошло уже 11 лет со времени неопубликованного открытия Ньютона, ставшего известным только после появления работы Лейбница. Спор стал разгораться после того, как Лейбниц анонимно поместил суровый критический обзор работ Ньютона в журнале «Acta Eruditorum», который Лейбниц основал в 1682 г. и вел его издание. За время между 1677 и 1704 гг. лейбницевский анализ был развит на континенте в действенно мощный и легко применимый инструмент в значительной мере благодаря усилиям швейцарцев Бернулли — Якова и его брата Иоганна[1]. В то же время в Англии из-за нежелания Ньютона свободно поделиться своими математическими открытиями с другими анализ все еще был сравнительно неопробованной редкостью.

Один пример из того, что сейчас легко доступно для начинающих изучать анализ, но что стоило Лейбницу (как, возможно и Ньютону) многих размышлений и многочисленных попыток, прежде чем был найден правильный путь, может показать, как далеко продвинулась вперед математика после 1675 г. Вместо бесконечно малых Лейбница будем использовать скорости изменения, о которых шла речь в предыдущей главе.

Если u и v — функции от x, то как скорость изменения относительно x произведения $u \cdot v$ выражается через соответствующие скорости изменения u и v? В символической записи как выражается $\frac{d(uv)}{dx}$ через $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$? Лейбниц одно время думал, что как $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$, что совсем не похоже на правильное выражение[2]:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

[1] В этом важнейшую роль сыграли опубликованные Лейбницем в названном журнале первые его работы по дифференциальному (1684) и интегральному (1686) исчислению. Ранее некоторые сведения о работах как Лейбница, так и Ньютона по анализу оставались малоизвестными. Они содержались в соответствующей переписке, доступной небольшому числу ученых.

Работы Ньютона по анализу стали публиковаться с 1704 г.

[2] У Лейбница запись имела вид $d(uv) = udv + vdu$.

В 1673 г. курфюрст умер, и во время своего последнего визита в Париж Лейбниц был более или менее свободен. Покинув Париж в 1676 г., Лейбниц перед Ганновером посетил Лондон и Амстердам. Именно в Амстердаме Лейбниц как будто был очень неэтичен в вопросах этики. Он, видимо, считал, что этику нужно приспосабливать к практическим целям. Специалисты в этой области, кажется, согласны в том, что философия Лейбница в той мере, в какой она касается этики, заимствована у Спинозы (1632—1677) без выражения ему признательности.

Имеются по крайней мере два аналогичных примера в математике (эллиптические функции и неевклидова геометрия), где некоторое время имевшихся тогда в наличии данных было достаточно, чтобы обвинить нескольких ученых в большем бесчестии, чем приписываемое Лейбницу. Но когда подлинные дневники и переписка стали известными спустя годы после смерти всех обвиненных, оказалось, что все они ни в чем не виновны.

Последующие сорок лет жизни Лейбница прошли в обычной службе у Брауншвейгов. При этом он был один в трех лицах — и библиотекарем, и историком, и главным советником династии. Его исторические изыскания вынудили его объездить в 1687 — 1690 гг. всю Германию, а затем Австрию и Италию.

Во время своего пребывания в Италии Лейбниц посетил Рим. Папа уговаривал его принять должность библиотекаря Ватикана. Лейбниц отказался. Его упорное нежелание сменить один хороший пост на другой можно объяснить тем, что он приступил к следующему применению своей «всеобщей характеристики» — наиболее фантастически честолюбивому из всех его обширных мечтаний. Он замыслил воссоединить протестантскую и католическую церкви. В то время раскол между ними был не столь уже давним, и этот план не представлялся столь безумным, как теперь.

Это было примерно то время, когда Лейбниц обратился к философии как к своему наибольшему утешению. Философия занимала Лейбница в течение всей остальной жизни — почти четверть века. За 25 лет он напустил в философию достаточно обширное облако тумана. Каждый читатель, несомненно, слышал что-нибудь о хитроумной теории монад — миниатюрных моделей вселенной, из которых составляется *всё* в природе, как некий вид одного во всем и всего в одном; с их помощью Лейбниц объяснял все (кроме самих монад) в этом и потустороннем мире.

Силу лейбницевского метода, примененного к философии, невозможно отрицать. В попытке доказать основную теорему оптимизма «все — к лучшему в этом лучшем из миров» успех сопутствовал ему в меньшей степени. Уже в 1759 г., спустя только сорок три года после того, как забытый всеми Лейбниц умер, Вольтер опубликовал свой эпохальный трактат «Кандид», направленный против необоснованного оптимизма. Можно назвать еще один результат Лейбница: отрицание «пустого пространства» как бессмыслицы. Для современной теории относительности оно стало также неприемлемым.

Перечень интересов Лейбница все еще далеко не полон. Экономика, филология, международное право (в котором он был пионером), устройство рудников, богословие, основание академий, воспитание юной Бранденбургской принцессы — все привлекало его внимание и во всем он делал что-то значительное. Возможно, наименее успешно он занимался механикой и естественными науками, где его случайные промахи оказываются грубыми ошибками в спокойном ровном свете трудов таких ученых, как Галилей, Ньютон, Гюйгенс или даже Декарт.

Только одно из вышеуказанного требует еще внимания. Когда он был вызван в 1700 г. в Берлин, чтобы обучать юную принцессу, Лейбниц нашел время для организации Берлинской академии наук[1]. Он и стал ее первым президентом. Эта академия была одной из трех или четырех ведущих в мире, пока ее не «очистили» нацисты[2]. Аналогичные попытки, предпринятые в Дрездене, Вене и Петербурге, в течение жизни Лейбница не дали ничего, но после его смерти план создания Санкт-Петербургской академии наук, который он набросал для Петра Первого, был осуществлен. Попытка основать Венскую академию была сорвана иезуитами во время последнего визита Лейбница в Австрию в 1714 г. Он был уже не тем, что прежде; его последние свершения были лишь тенью былой славы.

Лейбниц вернулся в Брауншвейг в сентябре 1714 г. и узнал, что его покровитель курфюрст Георг-Людвиг уехал в Лондон, чтобы стать первым английским королем германского происхождения. Самым желанным для Лейбница было последовать за Георгом в Лондон, хотя его враги в Королевском обществе и везде в Англии стали многочисленными и довольно злыми из-за спора с Ньютоном, но Георг не нуждался больше в дипломатии Лейбница и коротко приказал человеку, помогшему ему подняться в цивилизованное общество, оставаться в ганноверской библиотеке и продолжать писать бесконечную историю знаменитого рода Брауншвейгов.

Когда через 2 года (1716) Лейбниц умер, дипломатически составлявшаяся история все еще была незавершенной. Несмотря на весь свой труд, Лейбниц не смог продвинуться дальше 1005 г. и охватить даже три столетия: род был очень запутанным.

Как дипломат и государственный деятель, Лейбниц, несомненно, относился к элите таких людей любого времени и любой страны, и он был умнее их всех, вместе взятых.

Теперь, более двух столетий спустя после смерти Лейбница, его репутация как математика выше той, какой она была много-много лет после того, как секретарь провожал его к могиле, и она все возрастает.

---

[1] Первоначально (1700—1711) Берлинское общество наук.

[2] С 1946 г. ее заменила Германская академия наук в Берлине, ставшая затем Академией наук Германской Демократической Республики.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ВРОЖДЕННОЕ ИЛИ ПРИОБРЕТЕННОЕ?

СЕМЕЙСТВО БЕРНУЛЛИ (XVII и XVIII столетия)

Эти ученые мужи, несомненно, свершили многое и великолепно достигли цели, которую сами себе поставили. — ИОГАНН БЕРНУЛЛИ

ПОРАЗИТЕЛЬНЫМ явлением в истории математики представляется семейство Бернулли, 3 последовательных поколения которого дали 8 математиков, в том числе несколько выдающихся, которые, в свою очередь, породили многих потомков, примерно половина которых одарена более чем средними талантами и которые почти все, вплоть до нынешних дней, были превосходными людьми. Можно проследить генеалогию не менее 120 потомков математиков Бернулли, большинство которых добились отличий, иногда выдающихся в правоведении, науке, литературе, богословии, медицине, управлении и искусстве. Не было ни одного неудачника.

Поскольку Бернулли сыграли ведущую роль в развитии анализа и его приложений в XVII и XVIII столетиях, о них следует не только упоминать мимоходом даже в самых коротких очерках развития современной математики. Бернулли и Эйлер действительно были больше всех других первопроходцами, они так усовершенствовали анализ, что совершенно обычные люди смогли применять его для получения результатов, которых не могли найти самые великие из древних греков. Но сам по себе объем сделанного семейством Бернулли слишком обширен для подробного описания в очерке, подобном настоящему, так что мы кратко рассмотрим труды их всех вместе.

Семейство Бернулли

Николай Старший 1623—1708

- Яков I 1654—1705
- Николай I 1662—1716
  - Николай II 1687—1759
- Иоганн I 1667—1748
  - Николай III 1695—1726
  - Даниил 1700—1782
  - Иоганн II 1710—1790
    - Иоганн III 1746—1807
    - Яков II 1759—1789

Семейство Бернулли было одним из протестантских семейств, которые бежали из Антверпена в 1583 г., чтобы избежать избиения католиками. Семейство нашло убежище сначала во Франкфурте, а вскоре перебралось в Швейцарию, где осело в Базеле. Основатель династии Бернулли женился на представительнице одного из самых старинных семейств Базеля и стал крупным купцом. Николай Старший, который возглавляет нашу генеалогическую таблицу, так же был крупным купцом, как его дед и прадед. Все они женились на дочерях купцов и, за одним исключением (прадеда, занимавшегося медициной), были очень удачливы. Математический талант был, по-видимому, скрыт в поколениях семейства сообразительных купцов и по-настоящему проявился внезапно как взрыв.

Имея в виду приведенную выше таблицу, дадим очень краткую сводку основной научной деятельности восьми математиков, потомков Николая Старшего.

Яков I самостоятельно овладел лейбницевской формой анализа. С 1687 г. до самой смерти он был профессором математики в Базеле. Яков I — один из первых среди тех, кто развил анализ значительно дальше того состояния, в каком его оставили Ньютон и Лейбниц, и применил его к новым трудным и важным задачам. Исключительно значительным был вклад Якова I в аналитическую геометрию, теорию вероятностей и вариационное исчисление. Ввиду того что последнее будет часто встречаться (в трудах Эйлера, Лагранжа и Гамильтона), опишем суть нескольких задач из этой области, рассмотренных Яковом I. Одна из задач вариационного исчисления уже встречалась при освещении принципа наименьшего времени, данного Ферма.

Вариационное исчисление имеет очень давнее происхождение. Согласно легенде*, при основании Карфагена городу пожаловали столько земли, сколько один человек может запахать за один день. Какой вид должна иметь борозда, если человек может за день запахать борозду определенной длины? Говоря математическим языком, какая из всех фигур, имеющих данный периметр, имеет наибольшую площадь? Это *изопериметрическая задача*, ее решением является круг. Утверждение кажется очевидным, но доказать его нелегко. (Элементарные «доказательства», иногда приводимые в школьных учебниках, явно обманчивы.) Математически задача сводится к отысканию максимума некоторого интеграла при определенном ограничительном условии. Яков I решил эту задачу и обобщил ее**.

---

* В действительности здесь объединены две легенды. Царице Дидоне дали столько земли, сколько можно «охватить» шкурой быка. Она разрезала шкуру на тонкие полоски и охватила ими полукруг (ограниченный берегом моря).

** Исторические сведения об этой и других задачах вариационного исчисления можно найти в книге G. A. Bliss Calculus of Variations (Chicago). 1925[1].

[1] На русском языке: Б л и с с Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950.

Открытие того факта, что брахистохрона (кривая скорейшего спуска) является циклоидой, упоминалось в предыдущих главах. Оно было сделано братьями Яковом I и Иоганном I в 1697 г. и почти одновременно еще несколькими учеными. Но циклоида есть также таутохрона. Это обстоятельство поразило Иоганна I, как нечто замечательное и восхитительное: «Со всей справедливостью мы должны преклоняться перед Гюйгенсом, так как он первый открыл, что тяжелая частица движется по циклоиде всегда одно и то же время, независимо от своего исходного положения. Но вы окаменеете от удивления, когда я скажу, что та же циклоида, таутохрона Гюйгенса, является и брахистохроной, которую мы ищем» (по Блиссу). Якова это также привело в возбуждение. Если названные нами задачи покажутся читателю тривиальными, повторим еще раз, что в математической физике тот или иной раздел часто весь строится целиком на простом *вариационном принципе*, как оптика — на принципе Ферма или динамика — на принципе Гамильтона.

После смерти Якова был опубликован в 1713 г. его замечательный трактат по теории вероятностей. Он содержит много того, что все еще является чрезвычайно полезным в теории вероятностей и ее применениях в страховании, статистике и математическом изучении наследственности.

Другое исследование Якова показывает, как далеко он продвинулся в разработке дифференциального и интегрального исчисления. Продолжая работы Лейбница, он провел чрезвычайно подробное исследование цепной линии — кривой, по которой провисает тяжелая однородная цепь, подвешенная в двух своих точках. Это не было праздным любопытством. Теперь математическое решение Якова стало применяться к подвесным мостам и высоковольтным линиям электропередачи. Когда Яков Бернулли отыскивал его, задача была новой и трудной; теперь она является упражнением по анализу или механике на первом году их изучения.

Яков I и его брат Иоганн I не всегда были в хороших отношениях между собой. Иоганн, кажется, был более сварливым. Во всяком случае, он отнесся к своему брату не очень честно в вопросах, связанных с изопериметрической задачей. Оба Бернулли принимали все, касающееся математики, в высшей степени серьезно. Некоторые из их писем математического содержания изобилуют не приличествующими им очень сильными выражениями.

Иоганн I, со своей стороны, не только пытался присвоить идеи своего брата, но и выгнал из дома родного сына, когда тот получил премию Французской академии наук, на которую рассчитывал отец.

Яков I имел склонность к мистике. Она проявилась к концу его жизни. Существует некая спираль (логарифмическая, или равноугольная), которая порождает подобную же спираль при многих геометрических преобразованиях. Яков был так поражен воспроизводимостью спирали, ряд свойств которой он открыл, что завещал высечь ее изображение на своей могиле с надписью: «Eadem mutate resurgo» («Измененная, восстанавливаюсь такой же»)[1].

Любимым изречением Якова было латинское выражение «Против воли отца я изучаю звезды» — ироническое напоминание о том, что он посвятил себя математике и астрономии, несмотря на противодействие отца. Если бы Яков уступил отцу, он стал бы богословом.

Иоганн I начал свою деятельность не как математик, а как медик. Его спор с братом, который великодушно обучил его математике, был уже упомянут. Иоганн был человеком страстных симпатий и антипатий. Лейбниц и Эйлер были его кумирами. Ньютона он оценивал крайне низко, как и должен был делать пламенный приверженец Лейбница. Упрямый отец пытался ввести младшего сына в торговые дела семьи, но Иоганн I, следуя примеру брата, воспротивился и пошел в медицину и гуманитарные науки. Восемнадцати лет он получил степень магистра. Вскоре, однако, он понял свою ошибку и переключился с медицины на математику. Сначала он определился в 1695 г. в Гронинген как профессор математики, а после смерти Якова I в 1705 г. стал его преемником, как профессор в Базеле.

Иоганн I был еще более плодовитым в математике, чем его брат, и очень много сделал для распространения анализа в Европе. Его интересы охватывали также физику, химию и астрономию. В области приложений Иоганн I много сделал в оптике, занимался теорией приливов и отливов и математической теорией парусных судов, возвестил принцип возможных перемещений в механике. Он был человеком необычной физической и интеллектуальной жизненной силы и оставался активным до самых последних дней своей 80-летней жизни.

Николай I, брат Якова I и Иоганна I, был также одарен математически. Как и братья, он не сразу нашел себя. В 16 лет он получил степень доктора философии в Базельском университете, а в 20 лет заслужил высшую степень по правоведению. Он был профессором права в Берне. Потом стал математиком Петербургской академии наук. Там его ценили настолько высоко, что императрица Екатерина I приняла его публичные похороны на государственный счет[2].

Иоганн I пытался сделать своего второго сына, Даниила, деловым человеком. Но Даниил полагал, что он предпочитает медицину, и стал врачом еще до того, как, вопреки самому себе, остановился на математике. Одиннадцати лет Даниил начал брать уроки математики у своего брата, Николая III, который был только на пять лет старше. Даниил и великий Эйлер были близкими друзьями, а иногда и доброжелательными соперниками. Как и Эйлер, Даниил Бернулли десять раз удостаивался премий Французской академии

---

[1] Однако спираль на намогильном камне напоминает спираль Архимеда.

[2] Последние 2 предложения никакого отношения к Николаю I, умершему в 1716 г., еще до открытия Академии наук в Петербурге (1725), иметь не могут. То, что в них сказано, произошло с Николаем III, первым сыном Иоганна I.

наук (в нескольких случаях премия распределялась между несколькими соискателями, добившимися успеха). Некоторые из лучших работ Даниила относятся к гидродинамике, которую он однообразно развил из единственного принципа, получившего потом название закона сохранения энергии. Всякий, кто сегодня занимается теоретическими или прикладными вопросами движения жидкости, знает имя Даниила Бернулли.

В 1725 г. (в возрасте 25 лет) Даниил стал профессором математики в Петербурге, спустя 8 лет он вернулся в Базель, где стал профессором анатомии и ботаники и, наконец, физики. Его математические работы относятся к анализу, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей, теории колебаний струны, началам кинетической теории газов и к многим другим проблемам прикладной математики. Даниила Бернулли называют основателем математической физики[1].

Третий математик второго поколения, Иоганн II, брат Николая III и Даниила, начав с правоведения, стал профессором риторики в Базеле, а затем наследовал математическую кафедру своего отца. Его работы относятся главным образом к физике: они были настолько оригинальными, что удостоились трех Парижских премий (между тем достаточно и одной медали, чтобы выделить хорошего математика).

Иоганн III, сын Иоганна II, подобно отцу, занялся сперва правоведением. В 13 лет он получил степень доктора философии. В 19 лет Иоганн III нашел свое истинное призвание и был назначен королевским астрономом в Берлине. Его интересы распространялись на астрономию, географию и математику.

Яков II, другой сын Иоганна II, повторил промах многих Бернулли и начал с правоведения. Только в 21 год он переключился на экспериментальную физику. Он занимался также математикой и был избран членом Петербургской академии наук по отделению математики и физики. Его ранняя смерть (30 лет он утонул) оборвала многообещающую карьеру. Он был женат на внучке Эйлера.

Перечень тех Бернулли, в ком проявился математический талант, далеко еще не исчерпан, но остальные их представители менее значительны. Пока математика была наиболее обещающим полем деятельности для высокоталантливого человека — такое положение сложилось сразу после изобретения анализа, — одаренные Бернулли занимались математикой. Но математика и естественные науки представляют собой лишь два из бесчисленного количества направлений, в которых люди могут прилагать свои усилия, и для одаренных людей идти в эти области, когда они становятся уже «перенаселенными», означает поступить непрактично. Талант Бернулли не был истрачен. Он просто сосредоточивался на предметах, по тому времени социально столь же или более важных, чем математика.

---

[1] Наряду с Даламбером и особенно Эйлером.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ВОПЛОЩЕННЫЙ АНАЛИЗ

ЭЙЛЕР (1707—1783)

Эйлер вычислял без всякого видимого усилия, как человек дышит или как орел парит над землей.— ДОМИНИК АРАГО

АФОРИЗМ АРАГО не преувеличивает несравненных математических способностей Леонарда Эйлера (1707—1783), самого продуктивного математика в истории, человека, которого современники назвали «воплощенным анализом». Эйлер писал свои великие работы так же легко, как опытный литератор пишет письма друзьям. Даже полная слепота в течение последних 17 лет жизни не сдержала его беспрецедентной активности. Более того, у Эйлера с потерей зрения обострилось восприятие внутреннего мира математики, обострилось воображение.

Объем научного наследия Эйлера не был точно известен вплоть до 1936 г., но делались оценки, что понадобится от 60 до 80 больших томов, чтобы издать полное собрание его сочинений. В 1909 г. Швейцарская ассоциация естественных наук предприняла публикацию рассеянных трудов Эйлера, опираясь на финансовую помощь со стороны математических обществ и частных лиц всего мира, справедливо полагая, что Эйлер принадлежит не одной Швейцарии, а всей мировой цивилизации. Предполагаемая сумма расходов неожиданно намного возросла, когда в Петербурге (Ленинграде) была обнаружена до того неизвестная масса рукописей Эйлера.

Математическая деятельность Эйлера началась в год смерти Ньютона. Более благоприятного периода для гения, подобного Эйлеру, нет возможности указать. Аналитическая геометрия (опубликованная в 1637 г.) была в ходу уже 90 лет, анализ — около 50, а закон всемирного тяготения Ньютона, являющийся ключом к изучению вселенной, был известен ученым 40 лет. В каждой из этих областей было решено множество отдельных задач, то здесь, то там делались заметные попытки к унификации, но систематическое наступление на всю тогдашнюю чистую и прикладную математику не предпринималось. В частности, мощные аналитические методы Декарта, Ньютона и Лейбница еще не были разработаны до пределов их возможностей, особенно в механике и геометрии.

Находившиеся на более низком уровне развития алгебра и тригонометрия также ожидали систематизации и распространения; последняя была почти готова для полного завершения. В области диофантова анализа и изучения свойств целых чисел, чем занимался Ферма, не было возможностей такого «временного совершенства», но даже и здесь Эйлер показал себя мастером. Действительно, одной из наиболее замечательных черт универсального гения Эйлера была его одинаковая устремленность в оба главных течения математики, математики непрерывного и дискретного.

Как алгоритмист Эйлер не превзойден никем, и здесь, вероятно, к нему никто даже не приближается, кроме, может быть, Якоби. Алгоритмист — это математик, который изобретает алгоритмы для решения задач специальных видов. Для пояснения приведем такой пример. Предположим (или докажем), что всякое положительное число имеет действительный квадратный корень. Как этот корень может быть вычислен? Для этого имеется множество способов; алгоритмист изобретает практически осуществимые методы. Точно также в диофантовом анализе или в интегральном исчислении решение задачи может не получаться, пока не будет сделана какая-то остроумная (часто простая) замена одной или большего числа переменных функциями других переменных; алгоритмист — это математик, у которого такие остроумные расчеты (выкладки) появляются естественно. Здесь нет однообразного способа действий, — алгоритмисты, подобно поэтам, импровизаторами рождаются, а не делаются.

Когда такая одаренность действительно высока, как у индийца Рамануджана, и появляется совершенно неожиданно, то даже искусные аналитики считают ее высшим даром: глубокое проникновение в явно не связанные между собой формулы обнаруживает скрытые следы, ведущие из одной области в другие, и аналитики получают новые задачи, рождаются новые пути.

Перед тем как проследить за спокойной, но интересной жизнью Эйлера, мы должны упомянуть о двух обстоятельствах того времени, которые способствовали усилению его колоссальной активности и приданию ей определенного направления.

В XVIII столетии университеты не являлись основными центрами исследований в Европе. Они могли бы стать таковыми быстрее, чем стали, если бы не их классические традиции и неприязнь к естественным наукам. Математика, тесно связанная с античностью, признавалась и уважалась, но к физике, более новой науке, относились с подозрением. Кроме того, математик в университете того времени был озабочен элементарным преподаванием, и какие-либо его исследования считались бесполезной роскошью. При таком равнодушии или открытом неодобрении не могло случиться, чтобы университеты взяли на себя ведущую роль в развитии естественных наук.

Ведущее положение приобрели королевские академии, поддерживаемые некоторыми правителями. Развитию математики содействовали прусский король Фридрих Великий и русская царица Екатерина Вторая. Для Эйлера Берлин и Петербург были оплотами математической деятельности. Академии в Петербурге и Берлине предоставили Эйлеру возможность стать самым продуктивным математиком всех времен.

Берлинская академия духовно умирала на протяжении 40 лет, пока Эйлер, побуждаемый Фридрихом Великим, не возродил ее к жизни; Петербургская академия, до дня открытия которой немного не дожил Петр Великий, также получила мощное подкрепление в лице Эйлера.

Названные академии были исследовательскими учреждениями, которые *содержали* своих членов с целью *выполнения ими научных исследований*. Обеспечение было достаточно высоким. Количество домочадцев Эйлера одно время достигало 18 человек, и тем не менее он был в состоянии содержать их всех должным образом.

Случилось так, что важнейшая проблема математических исследований во времена Эйлера тесно переплеталась с практической проблемой, по-видимому, первостепенного значения для этого века, с проблемой контроля над морями. Страна, которая в навигационном искусстве превосходила все другие страны, неизбежно властвовала над морями. Но навигация есть во многом умение точно определять свое местонахождение в открытом море, далеко от берегов. Кто делал это лучше других, тот имел преимущества в морских сражениях. Британия, как известно, правила морями. Этим она была обязана в немалой степени тем практическим приложениям, которые ее навигаторы оказались способными извлечь из чисто математических исследований XVIII в. в области небесной механики.

Одно из таких применений касалось Эйлера непосредственно. Основателем современной навигационной науки был, конечно, Ньютон, хотя он никогда не утруждал свой ум размышлениями об определении координат в море и ни разу в жизни не ступал (насколько нам известно) на палубу корабля. Положение в море стали определять с помощью наблюдения небесных тел (иногда включая спутников Юпитера). Как только на основе ньютоновского закона всемирного тяготения было показано, что при достаточном терпении положения планет и фазы Луны можно рассчитать, если необходимо, на столетие вперед, то те, кто хотел властвовать над морями, посадили своих вычислителей за морской альманах, чтобы вымучить таблицы будущих положений.

При таких практических расчетах с использованием Луны приходится иметь дело с особенно трудной задачей, так называемой задачей трех тел, взаимно притягивающихся согласно закону Ньютона. Эта задача будет встречаться нам много раз по мере нашего продвижения к XX столетию; Эйлер был первым, кто представил решение задачи о движении Луны в пригодном для вычислений виде (это его теория Луны). Три тела данной задачи — Луна, Земля и Солнце. Задача является одной из самых трудных во всей математике. Эйлер не решил ее полностью, но его метод приближенных вычислений (замененный в наше время лучшими методами) был достаточно хорош для практических целей, и, пользуясь им, британский вычислитель сумел сосчитать таблицы движения Луны для своего Адмиралтейства. За этот труд вычислитель получил 5000 фунтов стерлингов (большая по тем временам сумма), а Эйлер, открывший метод, был пожалован 300 фунтами.

Леонард Эйлер, сын Пауля Эйлера и его жены Маргариты Брюкер, вероятно, является величайшим ученым, какого когда-либо дала Швейцария. Он родился в Базеле 15 апреля 1707 г., но уже в следующем году вместе с родителями переехал в соседнюю деревеньку Рюген, где его отец стал кальвинистским пастором. Пауль Эйлер был сам хорошим математиком, учился у Якова Бернулли. Он хотел, чтобы Леонард наследовал его профессию и стал его преемником в приходе, но, к счастью, допустил оплошность, начав учить сына математике.

Юный Эйлер рано понял, чего он хочет. Тем не менее он оставался покорным сыном и, повинуясь воле отца, поступил в Базельский университет изучать богословие и древние языки. Его успехи в математике привлекли внимание Иоганна Бернулли, который любезно стал давать юноше по одному уроку в неделю частным образом. Эйлер тратил почти всю неделю на подготовку к следующему уроку, чтобы задавать своему учителю как можно меньше вопросов. Скоро его прилежание и несомненные способности были замечены Даниилом и Николаем Бернулли, которые стали его близкими друзьями.

Удовольствие заниматься науками было предоставлено Леонарду лишь до тех пор, пока он не защитил магистерскую степень в 1724 г., в возрасте 17 лет; тогда отец стал настаивать, чтобы он оставил математику и все свое время уделил богословию. Но после того как Бернулли сказали ему, что удел его сына стать великим математиком, Пауль Эйлер отступил.

Первую самостоятельную работу Эйлер написал в возрасте 19 лет. Говорили, что она сразу выявляет и сильные и слабые стороны многих последующих его работ. Парижская академия объявила на 1727 г. премию по решению задачи о расположении мачт на кораблях. Работа Эйлера премии не получила, но заслужила похвальный отзыв. Впоследствии он возместил эту потерю, удостоившись премии 12 раз. Сильной стороной работы был содержавшийся в ней анализ с помощью средств математики; слабой — отдаленность от каких-либо связей с практикой. Последнее не так уж удивительно, если вспомнить традиционные шутки, связанные с отсутствием у Швейцарии морского флота. Эйлер, возможно, видел одну-две лодки на швейцарских озерах, но он тогда еще не видел ни одного корабля. Его критиковали, иногда справедливо, за то, что его математические рассуждения расходились с его пониманием реальности. Физический мир побуждал Эйлера заниматься математикой, но едва ли был достаточно интересным для него сам по себе, и если вселенная не соответствовала его анализу, то именно в ней было что-то неладно.

Чувствуя себя сильным математиком, Эйлер претендовал на профессорскую кафедру в Базеле. Потерпев неудачу в этом, он продолжал свои занятия, поддерживаемый надеждой присоединиться к Даниилу и Николаю Бернулли, которые отправились в Петербург. Они обещали подыскать для Эйлера место в Академии наук.

Находясь в таком положении, Эйлер, кажется, был совершенно безразличен к тому, чем именно ему придется заниматься, лишь бы это было связано с наукой. Когда Бернулли написали ему об ожидаемом открытии отделения медицины в Петербургской академии наук, Эйлер набросился на физиологию и стал посещать лекции по медицине в Базеле. Но даже в этой области он не мог уйти от математики: физиология уха была связана с математическим исследованием звука, которое, в свою очередь, влекло за собой исследование распространения волн, и так далее. Эти научные занятия ветвились подобно дереву, потерявшему контроль над своим ростом, в течение всей деятельности Эйлера.

Бернулли были надежными людьми. В 1727 г. Эйлер получил официальный вызов в Петербург для поступления на отделение медицины Академии наук. Но радость бедного Эйлера была вскоре омрачена. В тот самый день, когда он ступил на землю России, умерла Екатерина I.

Екатерина I, по-видимому, была женщиной широкого ума и именно она за 2 года своего правления после смерти Петра Великого осуществила его желание учредить Академию наук. После ее смерти власть перешла в руки клики, управлявшей от имени несовершеннолетнего царя. Новые правители России смотрели на Академию как на ненужную роскошь и в течение нескольких беспокойных месяцев обдумывали, как разделаться с ней и выслать иностранных членов академии домой. Такова была ситуация, когда Эйлер прибыл в Петербург. Он проскользнул на отделение математики, предварительно чуть не став с горя лейтенантом флота.

Но все устроилось, и Эйлер приступил к работе. В течение 6 лет он не отрывался от стола, не только потому, что был поглощен без остатка математикой, но также потому, что не решался вести нормальную жизнь в обществе из-за окружавших его вероломных соглядатаев.

В 1733 г. Даниил Бернулли возвратился в Швейцарию и 26-летний Эйлер занял положение ведущего математика в академии. Чувствуя, что ему придется провести в Петербурге остаток жизни, Эйлер решил жениться и устроить свой быт. Его выбор пал на Катарину, дочь живописца Гзелля, которого Петр Великий привез с собой в Россию. С наступившим ухудшением политической обстановки Эйлер все более решительно стремился уехать, но ввиду скорого появления ребенка и дальнейшего увеличения семейства чувствовал себя на новом месте связанным еще больше, чем раньше, и нашел прибежище в непрестанных трудах. Некоторые биографы Эйлера связывают его, не имевшую себе равной, продуктивность с его первым пребыванием в России: благоразумие заставило его выработать неукоснительный режим работы и трудолюбие.

Эйлер был одним из нескольких великих математиков, которые умели работать всюду, при любых условиях. Он очень любил детей (у него своих было 13, из которых 5 умерло в раннем детстве) и часто писал свои работы, держа на коленях ребенка, в то время как старшие дети играли вокруг него. Легкость, с которой он разрабатывал наиболее трудные вопросы математики, невероятна.

О потоке идей, исходивших от него, сохранилось много легенд. Некоторые из них, безусловно, являются преувеличением, но говорят, что Эйлер мог набросать математическую статью за полчаса — между первым и вторым приглашением к обеду. Как только статья была закончена, она занимала место наверху постоянно растущей кипы работ, ожидающих издания. Когда был нужен материал для трудов академии, издателю оставалось лишь взять какую-то подборку из этой кипы. Поэтому часто получалось, что дата публикации работы отличалась от даты ее написания. Эта путаница осложнялась тем, что у Эйлера была привычка много раз возвращаться к тому или иному вопросу, чтобы внести улучшения в его освещение или дать более широкое изложение уже сделанного, так что последовательность печатных работ Эйлера по определенным вопросам, случается, представляется такой, будто смотришь в телескоп не с того конца.

Когда в 1730 г. малолетний царь умер, императрицей стала Анна Иоанновна (племянница Петра), и это событие благоприятно отразилось на судьбе академии. Но во время фактического правления Бирона, фаворита Анны, Россия испытала террор и кровопролитие, каких мало было в ее истории. Эйлер на 10 лет безмолвно погрузился в работу. В этот период его настигло первое большое несчастье. Он сделал попытку получить Парижскую премию, назначенную за решение астрономической задачи, на что ведущие математики считали необходимым потратить несколько месяцев (подробнее о подобной задаче см. в главе о Гауссе). Эйлер решил задачу за 3 дня. Но перенапряжение привело к болезни, в результате которой он ослеп на правый глаз.

Математика не поглощала всецело энергии Эйлера во время его пребывания в России. Всегда, когда его просили обратить свой математический талант в направлении, не очень далеком от чистой математики, его отдача с лихвой покрывала назначенное ему правительством содержание. Эйлер писал учебники по элементарной математике для учебных заведений России, наблюдал за работой географического отделения, помогал организовать службу мер и весов (предлагал практические способы для проверки весов). Это лишь некоторые стороны его деятельности. Но независимо от того, как много ему приходилось делать посторонней работы, Эйлер всегда продолжал развивать математику.

Одной из наиболее важных его работ этого периода является трактат по механике, относящийся к 1736 г. Заметим, что дата издания на год опережает столетие опубликования Декартом аналитической геометрии. Трактат Эйлера сделал в механике то, что труд Декарта сделал в геометрии, освободил ее от кандалов синтетических доказательств, сделал ее аналитической. «Начала» Ньютона могли бы быть написаны Архимедом; механику Эйлера не мог бы написать никто из древних греков. Впервые вся мощь анализа была обращена на механику, и в этой фундаментальной науке началась современная эра. Эйлера в этом направлении превзошел его друг Лагранж, но решающий первый шаг был сделан Эйлером.

После смерти Анны в 1740 г. русское правительство стало более либеральным, но Эйлер достаточно уже натерпелся и был рад принять приглашение Фридриха Великого стать членом Берлинской академии наук.

Следующие 24 года его жизни[1] протекли в Берлине, правда не всегда счастливо, так как Фридрих предпочитал лощеных придворных скромному простому Эйлеру. Хотя Фридрих считал своим долгом поощрять занятия математикой, он презирал этот предмет, будучи сам не силен в нем. Но он достаточно ценил талант Эйлера, чтобы привлекать его к решению практических проблем — чеканки монет, прокладки водопровода, строительства каналов, пенсионного обеспечения и других дел.

Россия никогда не забывала об Эйлере и даже, когда он жил в Берлине, платила ему часть жалованья. Несмотря на обилие иждивенцев, Эйлер жил в достатке и, помимо своего берлинского дома, владел мызой в Шарлоттенбурге.

Одной из причин непопулярности Эйлера при дворе Фридриха была его неспособность избегать философских споров, в которых он был не силен. Вольтер легко опутывал Эйлера узлами метафизической паутины. Эйлер принимал все это добродушно и смеялся вместе с остальными над собственными нелепыми промахами. Но Фридриха это злило, и он стал подумывать о более изощренном философе, который бы возглавил академию и развлекал двор.

Даламбер (о котором речь дальше) был приглашен в Берлин для того, чтобы ознакомиться с положением. Между ним и Эйлером произошли небольшие разногласия в личных взглядах и во взглядах на математику, однако Даламбер прямо заявил Фридриху, что было бы кощунством поставить любого другого математика над Эйлером. Но это только сделало Фридриха упрямее и злее, чем раньше, и обстановка стала для Эйлера нетерпимой. В 59 лет (в 1766 г.) он снова снялся с места и возвратился в Петербург, куда его сердечно пригласила Екатерина Вторая.

---

[1] Точнее 25, с лета 1741 по лето 1766 г.

Екатерина встретила математика как члена королевской фамилии, предоставив ему полностью меблированный для него и его 18 иждивенцев дом и выделив одного из своих поваров.

Как раз в это время стало слабеть зрение Эйлера на второй глаз, и вскоре он ослеп совершенно. Развитие у него слепоты вызвало тревогу и сочувствие у Лагранжа, Даламбера и других ведущих математиков того времени. Сам Эйлер ожидал наступления слепоты хладнокровно. Но он не «ушел в отставку» в безмолвие, в темноту и немедленно нашел способ поправить непоправимое. Перед тем как последний луч света угас для него, он наловчился писать свои формулы мелом на большой грифельной доске. После этого он диктовал объяснения формул своим сыновьям[1] (главным образом Альберту), выступавшим в качестве секретарей. Его математическая производительность не только не уменьшилась, а, наоборот, возросла.

Эйлер в течение всей жизни обладал феноменальной памятью. Он наизусть знал «Энеиду» Вергилия. Эйлер мог всегда процитировать первую и последнюю строку любой страницы своего экземпляра знаменитой поэмы. Его память была и зрительной и слуховой. Он также обладал необыкновенной способностью производить вычисления в уме, не только арифметического характера, но и более трудного типа, требовавшие обращения к высшей алгебре и анализу. Все основные формулы в полном объеме математики того времени точно укладывались в его памяти.

Как иллюстрацию способностей Эйлера, Кондорсе рассказывает, что 2 студента Эйлера, суммируя сложный сходящийся ряд (для частного значения переменной) вплоть до 17-го члена, разошлись только на единицу в 50-м знаке результата. Чтобы решить, кто из них прав, Эйлер проделал все вычисление *в уме* и нашел правильный ответ. Эти удивительные качества Эйлера теперь пригодились ему, и он не очень много потерял как математик, лишившись зрения. Теория Луны — исследование ее движения, что было единственной задачей, когда-либо вызывавшей головную боль Ньютона, — получила свою первую разработку в руках Эйлера. Весь сложный анализ был проведен им полностью в уме.

Через 5 лет после возвращения Эйлера в Петербург с ним произошла другая беда. Во время большого пожара 1771 г. его дом и вся обстановка были разрушены, и только благодаря героизму слуги-швейцарца (Петра Гримма) сам Эйлер избежал гибели. Библиотека сгорела, но благодаря энергии графа Орлова все рукописи Эйлера были спасены. Екатерина II быстро восполнила весь материальный ущерб, и вскоре Эйлер снова был погружен в свою работу.

В 1776 г. (когда ему было 69 лет) Эйлер испытал тяжелую потерю: умерла его жена. В следующем году он женился снова, на Саломее Гзелль — сводной сестре первой жены. Большой его

[1] Или своим помощникам и ученикам.

трагедией была неудачная операция с целью восстановить зрение левого глаза — правый был безнадежен. Операция «удалась», и радости Эйлера не было границ, однако вскоре в глаз попала инфекция, и после длительных страданий, которые он сам находил ужасными, он снова погрузился во тьму.

Обозревая огромное математическое наследие Эйлера, можно сперва склониться к мысли, что любой одаренный человек мог бы сделать бóльшую часть того же почти так же легко, как и Эйлер. Но знакомство с современной математикой быстро опровергает такое мнение. В теперешнем своем состоянии математика с ее джунглями теорий относительно ненамного сложнее, если учесть мощь располагаемых ею теперь методов, чем та, что противостояла Эйлеру. Математика созрела для нового Эйлера. В свое время Эйлер систематизировал и унифицировал обширные области, напичканные частными результатами и изолированными теоремами, расчищая почву и увязывая стóящие вещи с помощью легко реализуемой мощи своего аналитического аппарата. Даже сейчас многое из того, что изучается в курсах математики высших учебных заведений, практически является таким же, каким оно осталось у Эйлера. Например, рассмотрение конических сечений и поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве с точки зрения унифицированного подхода на основе общего уравнения второй степени принадлежит Эйлеру. Далее, расчеты ежегодных рент и все, что выросло из них (страхование, пенсии в старости и т. д.), приведены к виду, известному теперь студентам под названием «математической теории инвестирования»[1], тоже Эйлером.

Как указывает Араго, один из источников выдающегося и прямого успеха Эйлера как учителя состоит в полном отсутствии у него ложной гордости. Когда требовались сравнительно непритязательные работы для пояснения уже имевшихся более впечатляющих трудов, Эйлер не медлил написать их и при этом не опасался, что его репутация пострадает.

Даже в творческом отношении Эйлер сочетал учебные цели со своими открытиями. Его великие трактаты 1748, 1755 и 1768—1770 гг. по анализу («Введение в анализ бесконечно малых», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление») немедленно стали классическими и в течение трех четвертей века продолжали вдохновлять молодых людей, которым предстояло стать великими математиками. В своем труде по вариационному исчислению («Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума», 1744) Эйлер впервые раскрыл себя как математик высшего класса. Важность этого предмета уже отмечалась в предыдущих главах.

Также было уже упомянуто, что громадный шаг Эйлера вперед

[1] Основу соответствующих сведений составляет преподаваемая в нашей средней школе теория сложных процентов. В основном по Эйлеру излагается теперь и тригонометрия.

состоял в том, что он сделал механику *аналитической*; каждый студент, изучающий динамику твердого тела, знает теперь эйлерово исследование вращательного движения, — это лишь один из достигнутых им здесь успехов. Аналитическая механика является ветвью чистой математики, так что у Эйлера не было при этом соблазна, как в некоторых других его взлетах в сторону практики, устремиться по первой увиденной им касательной, ведущей в бесконечную голубизну чистых вычислений. Наиболее суровой критике со стороны современников Эйлера его работы подвергались именно за то, что в них проявлялся неудержимый порыв вычислять только ради красоты анализа. Возможно, иногда недостаточно понимая физическую картину, он пытался сводить все к вычислениям, не видя, что стоит за ними. Тем не менее основные уравнения движения жидкости, используемые и сегодня в гидродинамике, — это уравнения Эйлера. Он мог быть достаточно практичным, когда это было достойно его забот.

Одна особенность эйлерова анализа должна быть между тем упомянута, так как она в значительной мере повлияла на одно из главных направлений развития математики в XIX в. Это признание того факта, что, пока не установлено, что бесконечный ряд *сходится*, пользоваться им небезопасно. Например, обычным делением находим:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\ldots,$$

где ряд продолжается неограниченно. Положим $x=\frac{1}{2}$. Тогда

$$-2=2+2^2+2^3+2^4+\ldots=2+4+8+16+\ldots.$$

Исследование *сходимости* (оно будет обсуждено в главе о Гауссе) показывает нам, как избежать абсурдных результатов, подобных приведенному. Интересно, что, хотя Эйлер сознавал необходимость осторожности, когда приходится иметь дело с *бесконечными* процессами, он не соблюдал ее в большинстве своих работ. Его вера в анализ была так велика, что он иногда искал превратное «объяснение», чтобы сделать явную нелепицу приемлемой.

После всего сказанного нужно добавить, что мало кто может сравниться с Эйлером или приблизиться к нему по количеству выполненных им безупречных новых трудов первостепенной важности. Те, кто любит арифметику, — возможно, не очень «важный» предмет, — отдадут пальму первенства Эйлеру в диофантовом анализе, где сделанное им имеет те же объем и свежесть, как у Ферма и у самого Диофанта. Эйлер был первым и, вероятно, величайшим из математиков-универсалов.

Но он не был только математиком. В литературе и во всех естественных науках, включая биологию, он по крайней мере был хорошо начитан. Но даже когда Эйлер наслаждался «Энеидой», он не мог не искать новых задач, чтобы подвергнуть их атаке своего математического гения. Строка «Якорь брошен, стремительный киль останавливается» заставляла его в таких обстоятельствах заниматься движением судна. Его неуемная любознательность поглотила однажды даже астрологию, но он показал, что не привел ее в надлежащий вид, вежливо отказавшись составить гороскоп царевича Ивана в 1740 г., сославшись на то, что это относится к компетенции придворного астронома.

Одно сочинение берлинского периода — его прославленные «Письма к одной немецкой принцессе», содержащие уроки механики, физической оптики, астрономии, акустики и т. д., — показывает нам Эйлера как изящного литератора. Письма немедленно стали популярными и распространялись в виде книг на 7 языках. Общественный интерес к науке вовсе не является привилегией нашего времени, как мы иногда склонны думать.

Эйлер оставался полноценным математиком, здоровым душой и телом до самой последней секунды своей жизни. Смерть наступила на 77-м году его жизни, 18 сентября 1783 г. Насладившись после полудня вычислением законов поднятия воздушного шара на грифельной доске, как обычно, он пообедал с Лекселем и своей семьей. «Планета Гершеля» (Уран) была тогда только что открыта; Эйлер набросал вычисления ее орбиты. Немного позже он попросил принести ему внука. Удар случился, когда он играл с ребенком и пил чай. Трубка выпала из его рук, и со словами «я умираю» «Эйлер перестал жить и вычислять»*.

---

* Выражение Кондорсе из написанного им некролога.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ВЕЛИЧЕСТВЕННАЯ ПИРАМИДА

ЛАГРАНЖ (1736—1813)

Не знаю. — Ж. Л. ЛАГРАНЖ

«ЛАГРАНЖ — величественная пирамида математических наук». Так выразил Наполеон Бонапарт свою оценку, по его мнению, величайшего и самого скромного математика XVIII столетия Жозефа Луи Лагранжа (1736—1813), которого он сделал сенатором, графом империи и командором ордена Почетного легиона. Король Сардинии и Фридрих Великий также воздавали Лагранжу почести, но в меньшей мере, чем император Наполеон.

В жилах Лагранжа текла смешанная франко-итальянская кровь, но француз в нем доминировал. Его дед, французский кавалерийский капитан, поступил на службу к Карлу Эммануилу Второму, королю Сардинии, переселился в Турин и женился на итальянке. Отец Лагранжа, одно время военный казначей Сардинии, был женат на Марии Терезии Гро, единственной дочери богатого врача из Камбиано, и имел с ней 11 детей. Из них один лишь самый младший Жозеф Луи, родившийся 25 января 1736 г., не умер в младенческом возрасте. Его отец был состоятельным человеком и сам по себе и благодаря богатству жены. Но он был также неисправимым дельцом, и когда Жозеф Луи был готов вступить в свои права единственного наследника, было уже нечего наследовать. Позже Лагранж вспоминал об этом несчастье как об одном из самых удачных событий, случившихся с ним: «Если бы я наследовал состояние, мне, вероятно, не пришлось бы связать свою судьбу с математикой».

Первые школьные интересы Лагранжа были сосредоточены на древних языках, и более или менее случайно то, что у него развилась страсть к математике. В связи с изучением классических языков он рано познакомился с геометрическими сочинениями Евклида и Архимеда. Они, кажется, не произвели на него сильного впечатления. Затем в руки юного Лагранжа попало сочинение Галлея (друга Ньютона) о преимуществах анализа над синтетическими геометрическими методами древних греков. Он был пленен и обращен в новую веру. В невероятно короткое время он освоил совершенно самостоятельно все, что к тому времени было сделано в анализе, и в 16 лет (согласно Даламберу, возможна небольшая неточность в определении возраста) стал преподавать математику в Артиллерийском училище в Турине. Так началась его деятельность, одна из самых ярких в истории математики.

С самого начала Лагранж был аналитиком, а не геометром. В нем мы видим первый осознанный образец той специализации, которая стала потом почти необходимой в математических исследованиях. Лагранж отдавал предпочтение анализу. Особенность его мышления четко выявилась в его шедевре, именно в «Аналитической механике», задуманной еще 19-летним юношей в Турине, но изданной в Париже лишь в 1788 г., когда Лагранжу было 52 года. «Вы не найдете чертежей в этой книге»,—писал он в предисловии. Но, полуиронически заигрывая с кумирами геометрии, он замечает, что вся механика может рассматриваться как геометрия в четырехмерном пространстве: трех декартовых и одной координаты времени достаточно, чтобы определить положение движущейся частицы в пространстве и времени. Этот взгляд на механику стал особенно популярным после 1915 г., когда Эйнштейн развил его в своей общей теории относительности.

Лагранжева аналитическая обработка механики отмечает первый полный разрыв с традицией древних греков. Ньютон, его современники и его непосредственные продолжатели постоянно пользовались чертежами, помогавшими им при исследовании задач механики. Лагранж показал, что бóльшая гибкость и несравненно бóльшая мощь достигаются, если общие аналитические методы используются с самого начала.

В Турине молодой профессор читал лекции студентам, которые все были старше его. Вскоре из наиболее способных он организовал научное общество, которое выросло затем в Туринскую академию наук. Первый том трудов академии вышел в 1759 г., когда Лагранжу было 23 года. Обычно считают, что скромному и непритязательному Лагранжу обязана своим появлением бóльшая часть изящных математических фактов в этих ранних трудах, опубликованных другими авторами.

Сам Лагранж представил статью о максимумах и минимумах (по вариационному исчислению, о котором речь шла в главах 4 и 8). В ней он обещал развить рассмотрение вопроса и вывести из него всю механику — как твердого, так и жидкого тела. Так Лагранж, 23 лет от роду, подошел к своему шедевру, к «Аналитической механике», которая явилась для общей механики тем, чем закон всемирного тяготения Ньютона явился для механики небесной. Десять лет спустя Лагранж писал французскому математику Даламберу (1717—1783), что он считает шедевром свою раннюю работу по вариационному исчислению, до конца продуманную им в 19-летнем возрасте. С помощью именно этого исчисления Лагранж унифицировал механику и, как сказал Гамильтон, создал «своего рода научную поэму».

Как только метод Лагранжа становится понятым, он кажется почти тривиальным. Как некоторые отмечали, лагранжевы уравнения, господствующие в механике, являются во всем естествознании изящнейшим примером искусства получения чего-то из ничего. Но, немного подумав, увидим, что всякий научный принцип, достаточно общий для того, чтобы объединить обширное множество явлений природы, *должен* быть простым: только принцип исключительной простоты может подчинить себе большое число различных задач, каждая из которых при ближайшем рассмотрении проявляет индивидуальность и отличие.

В том же туринском томе Лагранж делает другой большой шаг вперед: он применяет анализ к теории вероятностей. И как будто этого было недостаточно для 23-летнего гиганта науки, он существенно продвигается дальше Ньютона в математической теории звука, включая эту теорию в механику упругих сред (а не в механику жидкости) путем рассмотрения поведения частиц воздуха, расположенных вдоль некоторой прямой, под действием удара, который передается от частицы к частице. В том же общем направлении он включается в досадный спор, длившийся годами между ведущими математиками, о правильной математической формулировке задачи о колебаниях струны — важнейшей задачи всей теории колебаний. В 23 года Лагранж был признан равным величайшим математикам века — Эйлеру и Бернулли.

Эйлер всегда великодушно оценивал работы других ученых. Его отношение к своему юному сопернику Лагранжу является одним из самых впечатляющих примеров бескорыстия и альтруизма в истории науки. Когда 19-летний Лагранж послал Эйлеру некоторые из своих работ, знаменитый математик сразу же признал их достоинства и поощрил блестящего начинающего ученого. Когда 4 года спустя Лагранж сообщил Эйлеру подлинный метод решения изопериметрических задач вариационного исчисления, о которых уже говорилось в связи с Бернулли и которые не поддавались в течение многих лет полугеометрическим методам Эйлера, последний написал молодому человеку, что новый метод дает возможность преодолеть стоявшие перед ним трудности. И вместо того чтобы поторопиться с печатанием решения, которое он искал много лет, Эйлер откладывает его до того времени, пока Лагранж не сможет первым опубликовать его, — «чтобы не лишить Вас ни одной частицы славы, которую вы заслуживаете».

Однако частные письма, хоть и весьма лестные, не могли помочь Лагранжу. Понимая это, Эйлер в своем опубликованном (после Лагранжа) труде описывает, как его задержали трудности, бывшие непреодолимыми, пока Лагранж не указал способ их одоления. К этому можно добавить, что Эйлер добился избрания Лагранжа иностранным членом Берлинской академии наук (2 октября 1759 г.), несмотря на необычно молодой его возраст — 23 года. Это официальное признание за границей было большой помощью для Лагранжа на родине. Эйлер и Даламбер намеревались заполучить

Лагранжа в Берлин. Отчасти по личным мотивам, они жаждали видеть своего блестящего юного друга придворным математиком в Берлине. После длительных переговоров они добились своего.

Здесь следует сказать несколько слов о Даламбере — преданном друге и великодушном поклоннике Лагранжа, хотя бы потому, что в одном отношении он представляет выгодный контраст по сравнению с зараженным снобизмом Лапласом.

Жан ле Рон Даламбер получил свое имя по названию маленькой церкви св. Жана ле Рон[1] у собора Парижской богоматери в Париже. Незаконный сын офицера Детуша, Даламбер был подброшен матерью на ступени этой церкви. Приходские власти отдали найденыша жене бедного стекольщика, которая воспитывала мальчика как собственного сына. Затем офицер был принужден законом платить за воспитание ребенка.

Став знаменитостью и гордостью французской науки, Даламбер вознаградил стекольщика и его жену, следя за тем, чтобы они не оказались в нужде (они предпочли остаться жить в своей скромной квартире), и всегда с гордостью называл их своими родителями. Даламбер был первым, кто дал полное решение выдающейся задачи о предварении равноденствий. Его наиболее важные чисто математические труды относятся к дифференциальным уравнениям в частных производных, отчасти они упоминались в связи с колебаниями струны.

Даламбер поощрял своего скромного юного друга заниматься трудными и важными задачами. Он также заставил Лагранжа благоразумно заботиться о своем здоровье, хотя его собственное здоровье не было крепким. Лагранж серьезно испортил свое пищеварение из-за безрассудного режима между 16 и 26 годами и потом всю жизнь был вынужден придерживаться строгого распорядка. На письма Даламбера Лагранж кратко отвечал, что он чувствует себя превосходно и работает, как сумасшедший. Но в конце концов он заплатил за это.

Любопытно, что в одном отношении деятельность Лагранжа сходна с деятельностью Ньютона. К среднему возрасту длительное сосредоточение на задачах первостепенной важности притупило энтузиазм Лагранжа, и, хотя его ум оставался по-прежнему мощным, он стал безразлично относиться к математике. В возрасте 45 лет он пишет Даламберу: «Я начинаю чувствовать, что моя инертность мало-помалу увеличивается и вряд ли мои математические занятия продлятся еще хотя бы 10 лет. Мне также кажется, что рудник стал уже слишком глубоким и, пока в нем не откроются новые пласты, его придется забросить».

Лагранж, когда писал это, был болен и находился в меланхолическом настроении. Тем не менее его слова были искренними. Последнее письмо Даламбера, написанное в сентябре 1783 г., за месяц до смерти, содержит обычные советы и рекомендует работу как

---

[1] Т. е. св. Иоанна Круглого.

единственное средство от недомогания Лагранжа: «Ради бога, не отрекайтесь от работы — самого сильного для Вас средства отвлечения. Прощайте, наверное, навсегда. Не забудьте человека, который с любовью воспитывал и почитал Вас больше всего на свете».

К счастью для математики, до черной депрессии Лагранжа с ее неизбежным следствием — убеждением, что никакое человеческое знание не стоит того, чтобы к нему рьяно стремиться, — оставалось еще 20 славных лет с того времени, как Эйлер и Даламбер замыслили привлечь Лагранжа в Берлин. Среди великих задач, которыми занимался и которые решил Лагранж до приезда в Берлин, была задача о либрации Луны. Почему Луна всегда обращена к Земле одной стороной и при этом имеются некоторые небольшие непонятные неправильности в ее движении? Ответить на эти вопросы требовалось с помощью закона всемирного тяготения Ньютона. Эта задача является примером знаменитой задачи трех тел: в данном случае это Земля, Солнце, Луна, взаимно притягивающие друг друга обратно пропорционально квадрату расстояний между их центрами тяжести.

За решение задачи о либрации Луны Лагранжу в 1764 г. была присуждена Большая премия Парижской академии наук; ему тогда было только 28 лет.

Ободренная таким блестящим успехом, академия предложила еще более трудную задачу, и Лагранж снова получил премию в 1766 г. В то время были открыты только четыре спутника Юпитера. Система Юпитера, таким образом, представляла материал для задачи шести тел (Солнце, Юпитер и четыре спутника). *Полное* математическое решение находится вне пределов наших возможностей. Но, применяя приближенные методы, Лагранж значительно продвинулся в объяснении наблюдаемых неправильностей.

Такого рода применения ньютоновой теории представляли для Лагранжа наибольший интерес в течение всей его активной жизни. В 1772 г. он снова получил Парижскую премию за работу о задаче трех тел, а в 1774 и 1778 гг. добился аналогичного успеха в связи с работами о движении Луны и возмущениях комет.

Первый из этих блистательных успехов Лагранжа побудил короля Сардинии оплатить поездку Лагранжа в Париж и Лондон в 1766 г., когда Лагранжу было 30 лет. Но, прибыв в Париж, Лагранж серьезно заболел — сказался роскошный банкет в его честь с жирными итальянскими блюдами; Лагранж был вынужден остаться в Париже. Здесь тем временем он встречался со многими выдающимися людьми. Банкет излечил Лагранжа от желания жить в Париже, и он поспешил вернуться в Турин, как только стал способным двинуться в дорогу.

И вот 6 ноября 1766 г. Фридрих Великий, «величайший король Европы», как он «скромно» величал себя, приветствовал Лагранжа в Берлине, заявив, что он считает для себя честью иметь при своем дворе «величайшего математика». Последнее, во всяком случае, было верно. Лагранж стал директором физико-математического отделения Берлинской академии наук и в течение 20 лет наполнял ее «Мемуары» своими выдающимися работами, следовавшими одна за другой. Читать лекции от него не требовалось.

Сперва положение молодого директора было несколько щепетильным. Вполне естественно, что немцы чувствовали себя несколько обиженными тем, что над ними были поставлены иностранцы, и были склонны обращаться с «импортированными» Фридрихом учеными не более как с холодной вежливостью. В действительности их поведение часто было совсем оскорбительным. Но Лагранж был не только первоклассным математиком, но и человеком, удивительно мягким и деликатным, обладавшим редким даром не говорить ничего лишнего. В письмах доверенным друзьям он мог быть достаточно многоречивым, а в своих официальных представлениях академиям, касающихся научной деятельности других ученых, достаточно резким. Но в общественных контактах он заботился лишь о своих делах и избегал давать даже оправданные порицания. Пока его коллеги не привыкли к его присутствию, он старался не попадаться им на глаза.

Врожденная неприязнь Лагранжа к дискуссиям сослужила ему хорошую службу в Берлине. Эйлер бросался от одного религиозного или философского спора к другому. Лагранж, зажатый в угол доводами и побуждаемый к ответу, всегда искренне предварял свое мнение высказыванием: «Не знаю». Но, когда затрагивались его убеждения, он умел постоять за них, обретая и воодушевление и логику.

В целом Лагранж склонялся к сочувствию Фридриху, раздражавшемуся иногда из-за тяготения Эйлера к философским вопросам, в которых он был не компетентен. «Наш друг Эйлер, — писал Лагранж Даламберу, — великий математик, но весьма плохой философ». Относительно себя самого он говорил: «Я питаю большое отвращение к дискуссиям». Когда он философствует в своих письмах, всегда появляется неожиданный привкус цинизма, который совершенно отсутствует в его печатных работах. Так, он пишет: «Я всегда замечал, что претензии людей обратно пропорциональны их заслугам — это одна из аксиом морали».

Фридрих был очень доволен Лагранжем и провел с ним много часов, разъясняя ему преимущества правильной жизни. Контраст, который Лагранж являл собой по отношению к Эйлеру, был особенно приятен для Фридриха. Он зашел так далеко, что назвал Эйлера «неуклюжим циклопом математики», — в то время Эйлер был уже слепым на один глаз. Даламбера благодарный Фридрих засыпал и прозой и стихами. Он писал: «Вашим заботам и Вашей рекомендации я обязан заменой в моей академии одноглазого математика на двуглазого, что особенно будет приятно членам отделения анатомии».

Вскоре после устройства в Берлине Лагранж вызвал из Турина одну из своих молодых родственниц и женился на ней. Даламбер подшучивал над своим другом: «Я понимаю, что Вы совершили то, что мы, философы, называем фатальным шагом... Великий математик должен лучше всего знать, как вычислить свое счастье. Я не сомневаюсь, что, произведя такое вычисление, Вы нашли, что решение вопроса состоит в женитьбе».

«Я не знаю, плохо ли я все рассчитал или хорошо, — отвечал Лагранж, — или, скорее, я не думаю, что я вообще рассчитывал; ведь я мог поступить, как Лейбниц, который при принуждении к размышлениям никогда не мог собраться с мыслями. Я признаюсь Вам, что никогда не проявлял склонности к женитьбе... но обстоятельства вынудили меня соединиться с одной из моих родственниц, чтобы она заботилась обо мне и всех моих делах».

Тем не менее женитьба оказалась счастливой. Но вскоре жена надолго заболела. Лагранж, забывая о сне, ухаживал за ней. Когда она умерла, его сердце было разбито.

Утешение он нашел в работе. «Мои занятия свелись к тому, что я спокойно и тихо разрабатываю математику». Затем он выдает Даламберу секрет совершенства всех своих работ, которое приводило в изумление его более поспешных последователей. «Когда на меня не нажимают и я работаю больше для своего удовольствия, чем по обязанности, я похож на великих строителей: я делаю, уничтожаю и переделываю, пока не удовлетворюсь своими результатами, что случается очень редко».

Не все основные усилия Лагранжа во время его 20-летнего пребывания в Берлине сводились к небесной механике и к доведению до совершенства своего шедевра. Одно отступление — именно в область занятий Ферма — особенно интересно, так как оно показывает трудности, присущие просто выглядящим в арифметике вещам. Мы увидим, что великий Лагранж даже сам ломал себе голову над тем, почему его арифметические исследования стоили ему непредвиденных усилий.

«Последние несколько дней, — писал он Даламберу 15 августа 1768 г., — я занимался для разнообразия определенными задачами арифметики, и я заверяю Вас, что нашел в ней гораздо больше трудностей, чем ожидал. Приведу в качестве примера одну задачу, которую я решил только с большим трудом. Для всякого данного целого числа n, не являющегося квадратом, найти квадрат целого числа x^2 такой, чтобы $nx^2 + 1$ было квадратом. Эта задача чрезвычайно важна в теории квадратов [теперь говорят *квадратичных форм*, — они будут описаны в главе о Гауссе], каковые являются главными объектами в диофантовом анализе. Более того, при этом я нашел некоторые очень красивые теоремы арифметики, которые я сообщу Вам в другой раз, если Вы того пожелаете».

Задача, которую описывает Лагранж, имеет долгую историю и восходит к Архимеду и индийцам. Классическая работа Лагранжа о представлении $nx^2 + 1$ в виде квадрата является межевым знаком в теории чисел. Он также первым доказал некоторые из теорем Ферма и теорему Джона Вилсона (1741 — 1793), которая утверждает, что если p есть простое число, то сумма произведения всех последовательных целых чисел от единицы до $p-1$ и единицы делится на p. Если p не есть простое число, тогда утверждение неверно. Например, если $p=5$, то $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4+1=25$. Это можно доказать с помощью элементарных рассуждений.

В своем ответе Даламбер высказывает мнение, что диофантов анализ может оказаться полезным для интегрального исчисления, но не вдается в детали. Весьма любопытно, что это пророчество осуществилось в 1870 г. благодаря исследованиям русского математика Е. Золотарева[1].

Лаплас также одно время интересовался высшей арифметикой и говорил Лагранжу, что существование недоказанных теорем Ферма является не только величайшей славой французской математики, но и наиболее обращающим на себя внимание ее позором и что долг французских математиков — покончить с этим позором. Но он предрекал в этом деле огромные трудности. Корень преткновения, по его мнению, в том, что *дискретные* задачи (в конечном счете относящиеся к числам 1, 2, 3, ...) еще не подвергались воздействию какого-либо общего оружия, такого, какое доставляет анализ для исследования непрерывного. Даламбер тоже указал, что арифметику он находит «более трудной, чем она кажется на первый взгляд». Можно доверять опыту таких математиков, как Лагранж и его друзья, и считать установленным, что арифметика действительно трудна.

Другое письмо Лагранжа (от 28 февраля 1769 г.) содержит окончательное заключение по этому вопросу: «Задача, о которой

---

[1] Имеется в виду восходящая к Абелю задача об интегрируемости в конечном виде $\int \frac{x+A}{\Delta(x)}\,dx$, где $\Delta(x)=\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$, а A — некоторое число. При рациональных α, β, γ, δ П. Л. Чебышев (1821—1894) указал (1860, 1861) условия интегрируемости таких интегралов в конечном виде, требующие для своей проверки лишь конечного числа алгебраических действий. Эти условия связаны либо с возможностью построения по данным α, β, γ, δ с помощью только циркуля и линейки корней уравнения $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, либо с количеством целочисленных решений системы двух неопределенных уравнений (второй и шестой степени). Соответствующая теорема Чебышева (во второй формулировке) была доказана (1872) с помощью теории эллиптических функций его учеником Е. И. Золотаревым (1847—1878). Он также провел (1874) исследование задачи в предположении, что α, β, γ, δ — вещественные числа, путем приложения созданной им в связи с этим теории целых алгебраических (по Золотареву, комплексных) чисел (т. е. чисел, являющихся корнями некоторых алгебраических уравнений). Эта теория важна и сама по себе. В других видах она появилась в результате трудов Э. Куммера (1810—1893), Р. Дедекинда (1831—1916) и Кронекера (1823—1891).

Исследование Золотарева производит сильное впечатление. Сам он писал: «Я особенно ценю это приложение теории комплексных чисел потому, что оно выражает новую связь между интегральным исчислением и теорией чисел».

Отметим также, что Э й л е р применял (1748) диофантов анализ для освобождения от иррациональностей при вычислении неопределенных интегралов. В. Я. Б у н я к о в с к и й (1804—1889) показал (1857), что и, наоборот, с помощью неопределенного интегрирования можно получить результаты, полезные при рассмотрении задач диофантова анализа.

я рассказывал, заняла у меня намного больше времени, чем я предполагал сначала. Наконец, я счастливо покончил с ней и думаю, что практически не оставил в стороне ничего такого, чего следовало желать по предмету неопределенных уравнений второй степени с двумя неизвестными». Здесь он был слишком оптимистичен: следовало еще услышать по этим вопросам мнение Гаусса, отец и мать которого должны были встретиться только через 7 лет. За 2 года до рождения Гаусса (он родился в 1777 г.) Лагранж смотрел на проделанное им ранее с пессимистическим настроением: «Арифметические исследования таковы, что стоят мне наибольших хлопот и являются, возможно, наименее ценными».

В здравом состоянии духа Лагранж редко ошибался в оценке «важности» своих работ. «Я всегда рассматривал математику, — писал он Лапласу в 1777 г., — как предмет скорее развлечения, чем честолюбия, и я хочу заверить вас, что работы других ученых доставляют мне гораздо больше наслаждения, чем мои собственные, которыми я всегда не удовлетворен. И если вы не завидуете своему успеху, то, со своей стороны, я ему завидую». Это было ответом на несколько напыщенное заявление Лапласа, что он занимается математикой только для удовлетворения собственного любопытства и совершенно равнодушен к рукоплесканиям «толпы» (что было в данном случае вздором).

Письмо Лапласу от 15 сентября 1782 г. имеет большой исторический интерес, так как повествует об окончании «Аналитической механики»: «Я почти завершил трактат по аналитической механике, основанный на единственном принципе (формуле), приведенном в первой части сопроводительной статьи, но, поскольку я не знаю, когда и где этот трактат может быть напечатан, я не тороплюсь с его завершением».

Подготовку труда к печати взял на себя Лежандр, а старый друг Лагранжа аббат Мари в конце концов убедил одного парижского издателя рискнуть своей репутацией. Книга появилась только в 1788 г., уже после отъезда Лагранжа из Берлина. Ее экземпляр попал в руки автора (Лагранжа), когда он стал настолько безразличен ко всем наукам и математике, что даже не потрудился раскрыть книгу.

Одно исследование Лагранжа берлинского периода имело важнейшее значение для развития современной алгебры, — это мемуар 1767 г. «О решении числовых уравнений» и последующие дополнения к нему. Оно касалось общих вопросов разрешимости алгебраических уравнений. Возможно, наибольшее значение исследований Лагранжа по теории решения уравнений состояло в том, что они служили вдохновением для ведущих алгебраистов начала XIX в.

Ученые, которые, наконец, одолели проблему, не дававшую покоя алгебраистам более чем 300 лет, черпали идеи и вдохновение в трудах Лагранжа. Сам Лагранж не осилил главную трудность — она заключалась в установлении необходимых и достаточных условий разрешимости данного уравнения в радикалах, — но зёрно решения было им найдено.

Поскольку эта проблема является одной из тех выдающихся во всей алгебре, которые можно легко объяснить, мы бегло коснемся ее. Эта проблема будет появляться много раз как ведущий мотив в трудах великих математиков XIX столетия: Коши, Абеля, Галуа, Эрмита, Кронекера и др.

Прежде всего надо отметить, что нет принципиальных трудностей в решении алгебраического уравнения с числовыми коэффициентами. Решение может быть весьма трудоемким, когда уравнение имеет высокую степень, как например:

$$3x^{101} - 17{,}3x^{70} + x - 11 = 0,$$

но известно много хорошо разработанных методов нахождения корня такого *числового* уравнения с любой наперед заданной степенью точности. Некоторые из них изучаются в обычном школьном курсе алгебры. Однако во времена Лагранжа такие единообразные методы для решения числовых уравнений с предписанной степенью точности не были общим достоянием или вообще не были известны. Лагранж изобрел один из них. Теоретически метод был совершенен, но он не был удобным для практического использования. Ни один инженер в наши дни не согласится воспользоваться методом Лагранжа.

По-настоящему значительная проблема возникает, когда мы ищем *алгебраическое* решение уравнения с *буквенными* коэффициентами, скажем, уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

или

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

или подобных уравнений более высокой степени. При этом требуется получить формулы, выражающие *неизвестную* величину x через *данные* коэффициенты a, b, c, ..., такие, что если любое из полученных выражений для x подставить в левую часть уравнения, то получится нуль. Для уравнения степени n неизвестное x имеет ровно n значений. Для вышеприведенного квадратного уравнения (второй степени) соответствующие два значения x даются формулами:

$$\frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \quad \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right).$$

Если эти значения подставить вместо x в выражение $ax^2 + bx + c$, получится нуль. *Искомые значения x должны быть выражены через a, b, c, ... с помощью конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений корня.* В этом и состоит проблема. Разрешима ли она? Ответ на этот вопрос был получен лишь примерно 20 лет спустя после смерти Лагранжа, но ключ к ответу легко усматривается в его трудах.

В качестве первого шага к общей теории Лагранж предпринял исчерпывающее изучение всех решений, найденных его предшественниками для уравнений первых четырех степеней, и преуспел, показав, что все уловки, с помощью которых получаются решения, можно заменить единообразным способом действий Одна деталь этого общего метода и есть тот ключ, о котором упоминалось. Допустим, имеется некоторое алгебраическое выражение, содержащее буквы a, b, c, ... Сколько *различных* выражений можно получить из него, производя всевозможные перестановки букв между собой? Например, из выражения $ab + cd$ получаем выражение $ad + cb$ путем перестановки букв b и d. Этот вопрос наводит мысль на другой, тесно с ним связанный вопрос, также являющийся частью ключа, который искал Лагранж: какие перестановки букв оставляют данное выражение *инвариантным* (неизменным)? Так, $ab+cd$ превращается в $ba + cd$ при перестановке a и b, что есть то же самое, что и $ab + cd$, так как $ab = ba$. Эти вопросы породили *теорию конечных групп*. Она оказалась ключом к вопросу об алгебраической разрешимости уравнений. Она появится снова в трудах Коши и Галуа.

Исследования Лагранжа указывают еще на один значительный факт. Для степеней 2, 3 и 4 общее алгебраическое уравнение решается путем представления решения через корни уравнения *более низкой степени*, чем рассматриваемое. Этот способ прекрасно и единообразно применим к уравнениям второй, третьей и четвертой степеней, но, когда пытаешься точно так же поступить при решении общего уравнения пятой степени:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0,$$

то *разрешающее уравнение* (резольвента), вместо того чтобы иметь степень, меньшую пяти, имеет шестую степень. Таким образом, данное уравнение в этом случае заменяется более трудным. *Метод, который работает для степеней* 2, 3 *и* 4, *отказывает для степени* 5, и, пока нет пути, обходящего непрошеное уравнение шестой степени, дорога блокирована. Дальше мы увидим, что способа обойти трудности не существует. Мы можем с таким же успехом пытаться квадрировать круг или производить трисекцию угла методами Евклида (т. е. с помощью циркуля и линейки).

После смерти Фридриха Великого (17 августа 1786 г.) возмущение против непруссаков и наступившее безразличие к науке сделали Берлин неподходящим местом жительства для Лагранжа и его коллег-иностранцев, связанных с академией; он стал добиваться отставки. Она была ему разрешена с условием, что он будет посылать статьи в Берлинскую академию в течение нескольких лет, на что Лагранж согласился. Он с радостью принял приглашение Людовика XVI продолжать математические исследования в Париже в качестве члена Французской академии. По прибытии в Париж в 1787 г. он был с большими почестями принят королевской фамилией, а также академией. В Лувре ему была отведена комфортабельная квартира, в которой он жил до самой революции.

В возрасте 50 лет Лагранж почувствовал, что он выдохся. Это был классический случай нервного истощения, вызванного длительным и чрезмерным переутомлением. Парижане нашли в нем любезного и благожелательного собеседника, но не властителя умов. Он говорил, что его энтузиазм выгорел и что он потерял вкус к математике. Экземпляр «Аналитической механики» лежал на его письменном столе не раскрытым в течение двух лет.

Устав от всего, что связано с математикой, Лагранж обратился теперь к тому, что считал своими подлинными интересами, как сделал это Ньютон после написания «Начал», — именно к философии, эволюции мышления, истории религии, общей теории языков, медицине и ботанике. Увлекшись этой странной смесью, он удивил своих друзей обширными познаниями и проницательностью ума по вопросам, далеким от математики. Химия в то время быстро превращалась в науку, в отличие от предшествовавшей ей алхимии, и этому сильно способствовали усилия близкого друга Лагранжа—Лавуазье (1743—1794). Лагранж сказал, что Лавуазье сделал химию «такой же легкой, как алгебра».

Что касается математики, то Лагранж считал ее законченной или по крайней мере вступившей в период упадка. Он предвидел, что в будущем лучшие умы человечества проявят наибольший интерес к химии, физике и естественным наукам вообще и даже предрекал, что кафедры математики в академиях и университетах вскоре опустятся до уровня незаметных кафедр арабского языка. В некотором смысле он был прав. Если бы Гаусс, Абель, Галуа, Коши и другие не влили новые идеи в математику, волна от ньютоновского импульса спала бы около 1850 г. К счастью, Лагранж жил достаточно долго, чтобы увидеть здоровое начало великой деятельности Гаусса и понять, что его собственные предчувствия были необоснованными. Сегодня мы можем улыбаться по поводу пессимизма Лагранжа, мысля период до 1800 г., при всем его блеске, лишь рассветом современной математики, в первые утренние часы которой мы теперь находимся, желая знать, на что будет похож полдень, — а день еще далеко впереди. Пример с Лагранжем может поучить нас избегать пророчеств.

Революция разрушила апатию Лагранжа и гальванизовала еще раз его математические интересы. Напомним при этом, что Бастилия пала 14 июля 1789 г.

Когда французская аристократия и ученые, наконец, поняли, какие надвигаются события, они стали убеждать Лагранжа возвратиться в Берлин, где его ожидал радушный прием. Никаких возражений по поводу его отъезда из Парижа не предвиделось. Но он отказался покинуть Париж, сказав, что предпочитает остаться и увидеть «эксперимент» полностью. Ни он, ни его друзья не предвидели периода террора, и, когда он наступил, Лагранж горько пожалел о том, что оставался до тех пор, когда стало слишком поздно, чтобы бежать.

Грандиозные планы революционеров переделать человечество и изменить природу человека не производили впечатления на Лагранжа. Когда его друг химик Лавуазье, бывший откупщиком, попал на гильотину, Лагранж выразил свое негодование к тупости казни словами: «Им понадобится только один момент, чтобы упала его голова, но, может быть, сотни лет не хватит, чтобы появилась голова, подобная ей».

Хотя практически вся творческая жизнь Лагранжа прошла под покровительством королевских особ, его симпатии не были на стороне роялистов. Но они не принадлежали и революционерам. Он честно и недвусмысленно стоял, придерживаясь среднего положения, в то время как на цивилизацию безжалостно нападали обе стороны. Он мог сочувствовать народу, оскорбленному и ограбленному до самых последних пределов терпения, и желал ему успеха в борьбе за нормальную жизнь. Свое мнение о могуществе ума он выражал словами: «Если вы хотите увидеть поистине великий ум, посетите кабинет Ньютона, в котором он разложил солнечный свет и открыл систему мира».

К Лагранжу относились терпимо. Специальным декретом ему была пожалована «пенсия», а когда инфляция свела эту пенсию практически к нулю, его назначили членом Комитета изобретений, затем Комитета монетного дела, чтобы дать ему возможность существовать. В 1795 г. была учреждена Нормальная школа (вначале ее деятельность была эфемерной), и Лагранж стал ее профессором математики. Когда Нормальная школа закрылась и была основана знаменитая Политехническая школа (1797), Лагранж составил план курса математики в ней и стал ее первым профессором. Ему пришлось читать лекции для слабо подготовленных студентов. Приспосабливаясь к уровню знаний своих студентов, Лагранж повел их через арифметику и алгебру к анализу, сам напоминая больше учащегося, чем профессора. Величайший математик столетия стал великим учителем математики, подготавливая неистовую молодую когорту наполеоновских военных инженеров. Нерушимое предубеждение, будто бы человек, который что-то знает, не способен обучать, было рассеяно. Уйдя значительно дальше элементарного уровня, Лагранж на глазах своих учеников развивал новую математику, и вскоре они сами приняли участие в ее развитии.

Два труда, созданные таким образом, оказали большое влияние на анализ первых трех десятилетий XIX в. Ученики Лагранжа находили трудными понятия бесконечно малого и бесконечно большого, присущие традиционной форме анализа. Чтобы устранить эти трудности, Лагранж дал изложение анализа без использования лейбницевых «бесконечно малых» и ньютонова специфического понятия предела. Его собственная теория была опубликована в двух трудах: «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции об исчислении функций» (1801). Важность этих трудов заключалась не в содержавшейся в них математике, а в том, что они дали толчок Коши и другим ученым к строгому построению анализа. Лагранжу сделать это не удалось. Но, говоря это, мы должны помнить, что даже в наше время трудности, с которыми безуспешно боролся Лагранж, полностью не преодолены. Он сделал замечательную и для своего времени удовлетворительную попытку. Если попытка наших дней сохранится столь же долго, как лагранжева, будем ее считать достаточно хорошо проведенной.

Наиболее важной деятельностью Лагранжа в период революции было его ведущее участие в усовершенствовании метрической системы мер и весов. Только благодаря иронии и здравому смыслу Лагранжа число 12 не было выбрано в качестве основания вместо числа 10. «Преимущества» числа 12 очевидны, и их выдвижение продолжается до сих пор во впечатляющих трактатах ревностными пропагандистами, которые лишь на волос отличаются от тех, кто ищет квадратуру круга. Число 12, взятое вместо числа 10 нашей системы счисления, было бы шестигранной затычкой пятигранной дыры». Чтобы довести до сознания защитников числа 12 абсурдность такого решения, Лагранж предложил число 11, как еще лучшее, поскольку *любое простое число*, лежащее в основе системы счисления, определяет то ее преимущество, что все дроби при этом оказываются с одним и тем же знаменателем. Недостатки этого предложения многочисленны и достаточно очевидны для каждого, кто постиг деление с сокращениями. Комиссия усмотрела суть вопроса и удержала число 10.

Лаплас и Лавуазье были членами комиссии, как только она была образована, но через 3 месяца были выведены из нее в ходе «чистки» вместе с некоторыми другими учеными. Председателем комиссии остался Лагранж. «Я не понимаю, почему они оставили меня», — заметил он, не сознавая, что его молчаливость сохранила ему не только должность, но и голову.

Несмотря на всю эту интересную деятельность, Лагранж все еще был одиноким и склонным терять присутствие духа. Он был избавлен от сумеречного состояния между жизнью и смертью в возрасте 56 лет девушкой, дочерью своего друга, астронома Лемонье. Она тронута была несчастной судьбой Лагранжа и вышла за него замуж. Брак оказался идеальным.

Из всех своих удач одну он ценил наиболее высоко и говорил со скромностью и искренностью, что она состоит в том, что он нашел такого заботливого и преданного спутника, как его юная жена.

Французы воздавали ему многие почести. Ученый, бывший фаворитом Марии Антуанетты, стал теперь кумиром людей, приговоривших ее к смерти. В 1796 г., когда Франция аннексировала Пьемонт, Талейрану было приказано нанести визит отцу Лагранжа, еще жившему в Турине, и сообщить ему: «Ваш сын, которым гордятся родивший его Пьемонт и владеющая им Франция, оказывает честь своим гением всему человечеству». Когда Наполеон обращался к гражданским делам в перерывах между своими военными походами, он часто разговариал с Лагранжем о философских вопросах и о роли математики в государстве и выказывал исключительное уважение к своему спокойному собеседнику, всегда думавшему, прежде чем сказать что-то, и никогда не проявлявшему догматизма.

За спокойствием Лагранжа скрывалось едкое остроумие, которое неожиданно вспыхивало при случае. Иногда оно было чересчур тонким. Лагранж однажды сказал: «Эти астрономы — странные люди, они не верят теории, пока она не согласуется с их наблюдениями». Заметив поглощенного беззаботностью Лагранжа на музыкальном вечере, кто-то спросил его, почему он любит музыку. «Я люблю ее потому, — ответил Лагранж, — что она изолирует меня. Я слышу первые три такта; на четвертом я ничего не различаю; я предаюсь своим мыслям, и ничто не отвлекает меня, именно таким образом я решил не одну трудную задачу». Даже его искреннее почитание Ньютона не лишено слабой примеси той же мягкой иронии. «Ньютон, — заявил он, — несомненно, несравненный гений, но мы должны согласиться, что он и счастливейший из гениев: только один раз можно открыть систему мира». И еще: «Как повезло Ньютону, что в его время система мира еще оставалась неоткрытой».

Последнее научное усилие Лагранжа было связано с переработкой и расширением «Аналитической механики» для второго издания. Прежние силы целиком вернулись к нему, хотя ему было уже за 70. Вспомнив свои прежние привычки, он работал непрестанно, но лишь установил, что его тело не подчиняется больше его разуму. Вскоре он стал давать себе небольшие передышки. Его болезнь, о которой он знал, что она приведет его к смерти, не нарушала его безмятежности; всю свою жизнь Лагранж прожил, как нравится жить философам, равнодушным к своей судьбе.

За 2 дня до смерти Лагранжа Монж и другие друзья пришли к нему, зная, что он умирает и хочет что-то рассказать им о своей жизни. Они нашли его временно поправившимся, если не считать потери памяти.

«Я хочу умереть, да, я хочу умереть и нахожу в этом удовольствие... Я сделал свое дело, я добился некоторой известности в математике. Я никогда никого не ненавидел, я не делал ничего плохого...» Он умер рано утром 10 апреля 1813 г. на 78-м году жизни.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ОТ КРЕСТЬЯНИНА ДО СНОБА

ЛАПЛАС (1749—1827)

Все проявления природы суть лишь математические следствия небольшого числа неизменных законов. —
П. С. ЛАПЛАС

МАРКИЗ ПЬЕР СИМОН ДЕ ЛАПЛАС (1749—1827) не родился крестьянином и не умер снобом. Тем не менее даже мелкие, второстепенные особенности его знаменитой деятельности включаются в указанные рамки, и с такой широкой точки зрения он интереснейший представитель человеческого рода.

Как теоретик-астроном Лаплас справедливо назывался «Ньютоном Франции»; как математик он провозвестник современного периода в теории вероятностей[1]. Как человек он может считаться наиболее ярким опровержением предубеждения педагогики, будто благородные занятия неизбежно облагораживают характер людей. Но, несмотря на все слабости своей натуры — стремление к титулам, политическое приспособленчество, желание блистать в постоянно переменчивом свете общественного уважения, — Лаплас по своему характеру обладал элементами истинного величия. Мы можем не верить всему, что он говорил о своей бескорыстной преданности правде ради самой правды, и мы вправе улыбаться, отмечая ту озабоченность, с которой он пытался превратить в изящную эпиграмму слова своего последнего изречения: «То, что мы знаем, — не велико, то, чего мы не знаем, — огромно». Это попытка усилить высказывание Ньютона о мальчике, играющем на морском берегу. Но мы не можем отрицать, что Лаплас при его благородном отношении к неизвестным начинающим ученым был кем угодно, только не ловким и неблагородным политиканом. Протягивая молодому человеку руку помощи, Лаплас однажды обманул самого себя.

О ранних годах жизни Лапласа известно очень мало. Его роди-

[1] Начало современного периода в теории вероятностей принято связывать с деятельностью П. Л. Чебышева и возглавленной им Петербургской школы теории вероятностей. Чебышев и его ученики А. А. Марков (1856—1922), А. М. Ляпунов (1857 — 1918) в своих исследованиях опирались на труды Лапласа, Пуассона, Муавра и других ученых периода становления теории вероятностей.

телями были крестьяне, жившие в Бомон-ан-Ож, во французском департаменте Кальвадос. Пьер Симон родился 23 марта 1749 г. Неясность, окутывающая его детство и юность, создана им самим: он очень стеснялся своих скромных родителей и при своем непреоборимом снобизме делал все, что было в его силах, чтобы скрыть свое крестьянское происхождение.

Лапласу повезло благодаря дружескому интересу, проявленному к нему со стороны его состоятельных соседей, появившемуся, вероятно, в связи с его незаурядными способностями, обнаруженными в сельской школе. Говорят, его первые успехи были связаны с богословскими диспутами. Если это так, то это интересная прелюдия к несколько агрессивному атеизму его зрелых лет. Он рано полюбил математику. В Бомоне была Военная академия, в которой Лаплас учился экстерном и впоследствии некоторое время преподавал математику. Одна сомнительная легенда сообщает, что феноменальная память молодого человека привлекала гораздо больше внимания, чем его математические способности, и что благодаря ей Лаплас получил искренние рекомендации влиятельных людей, которые он привез с собой в Париж, когда в возрасте 18 лет навсегда отряхнул со своих ботинок пыль Бомона и направился искать свое счастье. Его собственное мнение о своих способностях было довольно высоким. Уверенный в себе молодой Лаплас вторгся в Париж, чтобы завоевать математический мир.

Прибыв в Париж, Лаплас пришел с визитом к Даламберу, но не был принят. Даламбер не интересовался молодыми людьми, которые приходили к нему только с рекомендациями от видных людей. С удивительной для юноши проницательностью Лаплас понял, в чем беда. Вернувшись на свою квартиру, он написал Даламберу письмо об общих принципах механики. Это сработало. В ответном письме, приглашая Лапласа прийти, Даламбер писал: «Сударь, Вы заметили, что я не обратил внимания на Ваши рекомендации; Вы в них не нуждаетесь. Вы сами лучше представили себя. Этого для меня достаточно». Несколькими днями позже благодаря содействию Даламбера Лаплас был назначен преподавателем математики Военной школы в Париже.

После этого Лаплас погрузился в дело своей жизни: детальное применение ньютоновского закона тяготения к Солнечной системе в целом. Если бы он не сделал ничего больше, то и этого было достаточно, чтоб прославиться. Тип человека, на которого хотел бы быть похожим Лаплас, описан им в письме 1777 г. (когда ему было 27 лет) к Даламберу. Изображение Лапласом самого себя представляет удивительнейшую смесь действительности и фантазии, к которой когда-либо приходил человек посредством самоанализа.

«Я всегда занимался математикой скорее по склонности, чем из тщеславного желания приобрести репутацию, — заявляет он. — Мое любимое развлечение — изучать ход мыслей первооткрывателей, выявлять их гений в умении сосредоточиться и одолеть препятствия, с которыми они сталкивались. Я ставлю себя на их место и спрашиваю себя, как бы я преодолевал эти нагромождения препятствий; и хотя такой мысленный эксперимент в большинстве случаев только уязвляет мое самолюбие, все же удовольствие радоваться их успеху обильно вознаграждает меня за небольшое унижение. Если я буду удачливым настолько, что прибавлю что-нибудь к их делам, я отнесу все заслуги их пионерским усилиям, вполне уверенный, что они на моем месте пошли бы намного дальше, чем я».

Можно согласиться с первой фразой. Но как быть с остальными, особенно благородным противопоставлением собственных «скромных» успехов предварительным трудам предшественников. Ничего не может быть более далеким от истины, чем это откровенное признание того, что он был многим обязан другим. Чтобы назвать белое белым, а черное — черным, скажем, что Лаплас отчаянно заимствовал налево и направо все, что попадало ему в руки и что он мог использовать и у современников и у предшественников. У Лагранжа, например, он заимствовал фундаментальное понятие потенциала (которое будет описано дальше); у Лежандра — все, что ему нужно было из анализа; наконец, в своем шедевре «Небесная механика» он опустил ссылки на труды других ученых с намерением создать у потомков впечатление, что он *один* создал математическую теорию неба. (Разумеется, он не мог избежать нескольких упоминаний о Ньютоне.) Быть столь неблагородным у Лапласа не было необходимости. Его собственный колоссальный вклад в механику Солнечной системы легко затмевает труды других ученых, имена которых он игнорировал.

Сложность и трудность проблемы, которую решал Лаплас, невозможно объяснить тому, кто не сталкивался с задачами подобного масштаба. В главе о Лагранже мы упоминали задачу трех тел. То, за что взялся Лаплас, было подобной природы, но гораздо величественнее. Ему предстояло вывести из закона Ньютона все составные эффекты возмущений всех членов Солнечной системы друг от друга и от Солнца. Будет ли Сатурн, несмотря на свое явное устойчивое удаление от среднего движения, оставаться членом Солнечной системы или он уйдет в мировое пространство? Или приведут ли ускорения Юпитера и Луны в конечном счете к падению первого на Солнце, а вторую к тому, что она врежется в Землю? Являются ли эффекты этих возмущений накопляющимися и рассеивающимися или же периодическими и сохраняющимися? Эти и подобные загадки были лишь деталями великой проблемы: устойчива или неустойчива Солнечная система? При этом предполагается, что ньютонов закон тяготения является действительно универсальным и что только он управляет движением планет.

Первый важный шаг Лапласа к решению общей проблемы был сделан в 1773 г., когда ему было 24 года. Он показал, что средние расстояния планет от Солнца являются неизменными, если не считать небольших периодических изменений.

Когда Лаплас приступил к проблеме устойчивости Солнечной системы, мнение специалистов было в лучшем случае неопределенным. Сам Ньютон полагал, что время от времени может оказаться необходимым божественное вмешательство, чтобы восстановить порядок в Солнечной системе и предотвратить ее разрушение или распад. Другие, подобно Эйлеру, под впечатлением теории Луны (движения Луны) несколько сомневались, можно ли движения планет и их спутников рассчитать, исходя из предположения Ньютона. Силы, влияющие на движения небесных тел, слишком многочисленны, а их взаимное наложение слишком сложно для приемлемой благоприятной догадки. До тех пор, пока Лаплас не *доказал* устойчивости Солнечной системы, предположение одного ученого не имело предпочтения перед предположением другого.

Чтобы рассеять возражение, несомненно уже возникшее у читателя, следует сказать, что решение Лапласа проблемы устойчивости годится лишь для сильно идеализированной Солнечной системы, такой, какой ее воображали Ньютон и Лаплас. Приливное трение (действующее подобно тормозу на суточное вращение), как и другие факторы, не принималось во внимание. С тех пор как «Небесная механика» была опубликована, мы узнали многое о Солнечной системе и все то в ней, что игнорировалось Лапласом. Вероятно, не будет преувеличением сказать, что для существующей в действительности Солнечной системы, как противопоставляемой идеальной лапласовой, проблема устойчивости все еще остается открытой. Однако специалисты по небесной механике могут не согласиться с этим, а компетентное мнение можно получить только от них.

После такого блестящего начала Лаплас был вознагражден первой существенной почестью, будучи в возрасте лишь 24 лет, — избранием членом Академии наук. Его последующая научная жизнь была подытожена Фурье: «Лаплас придавал всем своим работам постоянное направление, от которого никогда не отклонялся; неизменность взглядов была всегда основной чертой его гения. Он был уже виртуозом в математическом анализе [когда занялся исследованием Солнечной системы], овладев всеми его тонкостями, и никто не был более компетентным, чем он, чтобы расширить эту область. Он решил главную проблему астрономии [о чем сообщил академии в 1773 г.] и посвятил весь свой талант математической астрономии, которую он был призван усовершенствовать. Он глубоко размышлял над своим великим проектом и всю жизнь улучшал его с настойчивостью, уникальной в истории науки. Обширность предмета льстила гордости его гения. Он взялся написать «Альмагест» своего времени — «Небесную механику», — и его бессмертный труд поставил его настолько выше Птолемея, насколько аналитическая наука [математический анализ] превосходит «Начала» Евклида».

Это совершенно справедливо. Что бы Лаплас ни делал в математике, все было предназначено в помощь решению грандиозной проблемы. Лаплас являет собой образец мудрости — для гениального человека — тем, что он направил все свои силы к единственной центральной цели, достойной самого лучшего, чем располагает человек. Случалось, Лаплас подвергался искушению отвлечься, но ненадолго. Однажды его сильно привлекла теория чисел, но он быстро оставил ее, поняв, что ее загадки, вероятно, потребуют от него больше времени, чем он мог уделить ей, занимаясь Солнечной системой. Даже его эпохальный труд по теории вероятностей, хотя на первый взгляд и уводил в сторону от главных его интересов, вдохновлялся тем, что он был нужен математической астрономии. Познакомившись с этой теорией, он увидел, что она необходима для всех точных наук, и посчитал оправданным развивать ее в пределах своих сил.

«Небесная механика», которая увязала все астрономические труды Лапласа в продуманное целое, публиковалась частями в течение 26 лет. Два тома появились в 1799 г. и касались движения планет, их формы [как вращающихся тел], приливов и отливов. Два следующие тома, вышедшие в 1802 и 1805 гг., продолжали исследование, которое было, наконец, завершено в 1823—1825 гг. пятым томом. Математическое изложение было иногда крайне сжато, а иногда громоздко. Лапласа интересовали результаты, а не то, как он их получил. Избегая сложных математических рассуждений, он часто опускал все, кроме заключения с оптимистическим замечанием «как легко видеть». Он сам часто мог восстановить рассуждение, с помощью которого «видел» эти легкие вещи лишь после нескольких часов, а иногда и дней тяжелого труда. Даже очень сильные в математике читатели скоро приобретали привычку вздыхать во всяком месте, где появлялась знаменитая фраза, зная, что «увидеть» что-то здесь можно только после недели отчаянной работы.

Более приспособленный для чтения обзор главных результатов «Небесной механики» появился в 1796 г. в виде (ставшей классической) работы «Изложение системы мира», в которой содержалось описание лапласовского шедевра, а вся математика была опущена. В этой работе, как и в большом (153 страницы) нематематическом введении в трактат по теории вероятностей (третье издание 1820 г.), Лаплас показал себя почти таким же великим писателем, каким он был математиком. Каждый, кто хочет бегло ознакомиться с теорией вероятностей, не вдаваясь в технические детали, понятные только математикам, не может сделать ничего лучшего, как прочесть лапласово введение. С той поры очень много было сделано, особенно в последние годы, и главным образом в основаниях теории вероятностей, но изложение Лапласа все еще является классическим, совершенным выражением по крайней мере одной философии всего предмета. Теория, о которой едва ли нужно здесь рассказывать, до сих пор еще не завершена. Более того, возникает впечатление, что она еще не начиналась; следующее поколение, возможно, начнет строить ее заново.

Об одной интересной детали астрономического труда Лапласа стоит упомянуть, именно о знаменитой гипотезе происхождения

Солнечной системы из туманности. По-видимому, не зная, что его предвосхитил Кант, Лаплас (лишь полусерьезно) предложил эту гипотезу в примечании. Математика, которой он располагал, не подходила для систематического исследования вопроса, к которому не приступали, пока Джинс в нынешнем столетии не резюмировал обсуждение гипотезы заявлением, что она имеет определенное научное значение.

Лагранж и Лаплас, два ведущих французских ученых XVIII столетия, были во многом противоположны друг другу, и одно типичное различие между ними становилось все более острым по мере развития математики: Лаплас принадлежал к племени математических физиков, Лагранж — чистых математиков. Пуассон, сам являясь представителем математической физики, кажется, отдавал предпочтение Лапласу как ученому более желательного типа: «Имеется глубокое различие между Лагранжем и Лапласом во всей их деятельности, касалась ли она изучения чисел или либрации Луны. Лагранж часто, казалось, видел в рассматриваемых вопросах только математику, для которой сами вопросы были случайностью,—следовательно, высшую ценность он придавал изяществу и общности рассмотрения. Лаплас усматривал в математике главным образом орудие, которое он хитроумно приспосабливал, чтобы оно подходило к каждой специальной задаче, как только она возникала. Один был великим математиком, другой — великим философом, пытавшимся познать природу, заставляя высшую математику служить этому». Фурье также поражался коренному различию между Лагранжем и Лапласом. Будучи сам скорее узким «практиком» по своим математическим данным, Фурье смог все же оценить истинное достоинство Лагранжа: «Лагранж был не менее великим философом, чем великим математиком. Всей своей жизнью, скромными желаниями он доказал свою неизменную преданность общим интересам человечества, — благородной простотой манер, возвышенным характером и, наконец, точностью и глубиной своих научных трудов».

Весьма знаменательно, что это высказывание исходит от Фурье. Оно верно по крайней мере теперь. Величайшее влияние Лагранжа на современную математику обязано именно «точности и глубине его научных трудов» — качествам, которые часто отсутствуют в шедеврах Лапласа.

Для большинства современников и непосредственных последователей Лаплас выглядел крупнее Лагранжа. Отчасти этому способствовала значительность проблемы, которой занимался Лаплас, — грандиозный замысел доказательства, что Солнечная система является гигантским вечным двигателем. Замысел сам по себе был, несомненно, величественным, но, по существу, иллюзорным. Во время Лапласа, и даже в наше время, того, что известно о физической вселенной, недостаточно, чтобы придать проблеме определенное реальное значение, и, вероятно, пройдет еще много лет, прежде чем математика достаточно продвинется вперед, чтобы обработать усложненную массу имеющихся теперь данных. Астрономы-теоретики будут, несомненно, продолжать возиться с идеализированными моделями «Вселенной» или даже со значительно менее впечатляющими моделями Солнечной системы и будут продолжать наводнять нас вселяющими бодрость или отчаяние сообщениями о судьбе человечества, но в конечном счете только побочный продукт их исследований (совершенствование чисто математических средств, придуманных ими) останется перманентным вкладом в развитие науки точно так же, как это случилось с Лапласом.

Если вышесказанное покажется читателю слишком сильным, давайте познакомимся с судьбой «Небесной механики». Верит ли действительно сейчас кто-нибудь, кроме ортодоксальных математиков, что заключение Лапласа об устойчивости Солнечной системы является надежным суждением о бесконечно усложненной ситуации, которую Лаплас заменил идеализированной схемой? Возможно, многие верят, но ни один работающий в математической физике не сомневается в мощи и полезности математических методов, развитых Лапласом, когда он занимался своей идеальной мечтой.

Приведем только один пример. Теория потенциала стала сейчас значительно более важной, чем когда-либо мог мечтать Лаплас. Без содержащейся в этой теории математики мы должны были бы остановиться почти у самых начал наших попыток постичь электромагнетизм. Из этой теории выросла мощная область математики граничных задач, сегодня значительно более важная для физической науки, чем вся ньютоновская теория тяготения. Понятие потенциала было вдохновляющей математической идеей высшего класса — оно позволило атаковать физические проблемы, к которым другим путем невозможно было бы подступиться.

Потенциал — это просто функция u, описанная в связи с рассмотрением движения жидкости и уравнения Лапласа в главе о Ньютоне. Там эта функция u является «потенциалом скорости». Если рассматривается сила ньютоновского притяжения, то u является «потенциалом тяготения». Введение потенциала в теории движения жидкостей, тяготения, электромагнетизма и во всевозможные другие области является одним из крупнейших шагов вперед, когда-либо сделанных в математической физике. Он позволил заменять дифференциальное уравнение в частных производных с двумя или тремя переменными обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В 1785 г., в возрасте 36 лет, Лаплас стал действительным членом академии. Этот же год, знаменующий такой почет в научной деятельности, выделяется как веха еще большего значения в общественном положении Лапласа — в этом году он экзаменовал одного из 16 кандидатов в Военную школу. Этому юноше предстояло играть важную роль в последующем отходе Лапласа от математики и погружении в мутные воды политики. Имя юноши было Наполеон Бонапарт (1769—1821).

Лаплас прошел через революционные годы сравнительно спокойно. Но все же ни один человек с его известностью и беспокойным честолюбием не мог в то время избежать опасности полностью. Лаплас и Лагранж не питались лебедой, как многие другие менее нужные ученые, и не были столь беспечны, чтобы выдать себя, как это случилось с их несчастным другом Кондорсе: его не то отравили в тюрьме, не то не препятствовали ему покончить с собой.

После революции Лаплас активно занялся политикой, возможно надеясь побить в этом рекорд Ньютона. Французы вежливо говорят о «разносторонности» Лапласа в политике. Это выражение чересчур мягко. Пресловутые недостатки Лапласа как политика были не чем иным, как блестящими способностями в азартной игре. Лаплас всегда получал лучшие посты при каждом падении правительства. Ему ничего не стоило за ночь переметнуться от неистовых республиканцев к ревностным монархистам.

Наполеон подсовывал Лапласу все, включая портфель министра внутренних дел (об этом скажем позже). Все наполеоновские ордена украшали грудь гибкого математика, включая Большой Крест Почетного легиона. Он был пожалован также титулом графа империи. Как же он поступил, когда Наполеон пал? Подписался под декретом об изгнании своего благодетеля.

Во времена реставрации Лаплас не сталкивался ни с какими трудностями в выражении верноподданнических чувств Людовику XVIII, тем более что он сидел теперь в палате пэров как маркиз де Лаплас. Людовик признал его заслуги в оказанной ему поддержке и в 1816 г. назначил председателем комиссии по реорганизации Политехнической школы.

Одной своей чертой Лаплас превосходил всех придворных, именно моральным мужеством, когда вопрос касался его истинных убеждений. Рассказ о размолвке Лапласа с Наполеоном в связи с «Небесной механикой» показывает Лапласа таким, каким он был в действительности. Лаплас преподнес Наполеону экземпляр своей книги. Желая подзадорить Лапласа, Наполеон упрекнул его в очевидном, по его мнению, просмотре. «Вы написали такую огромную книгу о системе мира, ни разу не упомянув о творце вселенной». — «Сир, — ответил Лаплас, — я не нуждался в этой гипотезе». Нужны были крепкие нервы, чтобы говорить Наполеону правду.

Искреннее благородство Лаплас проявил по отношению к начинающим. Био рассказывает, что молодым человеком он докладывал свою статью в академии в присутствии Лапласа. После доклада Лаплас отвел его в сторону и показал ему такой же результат, содержавшийся в пожелтевшей рукописи его статьи, еще не опубликованной. Побудив Био держать увиденное в секрете, Лаплас посоветовал ему идти дальше и опубликовать свою работу. Так поступал он не один раз. Начинающие в математических исследованиях, как любил говорить Лаплас, были его приемными сыновьями, но относился он к ним как к родным сыновьям.

Поскольку одна цитата часто приводится как пример, убеждающий в непрактичности математиков, мы тоже поместим ее здесь. Это знаменитая оценка Лапласа Наполеоном, сделанная бывшим императором, когда он был в заключении на острове Святой Елены. «Первоклассный математик Лаплас быстро проявил себя администратором лишь средней руки; после первых же его действий мы поняли, что обманулись. Лаплас не видел в вопросах их сущности, он во всем искал второстепенные детали, высказывал только весьма сомнительные идеи и, наконец, вносил дух бесконечно малого в управление».

Это саркастическое свидетельство было вызвано непродолжительным (6-недельным) пребыванием Лапласа на посту министра внутренних дел.

Свидетельство Лапласа, характеризующее Наполеона, не сохранилось.

Кто же после всего оказался более искусным администратором? Человек, который не мог удержать успех и умер заключенным своими врагами, или тот, кто продолжал пользоваться богатством и уважением до самой своей смерти?

Лаплас провел последние дни жизни в своем имении Аркуэйль близ Парижа в удобном уединении. После непродолжительной болезни он умер 5 марта 1827 г., на 78-м году жизни.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ДРУЗЬЯ ИМПЕРАТОРА

МОНЖ (1746—1818), ФУРЬЕ (1768—1830)

Начертательная геометрия должна была бы существовать во все времена... тем не менее приурочить практические вопросы к необходимому числу отвлеченных и элементарных действий никому не приходило в голову, а в особенности собрать их все в одно руководство с самостоятельным заглавием, с тем чтобы придать им характер учения, независимо от практических навыков, из ряда которых они достаточно уже вышли. Это задумал и выполнил с редким талантом Монж. — МИШЕЛЬ ШАЛЬ

Теорема Фурье является не только одним из самых красивых результатов современного анализа, но, можно сказать, и необходимым инструментом исследования почти каждого непонятного вопроса современной физики. — ВИЛЬЯМ ТОМСОН и П. Г. ТЕТ

ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ГАСПАРА МОНЖА (1746—1818) шла любопытным образом параллельно деятельности Жозефа Фурье (1768—1830), и их можно рассматривать вместе. Каждый из них сделал фундаментальный вклад в математику. Монж изобрел начертательную геометрию (не следует путать ее с проективной геометрией Дезарга, Паскаля и других). Фурье заложил современную математическую физику своими классическими исследованиями по теории распространения тепла.

Без геометрии Монжа, первоначально созданной им для использования в военном производстве, широкое развитие машиностроения в XIX в. было бы, вероятно, невозможно. Начертательная геометрия является истоком всякого технического черчения и графических методов, которые помогли сделать механическое производство действительностью.

Методы, зачинателем которых был Фурье в своих трудах по теплопроводности, имеют сходное значение для граничных задач — станового хребта математической физики.

Монж и Фурье, таким образом, ответственны за значительную часть нашей цивилизации: Монж — за практическую, производственную ее сторону, Фурье — за чисто научную. Впрочем, даже с практической точки зрения методы Фурье стали сейчас необходимыми, превратившись в обиходный инструмент электротехники, акустики и радиотехники вслед за правилом правой руки и другими основными положениями учебников.

Третий ученый должен быть назван вместе с этими математиками, хотя у нас нет здесь места для описания его жизни, — химик граф Клод Луи Бертолле (1748—1822), близкий друг Монжа, Лапласа, Лавуазье и Наполеона. Вместе с Лавуазье Бертолле считается одним из основателей современной химии. Он и Монж были так дружны, что их почитатели отказывались различать их вне научных занятий и называли их просто Монж — Бертолле.

Гаспар Монж родился 10 мая 1746 г. в Боне во Франции в семье Жака Монжа — розничного торговца и точильщика, который питал исключительное уважение к образованию и послал своих трех сыновей учиться в местный коллеж. Все три сына преуспели, но Гаспар был самым способным в семье. Еще в коллеже (управлявшемся церковниками) он регулярно занимал первые места по всем предметам и был удостоен уникального отличия—записи после своей фамилии: «золотой юноша».

В 14-летнем возрасте особое сочетание способностей Монжа проявилось в том, что он сделал огненную машину. «Как вам удалось без руководства или модели успешно осуществить такой замысел?» — спрашивали его удивленные горожане. Ответ Монжа кратко освещает математическую сторону его деятельности и многое другое: «У меня есть два верных средства для успеха: непобедимое упорство и ловкие пальцы, которые трансформируют мою мысль с геометрической точностью». Несомненно, он был врожденным геометром и инженером с непревзойденным даром пространственного воображения.

В 16 лет Монж сделал замечательную карту Бона, целиком по своей собственной инициативе, используя для этой цели топографические инструменты своего изготовления. Эта карта и принесла ему первый большой успех.

Ослепленные ярким гением Монжа, учителя рекомендовали его преподавателем физики коллежа в Лионе, который управлялся тем же религиозным орденом. Монж получил эту должность в 16 лет. Приветливость, настойчивость, отсутствие у него притворства в дополнение к основательным знаниям сделали его великим педагогом. Орден просил Монжа принять его обеты и связать на всю жизнь свою судьбу с ним. Монж посоветовался с отцом. Проницательный отец, хотя был простым точильщиком, посоветовал повременить с ответом.

Через несколько дней, приехав домой, Монж познакомился с военным инженером, видевшим знаменитую карту. Офицер убедил Жака отдать сына в военное училище в Мезьере. Возможно, к счастью для будущего Монжа, офицер не сообщил, что из-за своего происхождения он не сможет получить офицерский чин. Не зная этого, Монж с нетерпением согласился и отправился в Мезьер.

Там он скоро понял свое место. В училище было всего 20 учащихся, из которых 10 производились ежегодно в инженер-лейтенанты. Остальные были обречены на «практическую», черновую работу. Монж не жаловался. Скорее, он был доволен, так как рутинная работа по землемерным съемкам и черчению схем оставляла ему много времени для математики. Важной частью учебного курса являлась теория фортификации, задачей которой было спланировать работы так, чтобы ничто не попадало под прямой огонь неприятеля. Обычные вычисления при этом требовали огромного количества арифметических действий. Свое решение задачи такого типа Монж провел за один день. Оно было передано старшему офицеру на просмотр.

Скептически относясь к тому, что кто-нибудь может решить задачу своевременно, офицер отказался проверить решение: «Я могу поверить в большие упрощения вычислений, но не в чудеса!» Монж настаивал на проверке, сказав, что он вообще не пользовался арифметикой. Его упорство победило: решение было проверено и найдено правильным.

Так зародилась начертательная геометрия. Монжу сразу же предоставили должность младшего преподавателя, чтобы он обучал будущих военных инженеров новому методу. Задачи, которые прежде казались кошмарными и иногда решались только после того, как отбрасывалось то, что было сделано, и все начиналось снова, стали простыми, как азбука. Монж дал клятву не разглашать свой метод, и в течение 15 лет его ревниво оберегали как военную тайну. Только в 1794 г. было разрешено преподавать метод Монжа — начертательную геометрию — публично в Нормальной школе в Париже, где Лагранж оказался среди слушателей. Реакция Лагранжа на начертательную геометрию напоминает реплику Журдена, который не знал, что всю жизнь говорил прозой. «До слушания лекции Монжа, — сказал Лагранж, — я не знал, что мне известна начертательная геометрия».

Идея, заложенная в этой науке, кажется теперь нам до смешного простой, как и Лагранжу. Начертательная геометрия является методом изображения пространственных и других фигур обычного трехмерного пространства на *одной плоскости*. Представьте вначале две плоскости, образующие между собой прямой угол, как, скажем, две страницы тонкой книги, раскрытые под углом в 90°. Одна плоскость пусть будет горизонтальной, другая — вертикальной. Фигура, которую нужно изобразить, проектируется с помощью перпендикуляров на каждую из плоскостей. Получаются *две* проекции фигуры. Проекция на горизонтальную плоскость называется *горизонтальной* проекцией (*планом*); на вертикальную — *фронтальной проекцией*. Далее вертикальная плоскость поворачивается, пока она и горизонтальная плоскость не образуют *одну и ту же* плоскость (горизонтальную), — как если раскрытую книгу поместить на плоскую поверхность стола (придавить тяжелым стеклом).

Тело или другая фигура пространства тем самым изображается двумя проекциями на одной плоскости (плоскости чертежной доски). Плоскость, например, изображается своими *следами* — прямыми ее пересечения с вертикальной и горизонтальной плоскостями до их совмещения. Тело, например куб, представляется проекциями своих ребер и вершин. Криволинейные поверхности образуют в сечениях вертикальной и горизонтальной плоскостями кривые линии; эти линии — *следы* поверхности — изображают поверхность на одной плоскости.

Когда эти и другие столь же простые положения развиты, получаем метод *начертательной* геометрии, который позволяет перенести на плоский лист бумаги то, что мы обычно представляем себе в трехмерном пространстве. При небольшой тренировке чертежник «читает» эти изображения так же легко, как другие «читают» хорошие фотографии, но получает из них значительно больше. Таково было простое изобретение, которое революционизировало военно-инженерное дело[1] и промышленное проектирование. Подобно многим другим первоклассным открытиям в прикладной математике, у этого метода наиболее замечательной чертой является его простота. Существует много путей, следуя которым можно развить или модифицировать начертательную геометрию, но все они восходят к Монжу. Предмет ее разработан теперь так тщательно, что не представляет большого интереса для профессиональных математиков.

Прежде чем продолжить описание жизни Монжа, напомним, что его имя теперь известно всякому студенту, изучающему повышенный курс анализа в связи с геометрией поверхностей. Большим шагом Монжа вперед было систематическое и блестяще выполненное применение анализа к исследованию кривизны поверхностей. Его общая теория кривизны расчистила путь для Гаусса, который, в свою очередь, вдохновил Римана, развившего геометрию, известную под его именем в теории относительности.

Такой врожденный геометр, как Монж, мог бы еще полнее раскрыть свой талант, если бы так не стремился к материальному благополучию (жизнь на широкую ногу в Египте). Его труды в области дифференциальных уравнений тесно связаны с его трудами по геометрии. Спустя годы после того, как он покинул Мезьер, где им созданы эти выдающиеся труды, он читал лекции о своих открытиях своим коллегам по Политехнической школе. Снова его слушал Лагранж. «Мой дорогой коллега, — сказал он Монжу после лекции, — Вы только что объяснили некоторые очень изящные вещи; я хотел бы, чтобы они были сделаны мною самим». И в другой раз: «С такими применениями анализа к геометрии этот пострел обеспечит себе бессмертие!» Так оно и случилось; интересно отметить, что, хотя внешние обстоятельства отвлекали его от математики, Монж оставался математиком до конца своей жизни.

---

[1] В самом начале — военное, а затем и все техническое производство.

В 1768 г., в возрасте 22 лет, Монж был назначен профессором математики в Мезьере, а 3 года спустя получил и должность профессора физики. Двойная нагрузка его совершенно не переутомляла. Хорошо сложенный, здоровый телом и духом, Монж всегда мог выполнять работу за троих или четверых и часто делал это.

Его женитьба имела романтическую окраску — в духе XVIII столетия. Монж был пленен очаровательной молодой особой. Это была мадам Орбон, вдова 20 лет, не склонная выходить замуж, пока не будут улажены дела ее покойного мужа. «Не думайте обо всем этом, — заверил ее Монж, — мне приходилось решать и более трудные задачи». Они поженились в 1777 г. Она пережила его и сделала все, что в ее силах, чтобы увековечить его память, не сознавая, что ее муж сам себе создал нерукотворный памятник задолго до того, как встретился с нею. Жена Монжа была единственным человеком, остававшимся верным ему, несмотря ни на что. Даже Наполеон в самом конце своей деятельности отвернулся от него, учитывая его возраст.

Монж вел оживленную переписку с Даламбером и Кондорсе. В 1780 г. эти математики побудили правительство основать в Лувре учреждение для изучения гидравлики. Монж был вызван в Париж, чтобы принять в этом участие; при этом подразумевалось, что половину своего времени он может проводить в Мезьере. Ему было тогда 34 года. Через 3 года он оставил Мезьер и получил назначение экзаменатора кандидатов на получение офицерского чина в военно-морском флоте; на этом посту он находился до начала революции 1789 г.

За 6 лет, которые Монж отдал военно-морской службе, он проявил себя неподкупным государственным служащим. Рассерженные аристократы угрожали ему ужасной местью, когда он беспощадно «проваливал» их несведущих сыновей, но Монж никогда не изменял своей совести. «Пусть кто-нибудь еще займется этим делом, если мой способ действий не нравится». В результате его деятельности военно-морской флот был готов к действию в 1789 г.

Происхождение его и опыт общения со снобами, стремящимися урвать незаслуженные почести, сделали Монжа настоящим революционером. По своему собственному опыту он знал о коррупции, присущей старому режиму, и о материальных лишениях народных масс, и он верил, что пришло время для переустройства общества. Но, как и большинство либералов того времени, Монж не понимал, что простой народ, начав борьбу, не удовлетворится этим, не остановится на полпути. Деятели начального периода революции верили в Монжа больше, чем он сам верил в себя. Вопреки его более здравому мнению, они заставили Монжа принять 10 августа 1792 г. назначение на пост министра военно-морского флота и колоний. Он хорошо справлялся с этой должностью, но в Париже 1792 г. было небезопасно занимать высокие посты.

Будучи сам сыном народа, Монж чувствовал, что он понимает простых людей лучше, чем некоторые его друзья, например

Кондорсе, который благоразумно уклонился от военно-морской должности, чтобы сохранить свою голову.

В феврале 1793 г. Монж, обнаружив, что его подозревают в недостаточной радикальности, 13-го числа вышел в отставку, но 18-го снова был переизбран на тот же пост. В любой день этого трудного периода Монж мог оказаться на эшафоте. Несмотря на это, он никогда ни перед кем не раболепствовал, особенно перед невеждами и некомпетентными людьми. Его беспокоило лишь то, что разлад внутри Франции открывает возможность нападения для ее врагов, которые могли бы уничтожить все завоевания революции.

Наконец 10 апреля 1793 г. Монжу было разрешено выйти в отставку, чтобы заняться более неотложной работой. Нападение врагов стало совершенно явным.

Располагая почти пустым арсеналом, Конвент, чтобы защититься, начал комплектовать 900-тысячную армию. Имелась лишь одна десятая часть необходимой амуниции, и не было никакой надежды импортировать нужные материалы — медь и олово — для изготовления бронзовых пушек, селитру для пороха и сталь для огнестрельного оружия. «Достаньте нам из-под земли селитру, и через 3 дня мы зарядим все наши пушки», — сказал Монж Конвенту. Все это хорошо, возразили ему, но где же достать селитру? Монж и Бертолле показали где.

Весь народ был мобилизован. Под руководством Монжа были разосланы в каждый город и каждую деревню Франции бюллетени, в которых народу объяснялось, что нужно делать. Возглавляемые Бертолле химики изобрели новые, более совершенные методы очистки сырья и упростили технологию изготовления пороха. Вся Франция стала огромным пороховым заводом. Монж был душой всего этого движения.

Когда революция стала перерождаться, враги оживились. Над Монжем и Бертолле нависла угроза. Через короткое время гражданину Монжу угрожал уже привратник его дома и он благоразумно покинул Париж до тех пор, пока не пронесется буря.

Третий период в деятельности Монжа начался в 1796 г. с письма Наполеона.

«Разрешите мне, — писал Наполеон, — поблагодарить Вас за сердечность, проявленную министром военно-морского флота в 1792 г. по отношению к молодому артиллерийскому офицеру, не бывшему в фаворе; этот офицер сохранил все в своей памяти. Сейчас он является генералом армии в Италии и с радостью протягивает Вам руку дружбы и признания».

Так начиналась длительная близкая дружба между Монжем и Наполеоном. Комментируя эту уникальную привязанность, Араго* приводит слова Наполеона: «Монж любит меня, как любят

* Ф. Ж. Д. Араго (1786—1853) — астроном, физик, автор биографий ученых.

возлюбленную». С другой стороны, Монж, кажется, был единственным человеком, к которому Наполеон относился с бескорыстной и выдержанной дружбой.

«Признание», упомянутое Наполеоном в письме, выразилось в назначении Директорией Монжа и Бертолле членами комиссии, посланной в Италию для отбора картин, скульптур и других произведений искусства, «вносимых» итальянцами в счет контрибуции. Разбирая добычу, Монж развил в себе остроту в оценке произведений искусства и стал почти знатоком искусства.

После окончания дел в Италии Монж и Наполеон стали большими друзьями. Наполеон упивался беседами с Монжем и впитывал в себя неиссякаемый поток интересных сведений, а Монж наслаждался юмором главнокомандующего. На публичных приемах Наполеон всегда приказывал оркестру играть Марсельезу, которую очень любил Монж. Он громко запевал:

Вперед, сыны отечества,
День славы настает!

В декабре 1797 г. Монж совершил вторую поездку в Италию, на этот раз как член комиссии по расследованию «великого преступления» — убийства генерала Дюфо.

Монж был одним из немногих, кого Наполеон в 1798 г. посвятил в свой план завоевания и цивилизации Египта. Рассказывая о Фурье, мы вернемся к этому плану.

Жан-Баптист-Жозеф Фурье родился 21 марта 1768 г. в Оксере, во Франции, и был сыном портного. Осиротев в 8-летнем возрасте, он был рекомендован епископу Оксера одной благодетельной дамой, которую пленили хорошие манеры мальчика и его серьезное поведение; вряд ли она представляла, кем ему суждено стать. Епископ определил Фурье в местную военную школу, которой управляли бенедиктинцы; здесь он скоро проявил свой гений. В 12 лет он сочинял великолепные проповеди для видных парижских церковников, выдававших эти проповеди за свои собственные. В 13 лет он был трудным ребенком, своенравным, нетерпеливым, вообще чертенком. Затем, при первом же знакомстве с математикой, он изменился как по волшебству. Для занятий математикой он даже отрывал время от сна. (Он собирал огарки свечей в кухне.) Его тайные занятия проходили у камина за перегородкой.

Бенедиктинцы убеждали юного гения избрать своей профессией служение религии и стать послушником. Но раньше, чем Фурье смог выполнить их просьбы, пришел 1789 год. Фурье всегда хотел быть военным, а выбор служения церкви определялся только тем, что офицерские звания сыновьям портных не присваивались. Революция принесла свободу. Его старые друзья в Оксере были достаточно разумными, чтобы понять: Фурье никогда не станет монахом. Они вернули его к себе и сделали преподавателем математики. Это был первый — большой — шаг к осуществлению его честолюбивых замыслов. Фурье проявил многосторонность в преподавании, заменяя своих заболевших коллег, которое он обычно вел лучше, чем они, начиная от физики и кончая древними языками.

В декабре 1789 г. Фурье, в возрасте 21 года, поехал в Париж, чтобы представить в академию свои исследования по решению уравнений с числовыми коэффициентами. Эта работа шла дальше сделанного здесь Лагранжем и все еще является ценной, но, поскольку ее затмили исследования Фурье по математической физике, мы не будем останавливаться на ней; ее изложение можно найти в учебниках по началам теории уравнений. Ее предмет стал одним из тех, которыми интересовался Фурье всю жизнь.

Возвратившись в Оксер, Фурье вступил в партию народа. С самого начала он был энтузиастом революции. Во время террора, пренебрегая личной безопасностью, он протестовал против излишней жестокости. Фурье был во власти событий. Но вместо благородного поощрения наук он вскоре увидел отправляющихся на эшафот или спасающихся бегством ученых, а саму науку—борющейся за свое существование.

Нужно отдать должное Наполеону за то, что он одним из первых понял с полной ясностью, что невежество само по себе не может принести ничего, кроме разрушений. Наполеон приказывал создавать учебные заведения или поощрял это. Но не было учителей. Стало крайне необходимым обучить новый состав учителей (полторы тысячи), и с этой целью в 1794 г. была создана Нормальная школа. В награду за деятельность в Оксере Фурье был определен на кафедру математики.

Этим назначением открылась новая эра в преподавании математики во Франции. Напоминая о смертельно скучных уроках прежних преподавателей, заучивавших все наизусть и дословно повторявших одно и то же из года в год, Конвент, призвав *создателей* математики *преподавать* ее, запретил вообще читать лекции по запискам. Лекции предписывалось проводить стоя (а не сидя в полусне за кафедрой, как раньше). Они должны были включать свободное общение обучаемых, задававших вопросы, и преподавателя, дававшего объяснения. От преподавателя требовалось не допускать превращения занятий в бесполезные обсуждения.

Успех этих нововведений превзошел все ожидания и привел к появлению одного из самых блистательных периодов в истории французской математики и науки вообще. Как в недолговечной Нормальной школе[1], так и в более живучей Политехнической школе Фурье проявил выдающийся талант преподавателя. В Политехнической школе он оживлял свои лекции по математике попутными историческими сведениями (многие из которых он первым про-

[1] Действовала первоначально непродолжительное время, в дальнейшем была восстановлена.

следил до их первоисточников) и искусно смягчал абстрактные рассуждения с помощью интересных приложений.

Фурье все еще готовил инженеров и математиков в Политехнической школе, когда Наполеон в 1798 г. решил взять его с собой, как одного из членов Легиона культуры, направляющегося цивилизовать Египет.

Интересно познакомиться с тем, как жители Египта принимали «все благоденствия европейской цивилизации», которые господа Монж, Бертолле и Фурье пытались втолковать им, и что эти 3 мушкетера европейской культуры получили сами от своей бескорыстной миссионерской деятельности.

Французский флот из 500 кораблей прибыл на Мальту 9 июня 1798 г. В качестве первого шага к цивилизации Востока Монж основал пятнадцать начальных школ и одну школу повышенного типа, кое в чем напоминавшую Политехническую школу. Через неделю флот снова был в море, а Монж — на борту флагманского судна Наполеона «Ориент». Каждое утро Наполеон набрасывал программу для дневного и вечернего собраний, на которых обсуждались разнообразные вопросы. Монж блистал на них.

Флот достиг Александрии 1 июля 1798 г. Наполеон посадил Монжа и других ученых на корабль и послал вверх по Нилу в Каир.

Наполеон решительно продвигался вдоль берега. Услышав звуки мощной канонады, доносившейся с реки, он оставил поле битвы и поспешил на помощь. На песчаной косе стоял корабль, прочно севший на мель. Монж, как ветеран, самолично обслуживал пушку. Наполеон прибыл как раз вовремя, чтобы отогнать с отмели нападавших и воздать Монжу заслуженные им знаки отличия за проявленную храбрость. Так Монж все же понюхал пороха. Наполеон радовался спасению друга.

Одержав 20 июля 1798 г. победу в битве под Пирамидами, торжествующая армия с шумом вступила в Каир. Египтяне не проронили ни слова во время банкета, устроенного господами Монжем, Бертолле и Фурье в Египетском институте (основан 27 августа 1798 г.; пародия на Институт Франции), как мумии слушали они выступления Бертолле, Монжа, Фурье. Вспотевшие ученые потеряли хладнокровие, осуждали их за нежелание становиться просвещенными. Нецивилизованный египтянин выражал свое отношение к высшей цивилизации завоевателей на единственном языке. Три сотни наполеоновских храбрецов оказались зарезанными во время стычки на улице. Монж спас жизнь себе и своим приближенным только благодаря проявленному героизму.

Неблагодарность со стороны египтян заставила Наполеона поспешить с возвращением в Париж, чтобы спасти честь Франции и самого себя. Он поделился своими планами с Монжем; менее любимый Фурье этой чести не был удостоен. Зато Фурье мог быть удовлетворен тем, что в глазах главнокомандующего был достаточно крупной фигурой для того, чтобы просвещать Египет. Только в

1801 г., уже после Трафальгара, лишенный иллюзий, Фурье вернулся во Францию.

Путешествие Наполеона и Монжа назад было менее приятным, чем туда.

— Монж, — сказал однажды Наполеон, — если мы будем атакованы англичанами, наш корабль должен быть взорван в тот самый момент, когда они взойдут на борт. Я поручаю вам подготовить это.

Как раз на следующий день на горизонте появился парус, и все заняли свои посты для отражения ожидавшейся атаки. Но корабль оказался французским.

Бертолле и Монж вернулись домой, похожие на бродяг. Лишь с трудом признал Монжа привратник.

Дружба с Наполеоном оставалась нерушимой. Вероятно, Монж был единственным человеком во Франции, который осмеливался возражать Наполеону и говорить в глаза ему всю правду в дни, когда его высокомерие возросло до предела. Когда Наполеон короновался императором, молодежь из Политехнической школы возмутилась. Монж был горд этим.

— Послушайте, Монж, — сказал Наполеон, — ваши ученики почти все восстали против меня; они решительно провозгласили себя моими врагами.

— Ваше величество, — ответил Монж, — мы достаточно позаботились о том, чтобы сделать их республиканцами, дайте же им время стать сторонниками императора. Более того, разрешите вам сказать, что ваши действия довольно резки!

Небольшие разногласия, подобные этому, не омрачали взаимной любви давних приятелей. В 1804 г. Наполеон показал, что он высоко ценит заслуги Монжа, присвоив ему звание графа Пелузского. Со своей стороны, Монж принял оказанную ему честь с благодарностью и стал носить титул с обычной для знатного человека важностью, забыв, что еще недавно голосовал за отмену всех титулов.

Дела шли все лучше и лучше до 1812 г., который должен был быть преддверием дня славы, но вместо этого привел к отступлению из Москвы. Слишком старый (66 лет), чтобы сопровождать Наполеона в Россию, Монж оставался в своем имении во Франции, нетерпеливо следя за продвижением Великой армии по официальным бюллетеням. Когда он прочел фатальный «Бюллетень 29», возвещавший о гибели французской армии, с ним случился апоплексический удар.

Монжу суждено было дожить до последнего акта трагедии. Фурье помог опустить занавес. После возвращения из Египта Фурье был назначен (2 января 1802 г.) префектом департамента Изер с местопребыванием в Гренобле. Округ находился в состоянии политического смятения. Первой задачей Фурье было восстановление порядка. Он сделал много полезного, произведя осушение болот, уничтожив малярию и иными способами выводя округ из состояния средневековья.

Именно в Гренобле Фурье написал бессмертную «Математическую теорию тепла», ставшую вехой в математической физике. Его первый мемуар о теплопроводности был представлен в академию в 1807 г. Он был столь обещающим, что академия поощрила Фурье на продолжение работы, установив в 1812 г. Большую премию за разработку математической теории теплопроводности. Фурье получил эту премию, но не без некоторой критики в своей адрес, которую он резко отверг, но которая была в общем справедливой.

Отзыв на работу давали Лаплас, Лагранж и Лежандр. Отмечая новизну и важность труда Фурье, они указывали, что математическое рассуждение имеет недостатки, оставляет желать много лучшего с точки зрения строгости. Лагранж сам открыл частные случаи основной теоремы Фурье, но должен был воздержаться от перехода к общему результату из-за трудностей, на которые теперь он указывал. Эти тонкие трудности имели такую природу, что их устранение в то время, вероятно, было невозможно. Должно было пройти более 100 лет, прежде чем они были в достаточной мере преодолены.

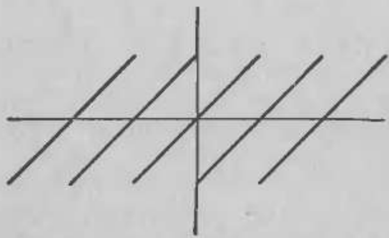
Эта полемика образно представляет коренное отличие чистого математика от математика-прикладника, в данном случае занимающегося математической физикой. Для чистых математиков единственным средством, которым они располагают, является последовательное, логичное рассуждение, отчетливое, точное доказательство, и, пока доказываемая теорема не выдержит строжайшей критики, на которую способна математика данного периода, чистый математик извлекает из нее мало пользы.

Математик-прикладник, занимающийся математической физикой, напротив, редко бывает столь оптимистичным, чтобы представить, что бесконечно сложная физическая вселенная может быть вполне описана математической теорией, достаточно простой для того, чтобы быть понятой людьми. Он может обратиться к *эксперименту* и проверить выводы своей намеренно несовершенной математики данными опыта, что, по самой природе математики, невозможно для чистого математика. Если математические предсказания противоречат опыту, прикладник не поворачивается спиной к физическим данным, как это могут сделать математики, а отбрасывает свой математический аппарат и ищет лучшие средства исследования.

Такое безразличие представителей естественных наук к математике бесит *чистых* математиков, как пропуск сомнительной точки над *i* бесит некоторых педантов. В результате очень немногие *чистые* математики сделали значительный вклад в естественные науки, не говоря, конечно, о том, что они создали разнообразный математический аппарат, который естественники считают полезным (возможно, необходимым). Во всем этом самым курьезным является то, что пуристы, которые возражают против проявления фантазии и воображения в исследовании природы, громче всех кричат о том, что математика, вопреки широко распространенному мнению, совершенно не является предметом одной лишь добросовестности и аккуратности в логике, дотошной, мелочной точности, а представляет собой предмет творческий, требующий воображения, фантазии и иногда такой же гибкий, какой, случается, бывает великая поэзия или музыка. Иногда физики в этом отношении превосходят математиков: игнорируя явный недостаток строгости в классическом труде Фурье по аналитической теории теплопроводности, лорд Кельвин назвал этот труд «великой математической поэмой».

Как уже говорилось, главный успех Фурье относился к области граничных задач (описанных в главе о Ньютоне) — к нахождению решений дифференциальных уравнений по заданным условиям (начальным, граничным), что, вероятно, является центральной проблемой математической физики. С тех пор как Фурье применил свой метод к математической теории теплопроводности, не мало высокоодаренных ученых на протяжении столетия продвинулись так далеко, как и не мечталось ему, однако сделанный им шаг был решающим. Одна или две вещи из того, что он сделал, достаточно просты для того, чтобы о них здесь рассказать.

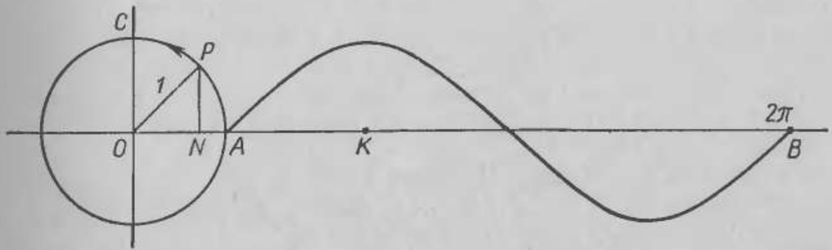
В алгебре мы знакомимся с построением графиков, описываемых простыми алгебраическими уравнениями, и скоро замечаем, что получаемые кривые, если их продолжать достаточно далеко, не имеют внезапных обрывов и не кончаются. Но каким уравнением описать график, подобный получаемому повторением без конца отрезка прямой (конечной длины, с двумя концами), как показано на рисунке?



Такие графики, составленные из разрозненных частей прямых или кривых линий, часто встречаются в физике, например в теории тепла, звука и в гидродинамике. Можно доказать, что их невозможно описать конечными математическими выражениями, их уравнения содержат *бесконечно много* членов. «Теорема Фурье» обеспечивает средства для математического представления и исследования таких графиков: она дает выражение (при некоторых ограничениях) данной функции, непрерывной на определенном промежутке или имеющей на нем только конечное число точек разрыва (первого рода), и притом лишь с конечным числом на нем точек максимума и минимума, в виде бесконечной суммы синусов или косинусов или тех и других вместе (это — только приблизительная формулировка).

Упомянув синусы и косинусы, напомним их важнейшие свойства — *периодичность*. Возьмем окружность единичного радиуса. Через ее центр O проведем взаимно перпендикулярные оси декартовой системы координат и отложим на горизонтальной оси отрезок AB длиной 2π. Таким образом, AB равняется длине окружности данного круга (поскольку его радиус есть 1). Пусть точка P, начиная от точки A, описывает окружность в направлении стрелки. Опустим на OA перпендикуляр PN. Длина этого перпендикуляра называется *синусом* угла AOP, а длина отрезка ON — *косинусом* этого же угла. Отрезкам NP и ON приписываются знаки согласно выбранной декартовой системе координат (вправо и вверх — положительные отрезки, влево и вниз — отрицательные).

При любом положении точки P угол AOP будет частью четырех прямых (360°), так что дуга AP есть часть полной окружности круга. Таким образом, мы можем отложить в определенном масштабе углы AOP, отмечая вдоль AB части 2π, которые соответствуют длинам дуг AP. Так, если P займет положение точки C, будет пройдена $\frac{1}{4}$ всей окружности; следовательно, соответственно углу AOC получим точку K, отстоящую от A на $\frac{1}{4}$ AB. В каждой из таких точек AB восставим перпендикуляр, длина которого равна синусу соответствующего угла: перпендикуляр проводится вверх или вниз соответственно тому, будет ли синус положительным или отрицательным. Концы этих перпендикуляров (не их основания) лежат на непрерывной кривой, показанной на рисунке, — на *синусоиде*.



Когда P вернется к положению A и начнет снова описывать окружность, кривая будет повторяться за точкой B, и так до бесконечности. Если P движется в противоположном направлении, кривая повторяется влево от точки A. Через промежуток длиной 2π кривая повторяется. Мы говорим, что синус (здесь угла AOP) является *периодической функцией* угла и имеет *период* 2π. Слово «синус» («sinus») сокращается до «sin». Если x означает какой-нибудь угол, то равенсгво

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

выражает тот факт, что $\sin x$ является функцией x, имеющей период 2π.

Легко видеть, что если всю кривую на рисунке сдвинуть влево на расстояние, равное AK, то она становится графиком косинуса угла AOP. Как и раньше,

$$\cos(x+2\pi)=\cos x,$$

где «cos» — сокращенное слово «косинус» («cosinus»).

Рассмотрение рисунка показывает, что функция $\sin 2x$ пройдет через свой период «вдвое быстрее», чем $\sin x$, и, следовательно, ее график для полного периода будет в полдлины графика $\sin x$. Аналогично $\sin 3x$ будет иметь период $\frac{2\pi}{3}$, и так далее. То же справедливо для $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ...

Главный математический результат Фурье можно теперь описать примерно так. В пределах ограничений, о которых уже упоминалось в связи с «разорванными» графиками, всякую функцию, имеющую вполне определенный график, можно представить выражением вида:

$$y=a_0+a_1\cos x+a_2\cdot\cos 2x+a_3\cdot\cos 3x+\ldots+b_1\cdot\sin x+$$
$$+b_2\cdot\sin 2x+b_3\cdot\sin 3x+\ldots,$$

где точки означают, что ряды продолжаются бесконечно согласно указанному правилу, а коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, b_3, ... можно определить, если y как некоторая данная функция x известна. Другими словами, любую заданную функцию x, скажем $f(x)$, можно разложить в ряд вышеприведенного типа — *тригонометрический ряд*, или *ряд Фурье*. Еще раз повторим, что это утверждение справедливо только при определенных ограничениях, которые, к счастью, не имеют большого значения в математической физике. Исключениями являются более или менее причудливые случаи, малозначительные или же не имеющие физического значения. Напомним еще раз, что Фурье первым предпринял большой штурм краевых задач. Те из них, которые приводились в главе о Ньютоне, решаются методом Фурье. В любой такой задаче требуется найти коэффициенты a_0, a_1, ..., b_1, b_2, ... в форме, приспособленной для вычислений. Анализ Фурье обеспечивает это.

Понятие периодичности (*простая* периодичность), описанное выше, очевидно, является важным при рассмотрении явлений природы. Приливы и отливы, фазы Луны, времена года и множество других известных явлений имеют периодический характер. Иногда для периодического явления, как, например, появление солнечных пятен, можно дать хорошее приближение путем наложения определенного числа графиков, имеющих простую периодичность. Исследование в таких случаях можно затем упростить, проводя анализ отдельных периодических явлений, результирующей которых является первоначальное явление.

Такой способ действий математически есть то же самое, что и разложение музыкальных звуков на их основную и высшие гармоники. В первом, самом глубоком приближении «качества» звука учитывается только основная гармоника. Наложения всего нескольких первых гармоник обычно достаточно для получения звука, не отличимого от идеального (в котором бесконечное множество гармоник). Подобное положение имеет место для явлений, поддающихся «гармоническому анализу» — «анализу Фурье». Были даже сделаны попытки выявить большие периоды (основные) в протекании землетрясений и выпадении годовых осадков. Понятие простой периодичности так же важно в чистой математике, как и в прикладной; далее мы увидим, что оно обобщается до *многократной* периодичности (в связи с эллиптическими функциями и другими вещами), которая, в свою очередь, воздействует на прикладную математику.

Прекрасно понимая, что он сделал первостепенную работу, Фурье спокойно отнесся к критикам. Они были правы, он неправ, но он, идя своим собственным путем, сделал достаточно для того, чтобы иметь право на независимое суждение.

Когда труд, начатый в 1807 г., был завершен и сведен в трактат по теплопроводности в 1822 г., оказалось, что упрямый Фурье не изменил ни одного слова в представленных им первоначальных работах, дав пример выполнения второй части совета Френсиса Гальтона всем авторам: «Никогда не обижайтесь на критику и никогда не отвечайте на нее». Обида Фурье дополнялась выпадами против чистых математиков: заботьтесь о своих собственных делах и не занимайтесь болтовней относительно математической физики.

Все шло своим чередом и у Фурье, и вообще во Франции, когда бежавший с Эльбы Наполеон высадился на французский берег 1 марта 1815 г. Ветераны, как и все остальные французы, только-только приходили в себя от своих передряг, когда вызвавший их (передряги) появился внезапно снова, принося с собой еще худшее. Фурье в это время был в Гренобле. Опасаясь, что простой народ будет приветствовать Наполеона и даст ему опять «пошалить», Фурье поторопился в Лион сообщить Бурбонам о том, что случилось. Они отказались поверить ему. На обратном пути Фурье узнал, что Гренобль капитулировал. Фурье арестовали и доставили к Наполеону. Он стоял лицом к лицу перед тем же старым командиром, которого так хорошо знал в Египте, и осознал, что к недоверию он пришел головой, а не сердцем. Фурье перешел на сторону Наполеона. Через несколько дней, отвечая на вопрос Наполеона, Фурье сказал, что он проиграет.

Вторая реставрация застала Фурье в Париже, где он закладывал свое имущество, чтобы не умереть с голоду. Старые друзья сжалились над ним и добились его назначения директором статистического бюро Сены. Академия пыталась избрать его своим членом в 1816 г., но правительство Бурбонов не удостоило его такой чести. Однако академия настояла на своем и избрала Фурье в следующем году.

Последние годы Фурье прошли в нескончаемых выступлениях. Как постоянный секретарь академии, он всегда имел возможность найти слушателей. Сказать, что он хвастался своими успехами при Наполеоне — значит выразиться слишком мягко. Он стал нестерпимо говорлив и вместо того, чтобы продолжать свои исследования, развлекал публику хвастливыми рассказами о том, что он собирался делать. Но он действительно сделал много для развития науки, и если какой-нибудь труд, созданный человеком, заслуживает бессмертия, то таков труд Фурье. Ему не было нужды хвалить себя или пускать пыль в глаза.

То, что Фурье пришлось пережить в Египте, породило у него странную привычку, которая, возможно, ускорила его смерть. Он считал, что жара пустыни в высшей степени полезна для здоровья. Всегда укутываясь как мумия, он к тому же жил в комнатах, о которых пережившие такое испытание его друзья говорили, что в них жарче, чем в аду и в Сахаре, вместе взятых. Он умер, видимо, от болезни сердца 16 мая 1830 г., на 63-м году жизни. Фурье принадлежит к числу тех избранных математиков, труды которых столь фундаментальны, что их имена вошли в каждый цивилизованный язык.

Закат Монжа был более медленным и более горестным. Во время Ста дней Наполеон внял совету Монжа и простил тех неблагодарных, кто предал его. Это целиком было заслугой Монжа.

Бежав из-под Ватерлоо и оставив войска выбираться из прорухи, как они сами сумеют, Наполеон вернулся в Париж. К этому времени преданность Фурье охладела, а преданность Монжа сильно возросла.

В школах часто рассказывают о последней мечте Наполеона — завоевании Америки. Монж дает другую версию. Сокрушенный врагами и отягощенный мыслью о вынужденной невозможности дальнейших завоеваний в Европе, Наполеон заявил, что одни лишь научные занятия могут удовлетворить его; он станет вторым, более великим, Александром Гумбольдтом.

Он задумал грандиозное путешествие по Америке, от Канады до мыса Горн, чтобы изучить все те удивительные явления физики Земли, о которых научный мир еще не высказал свое мнение.

«Ваше величество,— воскликнул Монж,— которому было почти 67 лет,— Ваш сотрудник здесь; я готов ехать с Вами!»

«Вы слишком стары, Монж. Мне нужен более молодой спутник»,— возразил Наполеон.

Монж пытался найти «более молодого» ученого. Он считал идеально подходящим для этого пылкого Араго. Но Араго, несмотря на все свое красноречие во славу славнейшего, сказал, что Наполеон не тот поводырь, за которым можно последовать куда угодно, даже в Америку.

Дальнейшие переговоры были грубо прерваны англичанами. В середине октября Наполеон уже «исследовал» остров Святой Елены. «Американский институт» так и не возник на берегах Миссисипи или Амазонки, чтобы стать причудливым близнецом института на берегу Нила.

Монж, который с удовольствием получал свой хлеб от императора, теперь попробовал соль. Его прошлое революционера и любимца выскочки-корсиканца сделало его голову чрезвычайно желанным предметом для Бурбонов; Монжу пришлось скрываться в трущобах, чтобы сохранить свою голову на плечах. Святоши Бурбоны лишили старого ученого его последней чести (на что никогда не посягал Наполеон). В 1816 г. они приказали изгнать Монжа из академии. Академики повиновались.

В последний раз Бурбоны удостоили своей мелочностью Монжа в день его похорон. Как он и предвидел, он умер от паралича. Слушатели Политехнической школы, которых он защищал от властного вмешательства Наполеона, были его гордостью, а он был их кумиром. Когда 28 июля 1818 г. Монж умер, они попросили разрешения присутствовать на его похоронах. Король отклонил их просьбу.

Приказ короля касался только похорон. На следующий день слушатели Политехнической школы в полном составе промаршировали на кладбище и возложили венок на могилу своего учителя и друга Гаспара Монжа.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ДЕНЬ СЛАВЫ

ПОНСЕЛЕ (1788—1867)

Проективная геометрия с удивительной легкостью открыла для нас новые области в нашей науке и справедливо была названа царским путем к ее собственной особой сфере знания. — ФЕЛИКС КЛЕЙН

В 1812 г. ДЕНЬ СЛАВЫ еще не наступил. Наполеон с полумиллионной армией перешел Неман, русские отошли к Москве. Под Бородином они остановились, дали бой и отступили. Наполеон вошел в Москву. Он ждал безоговорочную капитуляцию всех русских войск. Но жители Москвы взяли события в свои руки и пожарами «выкурили» Наполеона вон. Наполеон пренебрег этим не первым для него явным намеком на то, что «кто придет с мечом, от меча и погибнет». Вскоре он поспешил назад через теперь уже тронутые морозом равнины, предоставив Великой армии добираться домой или замерзать, — что она найдет для себя подходящим.

В покинутой французской армии находился молодой офицер военный инженер Жан-Виктор Понселе (1 июля 1788 — 23 декабря 1867). Обучаясь в Политехнической школе в Париже, а затем в Военной академии в Меце, он воодушевился новыми тогда идеями: начертательной геометрией Монжа (1746—1818) и «Геометрией положения» (опубликованной в 1803 г.) Карно Старшего (Лазар-Николай-Маргарет Карно, 13 мая 1753 — 2 августа 1823), чья революционная, а кое в чем реакционная программа была измышлена «для освобождения геометрии от иероглифики анализа».

В предисловии к своему классическому сочинению «Приложения анализа и геометрии» (впервые опубликовано в 1822 г.[1], второе издание в 1862 г.) Понселе рассказывает о пережитом им при гибельном отступлении из Москвы. Среди оставшихся умирать 18 ноября 1812 г. на мерзлом поле битвы был Понселе. Его мундир офицера корпуса инженеров спас ему жизнь. Дозорный отряд, обнаружив, что он еще дышит, доставил его в русский штаб для допроса.

[1] Под названием «Трактат о проективных свойствах фигур».

В качестве военнопленного молодой офицер вынужден был почти 5 месяцев шагать по замерзшим равнинам в остатках мундира, питаясь скромным пайком черного хлеба. Морозы были так сильны, что ртуть часто застывала в термометрах и многие друзья Понселе по несчастью замерзли в дороге; у него хватило сил вынести все испытания, и в марте 1813 г. он прибыл на берега Волги, в Саратов, где подвергся заключению. Сначала он не мог даже думать от истощения. Но «яркое апрельское солнце» оживило его, он вспомнил, что получил хорошее математическое образование, и, чтобы смягчить строгости заключения, решил воспроизвести, насколько сможет, то, что учил. Именно таким образом он пришел к созданию проективной геометрии.

Без книг, имея вначале только самые скудные письменные принадлежности, он восстановил в памяти все, что знал по математике, — от арифметики до высшей геометрии и анализа. Эти первые занятия оживлялись усилиями Понселе подготовить своих друзей — офицеров к экзаменам, которые они должны выдержать, если когда-нибудь снова увидят Францию. Очень интересно его наблюдение, что практически все детали и сложные выкладки в математике, которые он изучал, испарились из памяти, в то время как общие, фундаментальные принципы остались в ней такими же ясными, как всегда. То же справедливо относительно физики и механики.

В сентябре 1814 г. Понселе вернулся во Францию, привезя с собой «материал семи рукописных записных книжек, написанных в Саратове, в русском плену (с 1813 по 1814 г.), вместе с разными другими записями, старыми и новыми», в которых он, молодой человек 24 лет, дал проективной геометрии сильнейший толчок со времен Дезарга и Паскаля, положивших начало этой науке в XVII в. В первом издании его классического труда (1822) еще не было «апологии» (введения, касающегося жизни автора), но оно (сочинение) вызвало большое продвижение вперед в проективной геометрии, современной синтетической геометрии вообще и геометрическом истолковании «мнимых» чисел, которые наличествуют в алгебраических преобразованиях, придав таким «мнимостям» геометрическое представление как «идеальным» элементам пространства. В нем было предложено также плодотворное и (одно время) противоречивое «учение о непрерывности» (оно вскоре будет описано), которое очень упростило изучение геометрических конфигураций путем объединения кажущихся не связанными между собой свойств фигур в единообразное замкнутое в себе завершенное целое. Исключения и неуклюжие особые случаи с более широкой точки зрения Понселе оказываются лишь различными выражениями уже известных вещей. Классический трактат дает также широкое использование творческого «принципа двойственности» и вводит метод «взаимных преобразований», изобретенный самим Понселе. Коротко говоря, целый арсенал нового оружия был придан геометрии молодым военным инженером.

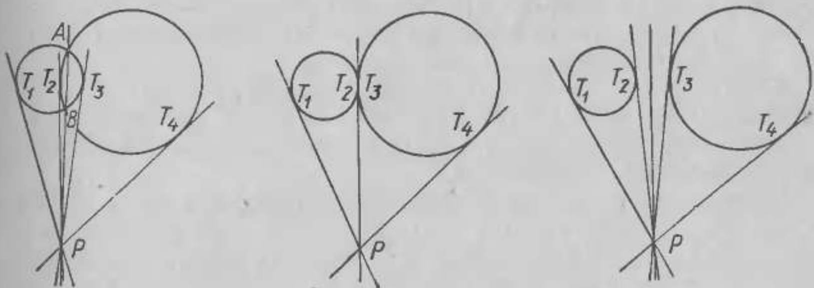
В следующие 10 лет (1815—1825) обязанности Понселе как военного инженера почти не оставляли ему времени для его истинного призвания — разработки новых методов в геометрии. Положение не менялось долгие годы. Исполнительность и работоспособность Понселе делали его легкой добычей недальновидных начальников. Некоторые из выполненных им заданий могли быть сделаны только деятелем его масштаба, например создание школы практической механики в Меце и реформа математического образования в Политехнической школе. Но донесения по фортификации, работа в Оборонной комиссии и председательство в секциях механики международных выставок в Лондоне и Париже (1851—1858), не говоря о многих других делах, могли бы вполне быть все поручены человеку «меньшего калибра». Однако его высокие научные заслуги не остались непризнанными. Его избрали в Академию наук (1831) в качестве преемника Лапласа. По политическим причинам Понселе в течение 3 лет уклонялся от такой чести.

Вся жизнь Понселе в зрелые годы была длительным внутренним конфликтом между той ее половиной, которая была рождена для постоянной научной деятельности, и той, которая принималась и аккуратно выполняла всякую постороннюю или черновую работу, подсовываемую политиками и военными властями. Сам Понселе стремился избежать этого, но ошибочное понимание долга, втолкованное ему в наполеоновской армии до мозга костей, побуждало его служить тени и поворачиваться спиной к существенному. То, что он не страдал ранним постоянным нервным расстройством, является замечательным свидетельством крепости его здоровья, а то, что он сохранил творческие способности почти до самой смерти (он умер в 79 лет), является блестящим доказательством неугасимости его гения. Когда не могли придумать ничего лучшего для использования времени этого великолепно одаренного человека, его посылали по всей Франции для осмотра хлопчатобумажных, шелкоткацких и льноткацких фабрик. Для этого не нужен был Понселе, и он знал это. Но он никогда не решался сказать, что его уникальный талант не был необходим в таких делах, так как был кем угодно, только не щепетильным интеллигентом, считающим, что наука утрачивает свою первозданную чистоту при рукопожатии с промышленностью.

Теперь бросим беглый взгляд на то или иное «оружие», изобретенное или воссозданное Понселе для завоевания проективной геометрии. Во-первых, это «принцип непрерывности», относящийся к неизменности геометрических свойств, когда одна фигура постоянно переходит в другую при прсектировании или как-нибудь иначе. Такое утверждение является, несомненно, довольно неопределенным, но формулировка самого Понселе этого принципа не была очень точной, и это, кстати говоря, впутывало его в бесконечные столкновения с более консервативными геометрами, которых он со всей вежливостью считал старыми окаменелостями. Оговорившись, что упомянутый принцип имеет большое эвристическое значение, но не всегда сам по себе обеспечивает доказательства теорем, на которые он наводит мысль, мы можем усмотреть кое-что из его духа на нескольких простых примерах.

Вообразим две пересекающиеся окружности. Пусть они пересекаются в точках A и B. Соединим эти точки прямой. Рисунок со всей наглядностью представляет две *действительные* точки A и B и общую секущую AB двух окружностей.

Теперь представим, что наши две окружности постепенно расходятся в сторону друг от друга. Общая секущая вскоре станет общей касательной к двум окружностям в точке их соприкосновения. Пока при любом положении окружностей верна следующая теорема (обычно она приводится как упражнение в школьных учебниках): какая бы точка P ни была взята на общей секущей, через нее можно провести *четыре* касательные к двум окружностям, и если точками их касания с окружностями являются T_1, T_2, T_3 и T_4, то тогда отрезки PT_1, PT_2, PT_3, PT_4 все равны между собой.



Наоборот, если спросить, где лежат *все* точки, такие, что 4 отрезка касательных, проведенных из них к двум данным окружностям, равны между собой, то ответ будет: *на общей секущей* к этим окружностям. Формулируя это короче на принятом в математике языке, мы говорим, что *геометрическое место точек* P, из которых проводятся четыре равных отрезка касательных к двум *пересекающимся* окружностям, есть общая секущая этих окружностей*. Все это хорошо известно и непосредственно видно. Здесь нет никакого элемента мистики или непостижимости, что некоторые могут усмотреть в дальнейшем, когда появится «принцип непрерывности».

Пусть окружности разошлись полностью. Две их точки пересечения (в последний момент слившиеся в одну точку их касания) теперь уже на рисунке не видны, а их «общая секущая» расположилась между двумя окружностями, не пересекая их *видимо*. Однако известно, что *геометрическое место точек*, о котором шла сейчас речь, все же существует, и легко доказать, что оно является прямой линией, перпендикулярной отрезку, соединяющему центры

---

* При этом касательные *действительны* (видимы), если точка P лежит *вне* окружностей; если P лежит *внутри* их, касательные являются *«мнимыми»* («воображаемыми»).

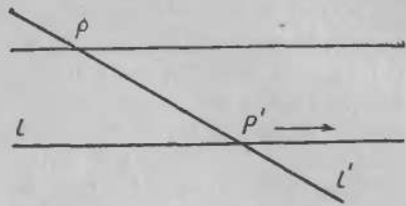
окружностей. Именно этим свойством обладало первоначальное геометрическое место точек (общая секущая). Как высказать свою мысль, если мы избегаем упоминания слова «мнимый»? Мы продолжаем *говорить*, что две окружности пересекаются в двух точках в бесконечно удаленной части плоскости даже тогда, когда они разошлись полностью, и *говорим* также, что новое геометрическое место точек, являющееся прямой линией, все еще есть общая секущая окружностей. Точки пересечения являются «мнимыми», «идеальными», а прямая линия, их соединяющая (новая «общая секущая»), является «действительной» — мы на самом деле вычерчиваем ее на бумаге.

Если мы записываем уравнения окружностей и прямых в алгебраическом виде по способу Декарта, то все, что мы делаем в алгебре при решении уравнений для нахождения точек пересечения, находит взаимно однозначное соответствие в расширенной геометрии, тогда как, если мы не расширим сперва нашу геометрию или по крайней мере не пополним ее словарь, чтобы учесть «идеальные» элементы, многое полное смысла в алгебре оказывается геометрически бессмысленным.

Все это, конечно, требует логического обоснования. Такое обоснование было дано постольку, поскольку оно необходимо, т. е. в такой мере, которая включает применение «принципа непрерывности», полезное в геометрии.

Более важный пример использования этого принципа дают параллельные прямые. Прежде чем описать этот случай, напомним высказывание одного почтенного и известного судьи, облегчившего свою душу, когда ему пытались раскрыть суть вопроса. Судья был в дурном настроении, и любитель математики, думая утешить старика, рассказывал ему кое-что о геометрическом понятии бесконечности. Они в это время гуляли по саду судьи. Когда судья услышал, что «параллельные линии пересекаются в бесконечности», он остановился как вкопанный и произнес с выразительностью: «Любой, кто утверждает, что параллельные линии пересекаются в бесконечности или где-либо еще, попросту потерял здравый смысл». Чтобы не ввязываться в спор, мы можем, как и раньше, сказать: это есть не что иное, как способ выражения, позволяющий избежать вызывающих раздражение исключений и подразделений на различные частные случаи. Но раз мы условились относительно языка, логическая согласованность требует, чтобы ему следовали до конца без отклонения от правил логической грамматики и синтаксиса, и именно это сделано.

Чтобы увидеть разумность такого языка, представим заданную прямую l и не находящуюся на ней данную точку P. Проведем через точку P прямую l', пересекающую l в точке P', и представим, что l' поворачивается вокруг P так, что P' удаляется вдоль l. Когда прекратится это удаление точки P? Мы говорим, что оно прекращается, когда l' и l становятся параллельными или, если предпочитаем это, когда точка пересечения P' находится в бесконечности. По указанным выше причинам такой язык является удобным и вызывающим мысли, — не о доме для сумасшедших, как мог думать судья, а о том, чтобы сделать интересные и иногда высокоценные в практическом отношении вещи в геометрии.



Подобным же способом видимые, *конечные* части прямых, плоскостей и трехмерного пространства (а также пространства большего числа измерений) дополняются «идеальными» точками, прямыми, плоскостями или «областями», находящимися *в бесконечности*, (или бесконечно удаленными). Вот поразительный пример поведения бесконечности в геометрии: *всякие две окружности на плоскости пересекаются в четырех точках, две из которых являются «мнимыми» и находятся в бесконечности*. Если окружности концентрические, они касаются друг друга в двух точках, лежащих на бесконечно удаленной прямой. Далее, *все* окружности на плоскости проходят через *одни и те же* две бесконечно удаленные точки.

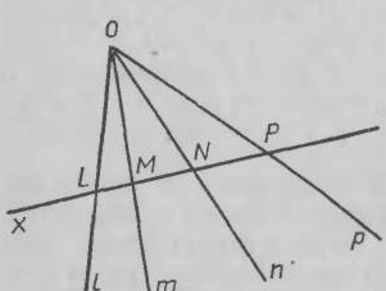
В главе о Паскале мы говорили, в чем отличие проективных свойств от метрических в геометрии. Сейчас стоит вскользь возвратиться к высказываниям Адамара об аналитической геометрии Декарта. Кроме двух вещей, Адамар заметил, что современная синтетическая геометрия оплатила долг общей геометрии и алгебре тем, что вызвала важные исследования в алгебре и анализе. Современная синтетическая геометрия была предметом исследований Понселе.

Хотя все это может казаться довольно запутанным в данный момент, мы замкнем цепь рассмотрений звеном, относящимся к 1840-м годам, поскольку вопрос действительно важен для истории не только чистой математики, но, и в той же мере, математической физики последнего времени.

Звено, относящееся к 1840-м годам, — это создание Булем, Кели, Сильвестром и другими алгебраической теории инвариантов, которая чрезвычайно важна для теоретической физики наших дней. Проективная геометрия Понселе и его школы сыграла существенную роль в развитии теории инвариантов. Геометры открыли целый океан свойств фигур, *инвариантных* относительно проектирования; алгебраисты 1840-х годов, особенно Кели, перевели геометрические *операции проектирования* на аналитический язык, применили этот перевод к *алгебраическому*, декартовому способу выражения геометрических отношений и обеспечили таким образом возможность добиться феноменально быстрого прогресса в разработке теории алгебраических инвариантов. Если бы Дезарг, смелый новатор XVII в., мог предвидеть, к чему должен привести его остроумный метод проекций, он мог бы сильно удивиться. Он знал, что сделал что-то значительное, но, вероятно, не представлял, насколько значительным оно должно оказаться.

Исаак Ньютон был молодым человеком 20 лет, когда умер Дезарг. Нет никаких сведений о том, что Ньютон когда-либо слышал о нем. Но если бы он и слышал, то также мог бы быть удивлен, если бы имел возможность предвидеть, что скромное звено, брошенное его старшим современником, должно образовать часть крепкой цепи, которой в XX в. предстояло свергнуть ньютонов закон всемирного тяготения с его, по общему мнению, вечного пьедестала. Без математической техники тензорного исчисления, которое естественно развилось из алгебраических трудов Кели и Сильвестра, представляется невероятным, чтобы Эйнштейн или кто-либо другой мог когда-нибудь пошатнуть ньютонову теорию тяготения.

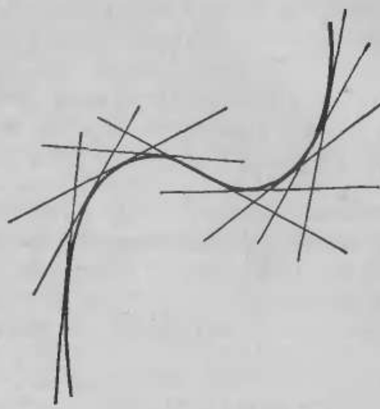
Одним из весьма полезных понятий проективной геометрии является понятие *ангармонического отношения*. Через точку O проведены четыре произвольные прямые l, m, n, p. Проводится произвольная прямая x, пересекающая эти четыре прямые, и точки пересечения, соответственно, обозначены L, M, N, P. На прямой x получаются таким образом отрезки LM, MN, LP, PN. Составим из них отношения $\frac{LM}{MN}$ и $\frac{LP}{PN}$, а затем возьмем отношение этих двух отношений $\frac{LM \cdot PN}{MN \cdot LP}$. Это и будет *ангармоническое отношение*. Его замечательное свойство состоит в том, что оно имеет одно и то же численное значение для *всех* положений прямой x.



Феликсом Клейном была проведена унификация геометрии, объединившая евклидову и неевклидову геометрии в одну, их объемлющую. Такая унификация стала возможной благодаря пересмотру, которому Кели подверг обычные понятия *расстояния* и *угла*, на которых основывается *метрическая* геометрия. В этом пересмотре ведущую роль играло ангармоническое отношение, позволившее Кели путем введения «идеальных» элементов его собственного образца свести *метрическую* геометрию к некоторому виду *проективной* геометрии.

Чтобы закончить это неполное описание того вида оружия, которым пользовался Понселе, упомянем об исключительно плодотворном «принципе двойственности». Для простоты мы рассмотрим лишь, как этот принцип действует в планиметрии.

Заметим прежде всего, что на всякую непрерывную кривую можно смотреть двояко: как на линию, порожденную движением точки, и как на огибающую поворачивающейся прямой линии. Чтобы понять последнее, представим, что в каждой точке кривой проведена касательная[1]. После этого *точки* и *прямые* оказываются тесно взаимосвязанными по отношению к кривой: *через* каждую *точку* кривой проходит *прямая* (касательная к кривой); *на* каждой *прямой* (касательной к кривой) имеется *точка* кривой. Два утверждения, разделенные точкой с запятой, взаимно превращаются друг в друга, если заменить слова «через», «точка» и «прямая» соответственно, на «на», «прямая» и «точка» и наоборот.



Чтобы сделать это соответствие универсальным, мы «присоединим» к обычной плоскости евклидовой геометрии (геометрии, изучаемой в школе), к так называемой *метрической плоскости*, «идеальные элементы» описанного выше типа. В результате этого присоединения получится *проективная плоскость*, состоящая из всех обычных точек и прямых метрической плоскости и добавленного к ним множества идеальных точек, которые все считаются лежащими на одной идеальной прямой, причем каждая из них лежит на соответствующей обычной прямой*.

На языке евклидовой геометрии мы можем сказать, что параллельные прямые имеют одно и то же направление в проективной геометрии. Это высказывание принимает вид: «две параллельные прямые проходят через одну и ту же идеальную точку». Далее, по-старому, если две или более прямых имеют одно и то же направление, они параллельны; по-новому, если две или более прямых проходят через одну и ту же идеальную точку, они параллельны. Каждая прямая линия в проективной плоскости представляется проходящей через *одну идеальную точку* («бесконечно удаленную точку»); *все* идеальные точки мыслятся образующими *одну идеальную прямую* («бесконечно удаленную прямую»).

Назначение этих понятий состоит в том, чтобы избежать утверждений евклидовой геометрии, имеющих характер исключений, вызванных постулированием существования параллельных прямых. Это уже отмечалось в связи с формулировкой Понселе принципа непрерывности.

После этих предварительных сведений можно сформулировать *принцип двойственности* в планиметрии: все утверждения проективной геометрии на плоскости образуются попарно так, что из

---

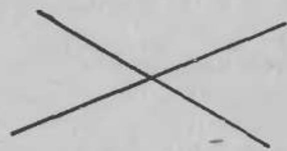
[1] Тем самым кривая предполагается не только непрерывной, но и гладкой (см. с. 59).

* Это определение и другие подобного характера, приводимые здесь, взяты из небольшой книги J. W. Young „Projective Geometry" (Chicago, 1930), доступной каждому, кто прошел обычный школьный курс геометрии.

одного из утверждений каждой пары можно непосредственно получить другое взаимной заменой слов *«точка»* и *«прямая»*.

В своей проективной геометрии Понселе использовал этот принцип до пределов возможности. Открыв почти любую книгу по проективной геометрии наугад, мы обратим внимание на страницы, где утверждения напечатаны в два столбца — по способу, введенному Понселе. Соответствующие утверждения таких двух столбцов двойственны друг другу, и, если доказано одно из них, доказательство другого излишне, так как оно внушается принципом двойственности. Так в геометрии одним приемом удваивается число предложений без затраты особого труда. В качестве примера двойственных высказываний приведем следующую их пару.

Две различные точки определяют единственную прямую

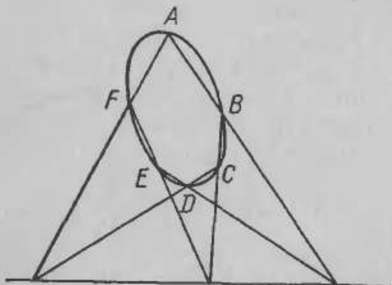


Две различные прямые определяют единственную точку

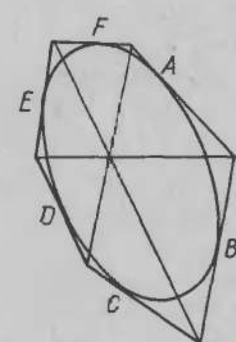
Это, пожалуй, не очень-то впечатляет. Гора родила мышь. Нельзя ли предложить что-нибудь более значительное?

В левом столбце приведена теорема Паскаля о *шестистороннике*, уже известная нам, а в правом — теорема Брианшона, *установленная* с помощью принципа двойственности. Брианшон (1785—1864) пришел к своей теореме, когда был студентом Политехнической школы; она была напечатана в журнале, издаваемом этой школой, в 1806 г.

Рисунки к этим двум теоремам выглядят совершенно несхожими между собой. Это может служить признаком мощи методов, использованных Понселе.



Если A, B, C, D, E, F — любые точки конического сечения, то точки пересечения пар прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой, и наоборот.



Если A, B, C, D, E, F — касательные к коническому сечению, то прямые, соединяющие точки пересечения пар прямых A с B и D с E, B с C и E с F, C с D и F с A, проходят через одну и ту же точку, и наоборот.

Открытие Брианшона утвердило принцип двойственности в геометрии. Значительно более эффективные примеры силы этого принципа можно найти в любом учебнике по проективной геометрии, особенно в связи с распространением принципа на обычное трехмерное пространство. При этом взаимно заменяемыми являются части, выражаемые словами *точка* и *плоскость*; *прямая* линия остается неизменной.

Обращающая на себя внимание красота проективной геометрии и изящность доказательств сделали ее любимым занятием геометров XIX столетия. Способные люди устремлялись на новое золотоносное поле и быстро снимали с него его более доступные сокровища. Теперь большинство специалистов как будто согласны с тем, что предмет разработан настолько, насколько он представляет интерес для профессиональных математиков. Тем не менее мыслится, что в нем все же может быть что-то такое же ясное, как и принцип двойственности, но это остается незамеченным[1]. Во всяком случае, он является легко изучаемым предметом и одной из очаровательных утех для любителей и даже для профессионалов на определенной стадии их деятельности. В отличие от некоторых других областей математики проективная геометрия счастливо располагает многими прекрасными учебниками и трактатами. Некоторые из них написаны первоклассными геометрами, включая самого Понселе.

---

[1] Другие формы принципа двойственности были установлены в XX столетии в различных областях математики, прежде всего в топологии, теории множеств и математической логике.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

КОРОЛЬ МАТЕМАТИКОВ

ГАУСС (1777—1855)

Дальнейшая разработка и развитие арифметики в ее систематизированном виде, как и почти всего, что дала математика нашего [девятнадцатого] столетия в области оригинальных научных идей, связано с Гауссом. — ЛЕОПОЛЬД КРОНЕКЕР

АРХИМЕД, НЬЮТОН И ГАУСС — эта тройка сама по себе выделяется в группу среди великих математиков. Все трое вызвали приливные волны в чистой и прикладной математике: Архимед ставил чистую математику гораздо выше ее приложений; Ньютон, кажется, находил главное оправдание своим математическим открытиям в той пользе, которую они приносили естествознанию; Гаусс же заявлял, что для него все равно, заниматься ли в направлении чистой или прикладной математики. Тем не менее Гаусс короновал высшую арифметику — наиболее далекую от практики в то время область математических исследований — царицей математики.

Происхождение Гаусса — короля математиков было далеко не королевским. Сын бедных родителей, он появился на свет в жалком сельском домике в Брауншвейге, в Германии, 30 апреля 1777 г. Дед Гаусса по отцу был бедным крестьянином. Трудная жизнь родившегося в 1744 г. его сына Герхарда Дидриха, работавшего садовником, смотрителем каналов и каменщиком, не была примечательной ни в каком отношении, не считая уникальной чести стать отцом Гаусса.

То, что мы знаем об отце Гаусса, позволяет представить его прямым, скрупулезно честным, грубоватым человеком, чья резкость в общении с сыновьями иногда граничила с жестокостью. Только ряд счастливых случайностей спас Гаусса от удела садовника или каменщика. Ребенком он был послушным и почтительным и хотя в дальнейшей жизни не порицал отца, но давал понять, что никогда не питал к нему особой привязанности. Герхард умер в 1806 г. К этому времени его сын, которого он упорно пытался обескуражить, завершил свое бессмертное сочинение.

С материнской стороны Гауссу действительно повезло. Отец его матери Доротеи Бенц был каменотесом, он умер тридцати лет.

Младший брат матери Фридрих, принужденный материальными недостатками стать ткачом, был в высшей степени разумным, добрым человеком, чей острый и беспокойный ум вторгался по собственному почину в области, далекие от его повседневных интересов. Обнаружив родственный ум у сына своей сестры, искусный дядя Фридрих оттачивал свой разум разумом юного гения и делал все, что мог для поощрения живой сообразительности мальчика.

Мать Гаусса приехала в Брауншвейг в 1769 г., она была решительная женщина с сильным характером, острым умом и изрядным чувством юмора. Тридцати четырех лет (в 1776 г.) она вышла замуж за будущего отца Гаусса и в следующем году родила сына. Его полное имя было Иоганн Фридрих Карл Гаусс (имя дяди сохранилось в имени благодарного племянника). Сын был гордостью матери с самого его рождения до ее смерти в возрасте 97 лет. Двухлетний вундеркинд, чей изумительный ум поражал всех, следивших за его развитием, даже превзошел надежды, которые он подавал в детстве. Доротея Гаусс стала на его сторону и одолела настояния упрямого мужа оставить сына таким же невежественным, как он сам.

Доротея надеялась и ждала от сына великих дел. Когда Гауссу было 19 лет, она спросила его друга Вольфганга Бойяи, достигнет ли когда-нибудь Гаусс чего-нибудь. Когда Бойяи воскликнул: «Это величайший математик Европы!» — она залилась слезами.

Последние 22 года своей жизни она провела в доме сына. Самого Гаусса мало беспокоила его слава, его триумфами жила его мать. Между ними всегда было полнейшее взаимопонимание; Гаусс вознаградил смелое покровительство матери в детстве тем, что обеспечил ей безмятежную старость.

Из многих происшествий, которые могли лишить Архимеда и Ньютона их собрата в математике, Гаусс вспоминает об одном случившемся с ним в младенчестве. Весенний разлив резко поднял воду в канале, и игравший на его берегу Гаусс был смыт водой. Лишь благодаря счастливой случайности он не утонул.

Во всей истории математики нет никого, кто приблизился бы к Гауссу по ранней одаренности. Неизвестно, в каком возрасте Архимед впервые проявил свой гений. Самые ранние проявления высочайшего математического таланта Ньютона вполне могли пройти незамеченными. Гаусс же, хотя это кажется невероятным, показал свою одаренность, когда ему не было еще трех лет. Как-то в субботу Герхард Гаусс составлял платежную ведомость для рабочих. Дойдя до конца своих длинных расчетов, Герхард с удивлением услышал: «Папа, вычисления неверны, должно быть...» Проверка показала, что число, названное младшим Гауссом, было правильным.

Еще раньше мальчик выспросил у родителей и их друзей, как произносятся буквы алфавита и самостоятельно научился читать. Никто не учил его арифметике, хотя, вероятно, вместе с алфавитом он получил сведения о значении цифр 1, 2, ... Впоследствии он любил шутить, что научился считать раньше, чем говорить.

Необыкновенные способности вычислять в уме были присущи ему всю жизнь. Вскоре после достижения 7 лет Гаусс пошел в свою первую школу, представлявшую собой убогий пережиток средневековья. В ней примерно сотню мальчиков обучал некий Бютнер, который запугивал их до предела. В такой адской дыре Гаусс нашел свое счастье.

В первые два года учебы не случилось ничего необычайного. Затем, на десятом году жизни, Гаусс начал проходить арифметику. Поскольку ей обучались начинающие, никто из мальчиков не слышал об арифметической прогрессии. Поэтому для Бютнера было легко дать детям длинную задачу на сложение, ответ к которой он мог найти по формуле в несколько секунд. Задача требовала выполнить сложение $81\,297 + 81\,495 + 81\,693 + \ldots + 100\,899$, где каждое следующее число отличается от предыдущего на одну и ту же величину (в данном случае на 198) и общее количество чисел дано (здесь 100).

Как только Бютнер дал задание, Гаусс подошел к его столу и положил на него свою грифельную доску с решением. Затем в течение часа, пока другие мальчики пыхтели над задачей, он сидел сложа руки. В конце урока Бютнер проверил доски. На доске Гаусса было написано только одно число. До конца своих дней Гаусс любил рассказывать, что это единственное число, написанное им на доске, давало правильный ответ, а все остальные ученики ошиблись. Ему никто не показывал до этого, каким способом такие задачи решаются быстро. Как только способ известен, это очень просто, но для 10-летнего мальчика найти этот способ мгновенно не так уж и просто.

Это открыло Гауссу дверь, через которую он пошел к бессмертию. Бютнер был так поражен тем, что сделал десятилетний мальчик без каких-либо указаний, что быстро искупил свои грехи и по крайней мере для одного из своих воспитанников стал гуманным учителем. На собственные деньги он купил самый лучший учебник арифметики, который смог достать, и подарил его Гауссу. Мальчик проглотил книгу. «Он превзошел меня, — сказал Бютнер, — я ничему больше не могу его научить».

Сам Бютнер не мог, вероятно, дать много юному гению. Но по счастливому случаю у учителя был помощник Иоганн Мартин Бартельс (1769—1836), молодой человек, влюбленный в математику. Между 17-летним помощником учителя и 10-летним школьником возникла сердечная дружба, которая продолжалась до конца жизни Бартельса. Они вместе занимались, помогая друг другу разобраться в трудных вопросах и расширяя доказательства в общем для них учебнике по алгебре и начаткам анализа.

Из этих ранних занятий развился один из научных интересов Гаусса, доминировавших в его деятельности. Он быстро овладел биномиальной теоремой:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3 + \ldots,$$

где n — не обязательно положительное целое число, n может быть любым числом. Если n не целое положительное, то ряд в правой части является *бесконечным* (продолжается без конца) и, для того чтобы выявить, когда этот ряд действительно равен $(1 + x)^n$, приходится исследовать, какие ограничения должны быть наложены на n и x, чтобы бесконечный ряд *сходился к определенному конечному пределу*. Так, если $x = -2$ и $n = -1$, то получаем абсурдный результат, что $(1-2)^{-1}$, равное $(-1)^{-1}$, т. е. $\frac{1}{-1}$ и, наконец, -1, равно $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$, и так *до бесконечности*, т. е. что -1 есть сумма бесконечного множества чисел $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$, что является бессмыслицей.

До того, как юный Гаусс не задал себе вопрос, сходится ли бесконечный ряд и действительно ли позволяет нам вычислять математические выражения (функции), для представления которых он используется, старшее поколение сведущих в анализе серьезно не беспокоилось о том, чтобы объяснить таинственность (и нелепость), появляющуюся из-за некритического употребления бесконечных процессов. Столкновение юного Гаусса с биномиальной теоремой вдохновило его на некоторые из величайших его трудов, и он стал первым среди проводников строгости в анализе.

Доказательство биномиальной теоремы, когда n не является целым числом, большим нуля, даже сегодня лежит за пределами элементарных учебников. Гаусс, не удовлетворенный тем, что он и Бартельс нашли в своем учебнике, дал доказательство. Это ввело его в математический анализ. Истинной сутью анализа является правильное употребление бесконечных процессов.

Так хорошо начатая работа должна была изменить весь вид математики. Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Лагранж, Лаплас — все великие аналитики своего времени практически не имели представления о том, что теперь считается доказательством, включающим в себя бесконечные процессы. Первым, кто ясно увидел, что «доказательство», которое может привести к абсурдным утверждениям, подобным тому, что «минус единица равна бесконечности», вовсе не является доказательством, был Гаусс. Даже если в *некоторых* случаях формула дает согласованные результаты, ей нет места в математике, пока не определены точные условия, при которых она продолжает оставаться согласуемой.

Строгость, внесенная Гауссом в анализ, постепенно распространилась на всю математику в результате подхода к этому как самого Гаусса, так и его современников Абеля и Коши[1], а также его последователей Вейерштрасса и Дедекинда; математика после Гаусса

[1] И Больцано (1781—1848).

стала совершенно отличной от математики Ньютона, Эйлера и Лагранжа.

В конструктивном смысле Гаусс был революционером. Еще до окончания школы тот же дух критицизма, который привел его к неудовлетворенности биномиальной теоремой, побудил его усомниться в доказательствах элементарной геометрии. В 12-летнем возрасте он уже косо смотрел на основания евклидовой геометрии; 16-ти лет его впервые озарил проблеск геометрии, отличной от евклидовой. Годом позже он начал критически исследовать доказательства в теории чисел, которые удовлетворяли его предшественников, и поставил себе исключительно трудное задание восполнить пробелы и *завершить* то, что было сделано лишь наполовину. Арифметика — предмет его самых ранних успехов — стала его любимым научным занятием, и здесь появился его шедевр. К своему верному чувству того, что составляет доказательство, Гаусс присовокупил богатую, никем не превышенную математическую изобретательность. Это сочетание оказалось непревзойденным.

Бартельс сделал для Гаусса больше, чем просто ввел его в тайны алгебры. Молодой учитель был знаком с некоторыми влиятельными людьми Брауншвейга. Теперь его делом стало заинтересовать их своей находкой. Они, в свою очередь, пораженные очевидной гениальностью Гаусса, обратили на него внимание Брауншвейгского герцога.

Герцог принял Гаусса в первый раз в 1791 г. Скромность и неуклюжая застенчивость 14-летнего мальчика покорили сердце герцога. Гаусс ушел от него с уверенностью, что его образование будет продолжено. В следующем году (в феврале 1792 г.) Гаусс был зачислен в Карлово училище (Collegium Carolinum) в Брауншвейге. Герцог платил за его обучение, пока оно не завершилось.

До поступления в училище в возрасте 15 лет Гаусс достиг больших успехов в изучении классических языков, занимаясь ими частным образом с помощью старших друзей. Блестящее владение им классическими языками изумило преподавателей и учащихся в училище.

Сам Гаусс был очень увлечен филологией, но, к счастью для науки, вскоре познал более побудительное влечение к математике. При поступлении в училище Гаусс уже свободно владел латынью, на которой написаны многие из его величайших трудов. Только по настоянию своих друзей-астрономов в Германии он написал некоторые свои астрономические работы по-немецки.

Гаусс обучался в училище 3 года, в течение которых он овладел наиболее важными трудами Эйлера, Лагранжа и более всего «Началами» Ньютона. Величайшая похвала великому человеку — та, которая исходит от другого такого же. Гаусс никогда не снизил оценки Ньютона, которая сложилась у него в 17-летнем возрасте. Другие — Эйлер, Лаплас, Лагранж, Лежандр — появляются в беглой латыни Гаусса с лестным эпитетом «*клариссимус*» (clarissimus — яснейший); Ньютон же у него *«суммус»* (summus — *величайший*).

Еще в училище Гаусс начал те исследования по высшей арифметике, которые обессмертили его имя. Его необыкновенные вычислительные способности теперь сильно пригодились. Занявшись непосредственно самими числами, он экспериментировал с ними, открывал по индукции глубокомысленные общие теоремы, доказательства которых даже ему стоили усилий. Именно таким способом он переоткрыл «жемчужину арифметики» — «золотую теорему» («theorema aureum»), к которой Эйлер также пришел индуктивно и которая известна как закон взаимности квадратичных вычетов. Гаусс был первым, кто доказал ее (попытка Лежандра доказать ее запятнана запутанностью).

Началом всего исследования явился простой вопрос, который задают себе многие новички в арифметике: сколько цифр содержится в периоде десятичной периодической дроби? Чтобы пролить на эту задачу некоторый свет, Гаусс вычислил десятичные представления для всех дробей вида $\frac{1}{n}$ при n от единицы до тысячи. Он нашел не то сокровище, которое искал, а нечто бесконечно большее — закон взаимности квадратичных вычетов. Поскольку он формулируется довольно просто, мы опишем его здесь, одновременно введя одно из изобретенных Гауссом улучшений в терминологии и записях в арифметике, которое произвело в ней коренную ломку, — именно понятие *сравнения*. Все числа в нижеследующем изложении являются целыми.

Если *разность* ($a - b$ или $b - a$) двух чисел a и b делится нацело на число m, мы говорим, что a и b сравнимы между собой по модулю m, и выражаем это символически, записывая $a \equiv b \pmod{m}$. Например, $100 \equiv 2 \pmod{7}$, $35 \equiv 2 \pmod{11}$.

Преимущество такой записи состоит в том, что она напоминает нам способ написания алгебраических уравнений, дает понятию арифметической делимости компактное представление и наводит на мысль попытаться перенести на арифметику (которая гораздо труднее алгебры) некоторые из операций, приводящих к хорошим результатам в алгебре. Например, мы можем «складывать» уравнения и обнаруживаем, что сравнения тоже можно «складывать», если они берутся по одному и тому же модулю; при этом получаются другие сравнения.

Пусть x обозначает неизвестное число, а r и m — данные числа, причем r не делится на m. Существует ли число x такое, что

$$x^2 \equiv r \pmod{m}?$$

Если такое число x существует, то r называется *квадратичным вычетом* m, если не существует — *квадратичным невычетом* m.

Если r есть квадратичный вычет m, то можно найти по крайней мере одно число x, квадрат которого при делении на m дает в остатке r. Если r — квадратичный невычет m, то не существует ни одного числа x, квадрат которого при делении на m дает в остатке r. Это непосредственные следствия данных выше определений.

Проиллюстрируем сказанное примером. Является ли число 13 квадратичным вычетом числа 17? Если да, то можно решить *сравнение* $x^2 \equiv 13 \pmod{17}$. Испытывая числа 1, 2, 3, ..., мы обнаружим, что числа $x = 8, 25, 42, 59, \ldots$ являются решениями ($8^2 = 64 = 3 \cdot 17 + 13$; $25^2 = 625 = 36 \cdot 17 + 13$; и т. д.). Таким образом, 13 является квадратичным вычетом 17. Однако сравнение $x^2 \equiv 5 \pmod{17}$ не имеет решения, так что 5 является квадратичным невычетом 17.

Теперь естественно задать вопрос: что представляют собой квадратичные вычеты и квадратичные невычеты данного числа m? Именно, пусть задано m в сравнении $x^2 \equiv r \pmod{m}$. Какие числа могут и какие не могут появляться вместо r, когда x пробегает все значения 1, 2, 3, ...?

Без больших трудностей можно показать, что вопрос сводится к случаю, когда r и m являются простыми числами. После этого можно переформулировать задачу: если p есть данное простое число, то какие простые числа q делают сравнение

$$x^2 \equiv q \pmod{p}$$

разрешимым? Вообще это значит спрашивать слишком много при современном состоянии арифметики. Тем не менее положение не является совершенно безнадежным.

Имеется изящная «взаимность» между *парами* сравнений

$$x^2 \equiv q \pmod{p}; \quad x^2 \equiv p \pmod{q},$$

в которых p и q — простые числа. Оба сравнения *разрешимы* или *оба неразрешимы* во всех случаях, кроме одного — когда как p, так и q при делении на 4 дают в остатке 3. В этом случае одно из сравнений разрешимо, а другое — нет. Это и есть закон взаимности квадратичных вычетов.

Его нелегко доказать. В самом деле, это не удалось сделать Эйлеру и Лежандру. Гаусс дал свое первое доказательство в возрасте 19 лет. Поскольку закон взаимности имеет фундаментальное значение в высшей арифметике и во многих отделах алгебры, Гаусс обращался к нему вновь и вновь в течение многих лет, стремясь найти его главные корни, пока не дал шесть различных доказательств теоремы, одно из которых опирается на построение с помощью циркуля и линейки правильных многоугольников.

Численные примеры разъяснят формулировку закона. Положим сперва $p = 5$, $q = 13$. Так как при делении на 4 оба эти числа дают остаток 1, оба сравнения

$$x^2 \equiv 13 \pmod{5} \text{ и } x^2 \equiv 5 \pmod{13}$$

или *разрешимы* или *неразрешимы* одновременно. В данном случае они оказываются неразрешимыми. Для чисел $p = 13$, $q = 17$, которые оба дают при делении на 4 остаток единицу, снова получаем, что сравнения

$$x^2 \equiv 17 \pmod{13}, \quad x^2 \equiv 13 \pmod{17}$$

или *оба* разрешимы или *оба* неразрешимы. Здесь они оба разрешимы: первое имеет решения $x = 2, 15, 28, \ldots$; второе $x = 8, 25, 42, \ldots$.

Нам теперь осталось рассмотреть случай, когда p и q оба дают при делении на 4 остаток 3. Возьмем $p = 11$, $q = 19$. Тогда согласно закону взаимности *только одно* из сравнений

$$x^2 \equiv 19 \pmod{11}, \quad x^2 \equiv 11 \pmod{19}$$

разрешимо. Первое сравнение не имеет решений, второе имеет решения $x = 7, 26, 45, \ldots$.

Открытие этого закона само по себе было выдающимся достижением. То, что он был впервые доказан 19-летним юношей, убедит каждого, кто попытается самостоятельно доказать его, что Гаусс был не просто человеком, хорошо знающим математику.

Когда Гаусс в октябре 1795 г. в возрасте 18 лет оставил училище, чтобы поступить в Гёттингенский университет, он все еще не решил, чему посвятить жизнь — математике или филологии. К этому времени он уже изобрел метод «наименьших квадратов», который теперь так необходим при геодезических съемках, при обработке наблюдений и действительно повсюду, где «наиболее вероятное» значение какой-нибудь измеряемой величины должно быть получено из большого числа измерений (наиболее вероятное значение получается путем сведения к минимуму суммы квадратов отклонений в пределах предполагаемой точности). Честь этого открытия Гаусс делит с Лежандром, который независимо от Гаусса опубликовал метод в 1806 г. Работа в этом направлении вызвала у Гаусса интерес к теории ошибок наблюдения. Закон Гаусса нормального распределения ошибок и соответствующая колоколообразная кривая теперь известны всем тем, кто имеет дело со статистикой.

День 30 марта 1796 г. стал поворотным пунктом в жизни Гаусса. В этот день, как раз за месяц до своего 19-летия, Гаусс окончательно сделал выбор в пользу математики. Изучение языков осталось на всю жизнь его любимым занятием на досуге.

Как уже было сказано в главе о Ферма, правильный семнадцатиугольник был тем жребием, который заставил Гаусса перейти свой Рубикон. В тот же день Гаусс начал вести свой научный дневник. Это один из ценнейших документов в истории математики. Первая запись в нем увековечивает его великое открытие.

Дневник вошел в научное обращение только в 1898 г., 43 года спустя после смерти Гаусса. Он состоит из девятнадцати небольших страниц и содержит 146 исключительно кратких записей об открытиях или результатах вычислений, последняя из которых датирована 9 июля 1814 г. Факсимильное воспроизведение рукописи было опубликовано в 1917 г. в десятом томе (часть 1) Собрания сочинений Гаусса вместе с исчерпывающим анализом ее содержания, проведенного несколькими сведущими редакторами. Не все открытия Гаусса этого плодотворного периода с 1796 по 1814 г. отмечены в дневнике. Но многие из тех, которые бегло очерчены в нем, достаточны для того, чтобы установить приоритет Гаусса в различных областях математики, например в изучении эллиптических функций — здесь некоторые его современники отказывались верить, что он предвосхитил их.

То, что оказалось похороненным на годы или десятилетия в дневнике, могло бы создать доброе имя полдюжине ученых, если бы было быстро опубликовано. Кое-что вообще не стало достоянием гласности при жизни Гаусса, и он никогда не претендовал в своих публикациях на то, что опередил других, которые сталкивались с ним. Однако записи свидетельствуют, что он опередил некоторых из тех, кто ставил под сомнение сообщения его друзей. Эти предвосхищения не были просто заурядными. Некоторые из них привели к более важным областям математики XIX в.

Некоторые заметки указывают на то, что дневник был сугубо личным делом их автора. Так, под 10 июля 1796 г. имеется запись:

$$\text{ΕΥΡΗΚΑ!}\ num = \Delta + \Delta + \Delta.$$

Она воскрешает в памяти восклицание Архимеда «Эврика!» и содержит утверждение, что всякое положительное целое число является суммой трех треугольных чисел, т. е. чисел последовательности 0, 1, 3, 6, 10, 15, ..., в которой каждый член (после нуля) представим в виде $\frac{1}{2}n \cdot (n - 1)$. Другим способом толкования того же является утверждение, что всякое число вида $8n + 3$ есть сумма трех нечетных квадратов: $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, $11 = 1^2 + 1^2 + 3^2$, $19 = 1^2 + 3^2 + 3^2$ и так далее. Доказать это сразу нелегко.

Смысл двух записей навсегда потерян для нас, остальные 144 большей частью достаточно ясны. Одна из них особенно важна — это запись от 19 марта 1797 г., показывающая, что уже Гаусс открыл двоякую периодичность некоторых эллиптических функций. Ему тогда не было еще 20 лет. Кроме того, более поздняя запись показывает, что Гаусс постиг двоякую периодичность и в общем случае. Одно это открытие, если бы он опубликовал его, могло бы сделать его знаменитым.

Почему Гаусс придерживал свои великие открытия? Это объяснить легче, чем его гений, — если воспринять его собственные простые заявления, о которых сейчас будет рассказано.

Говоря о себе, Гаусс заметил, что предпринимал свои научные исследования лишь по глубочайшему внутреннему побуждению, и для него было второстепенным вопросом, будут ли когда-нибудь они опубликованы для сведения других. Другое заявление, которое Гаусс сделал однажды своему другу, объясняет как дневник, так и медленность в публикациях. Он сказал, что, прежде чем ему исполнилось 20 лет, его ум обуревала такая несметная масса новых идей, что он едва мог охватить их и его времени хватало только для того, чтобы записать небольшую их часть. Дневник содержит лишь короткие формулировки конечных результатов, явившихся плодом проведенных исследований: некоторыми из них он занимался неделями. Размышляя, будучи юношей, над завершенными нерушимыми цепями синтетических доказательств, в которые Архимед и Ньютон заключили свое вдохновение, Гаусс решил следовать их великому примеру и оставить после себя лишь законченные произведения, настолько совершенные, что к ним ничего нельзя добавить и от них ничего нельзя убавить, не обезображивая целого. Работа сама по себе должна быть полной, простой и убедительной, без всякого следа затраченного на ее выполнение труда. Имея перед собой такой идеал, Гаусс предпочитал несколько раз шлифовать один шедевр, чем публиковать свободные наброски многих, что он легко мог бы сделать.

Плоды этого стремления к совершенству были действительно зрелыми, но не всегда удобоваримыми. Поскольку все следы того, каким путем достигалась цель, устранялись, последователям Гаусса было нелегко переоткрыть пройденный им путь. Соответственно, некоторые из его работ должны были ждать одаренных толкователей, прежде чем математики смогли в общем понять их, увидеть их значение для нерешенных проблем и пойти дальше вперед. Современники Гаусса просили его ослабить строгость холодного совершенства, чтобы математика могла быстрее продвигаться вперед, но Гаусс никогда не делал послаблений. Лишь спустя длительное время после его смерти стало известно, как много из математики XIX столетия предвидел и предвосхитил Гаусс ранее 1800 г. Если бы он разгласил все, что знал, вполне возможно, что математика теперь на 50 лет или более опережала бы нынешнее свое состояние. Абель и Якоби смогли бы начать с того, что забросил Гаусс, вместо того чтобы тратить многие свои самые утонченные усилия на переоткрытие того, что знал Гаусс еще до их рождения, а создатели неевклидовой геометрии могли бы обратить свой гений на другие вещи.

О себе Гаусс говорил, что он «во всем математик». Это верно, если учесть, что «математик» его дней включал также того, кого теперь можно назвать занимающимся математической физикой. Действительно, его девиз*:

> Ты, природа, моя богиня,
> И я служу твоим законам... —

точно резюмирует его жизнь, посвященную математике и естествознанию того времени. Его выражение «во всем математик» следует понимать в том смысле, что он не разбросал свой великолепный надел семян по всем полям, с которых мог снять изобильный

---

* Строки из «Короля Лира» Шекспира (акт 1, явление II) с существенной заменой: вместо «закону» — «законам».

урожай, в чем он упрекал Лейбница, а развивал свой величайший дар к совершенству.

Три года в Гёттингенском университете (октябрь 1795—сентябрь 1798) были наиболее плодотворными в жизни Гаусса. Он погрузился в работу. Друзей у него было немного. Один из них — Вольфганг (Фаркаш) Бойяи — стал другом на всю жизнь. Течение этой дружбы и ее значение в истории неевклидовой геометрии потребовали бы слишком много места для рассказа о них здесь. Сыну Вольфганга, Иоганну (Яношу), пришлось пройти практически тот же путь, которому следовал Гаусс, чтобы создать неевклидову геометрию в полном неведении того, что старый друг отца предвосхитил его[1]. Идеи, одолевавшие Гаусса с 17 лет, теперь частью были схвачены и приведены в порядок. С 1795 г. он замыслил большое сочинение по теории чисел. Теперь оно принимает определенную форму, и к 1798 г. «Арифметические исследования» (Disquisitiones Arithmeticae) были практически закончены.

Чтобы ознакомиться с тем, что уже было сделано в высшей арифметике, и увериться, что он предоставляет должный кредит своим предшественникам, Гаусс в сентябре 1798 г. отправился в Хельмштедт, где была хорошая математическая библиотека. Там он обнаружил, что его слава опередила его. Он был сердечно принят ведавшим библиотекой профессором математики Иоганном Фридрихом Пфаффом (1765—1825), в доме которого и поселился. Гаусс и Пфафф стали пылкими друзьями. Пфафф, очевидно, считал своим долгом узнать, чем занимается его трудолюбивый молодой друг, так как по вечерам они прогуливались, беседуя о математике. Поскольку Гаусс был не только скромным, но и сдержанным в рассказах о своих работах, Пфафф, вероятно, не узнал от него столько, сколько мог бы узнать. Гаусс чрезвычайно восхищался профессором (он был тогда самым известным математиком Германии) не только ввиду его превосходных работ, но и ввиду его открытого простого характера.

Осень 1798 г. Гаусс провел в Брауншвейге, совершая случайные поездки в Хельмштедт: он наносил заключительные мазки в «Арифметические исследования». Он надеялся на быстрое издание, но книга находилась в печати из-за трудностей у издателя в Лейпциге до сентября 1801 г.

Когда молодой гений, закончив Гёттингенский университет, стал беспокоиться о своем будущем, ему пришел на помощь герцог, который оплатил печатание его докторской диссертации (1799) и пожаловал стипендию, которая позволила ему продолжать научную деятельность.

---

[1] Независимо, оригинально, в значительно более разработанном виде неевклидову геометрию создал Н. И. Лобачевский (1792—1856), приступивший к публикации своих исследований с 1829 г. (Лобачевскому автор посвящает отдельную главу). Исследование Бойяи было опубликовано в 1832 г. Гаусс не только ничего не опубликовал по вопросам неевклидовой геометрии, но настоятельно противодействовал распространению сведений о том, что он ими занимается.

Прежде чем осветить «Арифметические исследования», мы коснемся диссертации, за которую Гаусс был удостоен заочно степени доктора Хельмштедтским университетом: «Новое доказательство теоремы о том, что всякая целая рациональная алгебраическая функция одной переменной может быть разложена на действительные множители первой или второй степени».

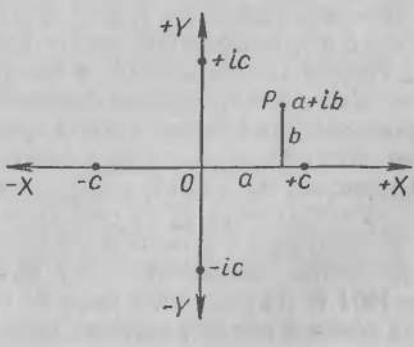
В диссертации, явившейся вехой в алгебре, лишь одно неверно. Первые два слова в названии могут создать впечатление, что Гаусс просто добавил *новое* доказательство к уже известным другим. Ему следовало опустить слово «новое». Его доказательство было *первым* (смысл этого будет разъяснен ниже). Некоторые математики до Гаусса публиковали то, что они считали доказательствами этой теоремы, обычно называемой основной теоремой алгебры, но никто из них не достиг цели[1]. С его бескомпромиссными требованиями к логической и математической строгости Гаусс настаивал именно на доказательстве и *дал* его впервые. Другая, эквивалентная формулировка теоремы состоит в том, что всякое алгебраическое уравнение с одним неизвестным имеет корень. Начинающие часто принимают это утверждение на веру, не имея даже отдаленного понятия, в чем его смысл.

Сомневаться в том, будто утверждение, что всякое алгебраическое уравнение имеет корень, что-либо значит, можно до тех пор, пока не сказано, *какой* именно корень имеет уравнение. Смутно мы чувствуем, что какое-то *число* будет удовлетворять уравнению, а не полфунта масла.

Гаусс превратил интуитивное представление в точное знание, доказав, что все корни любого алгебраического уравнения суть «числа» вида $a + bi$, где a и b — действительные числа (числа, которые соответствуют расстояниям — положительным, отрицательным и нулевому, — измеряемым от фиксированной точки O на данной прямой — оси x декартовой геометрии), а i есть квадратный корень из -1. Эти новые «числа» называются *комплексными*[2].

При этом Гаусс одним из первых дал связное последовательное объяснение комплексных чисел и интерпретировал их как точки плоскости, что принято теперь в элементарных учебниках алгебры.

Декартовы координаты точки P — это (a, b); точка P также изображает число $a + bi$. Таким образом, каждой точке плоскости соответствует одно и только одно комплексное число. Числа, соответствующие точкам на оси x, являются «действительны-



[1] Наиболее близким к цели было доказательство Даламбера (1746).

[2] При $b = 0$ они совпадают с действительными числами.

ми»; числа, соответствующие точкам на оси y, — «чисто мнимыми» (они имеют вид ic, где c — действительное число).

Слово «мнимый» — настоящее бедствие для алгебры, но для математиков оно настолько установилось, что не приходится его искоренять. Его не следовало бы использовать вообще. Книги по элементарной алгебре дают простое истолкование мнимых чисел в терминах вращений. Так, если умножение $i \cdot c$, где c — действительное число, истолковать как поворот вокруг точки O отрезка Oc на прямой угол (против часовой стрелки), то при этом Oc попадет на OY; еще одно умножение на i, именно $i \cdot i \cdot c$, повернет отрезок Oc еще на прямой угол, и, следовательно, в результате Oc повернется на два прямых угла, так что $+Oc$ станет $-Oc$. Как операция, умножение на $i \cdot i$ дает тот же результат, что и умножение на -1; умножение на i дает тот же результат, что и вращение на прямой угол, и эти истолкования (как мы сейчас видели) совместны. Если нам нравится, мы можем теперь написать $i \cdot i = -1$, или $i^2 = -1$, так что операция поворота на прямой угол описывается символом $\sqrt{-1}$.

Все это, конечно, ничего не доказывает. Оно и не означает доказательства чего-то. *Здесь нечего доказывать*. Мы просто *приписываем* символам и операциям алгебры *некоторые значения, какие бы то ни было*, приводящие к совместности. Хотя *истолкование* с помощью вращений ничего *не доказывает*, оно может навести на мысль, что здесь нет оснований для кого-либо суетливо приходить в состояние мистического удивления перед небытием ввиду чрезвычайно неудачного названия «мнимые». Относительно дальнейших подробностей мы должны сослаться на почти любой школьный учебник элементарной алгебры.

Гаусс считал теорему о том, что всякое алгебраическое уравнение имеет корень (в том смысле, который был сейчас разъяснен) столь важной, что дал четыре различных ее доказательства, причем последнее в 70-летнем возрасте. Сейчас иногда перемещают эту теорему из алгебры в анализ, ограничивая алгебру теми процессами, которые могут быть выполнены за конечное число шагов. Даже Гаусс *предполагал*, что график многочлена является непрерывной кривой и что если многочлен имеет нечетную степень, то график должен пересечь ось x по крайней мере один раз. Для любого новичка в алгебре это очевидно. Но теперь это *не является очевидным* и требует доказательства, а попытки провести доказательство снова приводят к трудностям, связанным с непрерывностью и бесконечностью. Даже корни такого простого уравнения, как $x^2 - 2 = 0$, не могут быть вычислены точно за любое конечное число шагов. Сейчас мы переходим к «Арифметическим исследованиям».

Это был первый из шедевров Гаусса, и некоторые считают его величайшим. Он явился прощанием с чистой математикой как с предметом исключительного интереса. После его опубликования в 1801 г. (Гауссу тогда было 24 года) он расширил свою активность, включив в нее астрономию, геодезию и учение об электромагнетизме как в математическом, так и в практическом аспекте. Но арифметика была его первой любовью, и он в дальнейшем всю жизнь сожалел, что не нашел времени написать второй том, который он замышлял молодым человеком. В книге 7 частей. Должна была быть и 8-я, но она опущена, чтобы снизить стоимость печатания.

Вводная фраза предисловия описывает общую направленность книги. «Исследования, содержащиеся в этом труде, относятся к той части математики, которая имеет дело с целыми числами, а также с дробями; иррациональные числа постоянно исключаются».

В первых трех частях излагается теория сравнений и, в частности, дается исчерпывающее рассмотрение двучленного сравнения $x^n \equiv A \pmod{p}$, где n и A — произвольные целые числа, а p — простое число; неизвестным целым числом является x. Изящная *арифметическая* теория имеет много сходства с соответствующей *алгебраической* теорией двучленного *уравнения* $x^n = A$, но в своих собственно арифметических частях несравненно богаче и труднее алгебраической; при этом алгебра не выявляет аналогий с арифметикой.

В четвертой части Гаусс развивает теорию квадратичных вычетов. Здесь находится первое опубликованное *доказательство* закона взаимности квадратичных вычетов. Доказательство является удивительным применением математической индукции и служит образцом изобретательной логики, повсеместной в книге.

В пятой части начинается теория *двойничных квадратичных форм*, рассматриваемая с арифметической точки зрения и вскоре сопровождаемая обсуждением *тройничных* квадратичных форм, которые оказываются необходимыми для завершения бинарной теории. Закон взаимности квадратичных вычетов играет фундаментальную роль в этих трудных свершениях. Для форм первого вида задача, названная общей, состоит в рассмотрении решения в целых числах x, y неопределенного уравнения

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m,$$

где a, b, c, m — данные целые числа. Для форм второго вида предметом исследования являются целочисленные решения x, y и z уравнения

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = m,$$

где a, b, c, d, e, f, m — данные целые числа. Выглядящим простым, однако на самом деле трудным вопросом в этой области является наложение необходимых и достаточных ограничений на a, c, f, m, которые обеспечивают существование целочисленного решения неопределенного уравнения

$$ax^2 + cy^2 + fz^2 = m.$$

Шестая часть заключает применения предыдущей теории к различным специальным случаям, например к целочисленным решениям уравнения

$$mx^2 + ny^2 = A, \quad \text{где } m,\ n,\ A \text{ — данные целые числа.}$$

В седьмой, последней части, которую многие считают венцом сочинения, Гаусс использует предшествующие результаты, особенно теорию двучленных сравнений, к замечательному рассмотрению алгебраического уравнения $x^n = 1$, где n — любое заданное целое число, в котором арифметика, алгебра и геометрия сплетаются вместе в образец особого совершенства. Уравнение $x^n = 1$ дает алгебраическую формулировку геометрической задачи построения правильного n-угольника или деления окружности на n равных частей (смотри любой повышенный учебник алгебры или тригонометрии). *Арифметическое сравнение* $x^n \equiv 1 \pmod p$, где m и p — данные целые числа, причем p — простое, является нитью, пронизывающей алгебру и геометрию и придающей упомянутому образцу простое значение. Это безупречное произведение искусства доступно пониманию любого студента, владеющего школьной алгеброй. Тем не менее «Арифметические исследования» не рекомендуются для новичков (сжатое изложение Гаусса было переработано позднейшими авторами и приобрело более удобочитаемую форму).

Многие части всего содержащегося в книге были сделаны иначе прежде — Ферма, Эйлером, Лагранжем, Лежандром и другими, но Гаусс дал трактовку всего со своей точки зрения, добавил много своего и вывел изолированные результаты своих предшественников из своих общих формулировок и решений относящихся сюда задач. Например, замечательный результат Ферма о том, что всякое простое число вида $4n + 1$ является суммой двух квадратов и что оно представляется такой суммой только одним способом, который Ферма доказал трудным методом «бесконечного спуска», следует естественным образом из общего рассмотрения Гауссом двойничных квадратичных форм.

«Арифметические исследования», — сказал Гаусс на склоне лет, — вошли в историю. И он был прав. Опубликованием этой книги высшей арифметике было придано новое направление, и теория чисел, которая в XVII и XVIII столетиях являлась разнообразным объединением не связанных между собой отдельных результатов, приобрела связность и поднялась до уровня математической науки наряду с алгеброй, анализом и геометрией.

Само сочинение было названо «книгой за семью печатями». Его трудно читать даже знатокам, но содержащиеся в нем сокровища, а также (частично скрытые) сжатые синтетические доказательства теперь доступны всем, кто пожелает овладеть ими, главным образом в результате трудов ученика и друга Гаусса Петера Густава Лежен Дирихле (1805—1859), который первым вскрыл «семь печатей».

Сведущие ценители признали шедевр таковым сразу же. Лежандр* в предисловии ко второму изданию своего трактата по тео-

* Адриен Мари Лежандр (1752—1833). Соображения об объеме книги исключают очерк о его жизни. Многое из его лучших трудов было поглощено или обойдено математиками младшего поколения.

рии чисел (1808), который во многих частях был превзойден «Исследованиями», относится к ним с энтузиазмом. Лагранж также похвалил их немедленно. В письме Гауссу от 31 мая 1804 г. он говорит: «Ваши «Исследования» сразу же возвысили Вас до уровня первых математиков, и я считаю, что последняя часть содержит самое красивое аналитическое открытие среди сделанных на протяжении длительного времени... Поверьте, сударь, что никто не аплодирует Вашему успеху более искренне, чем я».

Из-за классического совершенства стиля «Исследования» усваивались несколько медленно, и, когда, наконец, одаренные молодые люди начали глубоко изучать сочинение, его уже невозможно было достать, так как книготорговец обанкротился. Даже Эйзенштейн, любимый ученик Гаусса, так никогда и не имел своего экземпляра книги. Дирихле повезло больше. Его экземпляр сопровождал его во всех путешествиях, и он спал, положив его под подушку. Перед тем как ложиться, он осиливал какой-нибудь трудный параграф в надежде, часто исполнявшейся, что он пробудится ночью, чтобы обнаружить, что при повторном чтении все стало ясным. Именно Дирихле принадлежит изумительная теорема, упомянутая в связи с Ферма, о том, что всякая арифметическая прогрессия

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \ldots,$$

в которой a и b — целые числа, не имеющие общего делителя, большего единицы, содержит бесконечно много простых чисел. Она была доказана с помощью анализа, что само по себе является чудом, так как в теореме идет речь о целых числах, тогда как анализ имеет дело с *непрерывным нецелым*.

Перед тем как оставить эту область деятельности Гаусса, можно спросить, почему он никогда не брался за Последнюю теорему Ферма. Он сам дает ответ на это: «...теорема Ферма, как изолированное утверждение, представляет для меня очень небольшой интерес, так как я могу легко выдвинуть множество таких утверждений, которые никто не смог бы ни доказать, ни опровергнуть».

Дальше Гаусс говорит, что затронутый вопрос побудил его вспомнить некоторые свои старые идеи для значительного расширения высшей арифметики. Это, несомненно, относится к теории алгебраических чисел, которую предстояло развить независимо друг от друга Куммеру, Дедекинду и Кронекеру[1]. Но теория, которую держал в памяти Гаусс, является, заявляет он, одной из тех вещей, где невозможно предвидеть, какой прогресс будет сделан к отдаленной цели, которая лишь тускло видна сквозь мрак. Для успеха в таком трудном исследовании должна взойти чья-либо счастливая звезда, а обстоятельства у Гаусса теперь таковы, что из-за множества отвлекающих занятий он не может посвятить себя тем размышлениям, в какие он погружался «в счастливые 1796—1798 годы, когда у меня сформировались главные положения

[1] И Золотареву (см. примечание редактора на с. 134).

«Арифметических исследований». Я по-прежнему убежден, что если я настолько счастлив, что смею надеяться, и если я преуспею в свершении некоторых принципиальных шагов в такой теории, то тогда теорема Ферма появится как лишь одно из наименее интересных следствий».

Вероятно, все математики теперь сожалеют, что Гаусс был отклонен от шествия сквозь мрак «парой глыб грязи, которые мы называем планетами» (его собственные слова), засверкавших неожиданно в ночном небе и сбивших его с пути. Менее значительные, чем Гаусс, математики, например Лаплас, могли бы сделать все, что сделал Гаусс в вычислении орбит Цереры и Паллады, даже если задача была того типа, о которых Ньютон говорил, что они относятся к труднейшим в математической астрономии. Однако блестящий успех Гаусса в этих вопросах принес ему немедленное признание первым математиком Европы и благодаря этому обеспечил ему уютное положение, в котором он мог сравнительно спокойно работать в конце концов; глыбы грязи, возможно, стали в итоге счастливыми звездами.

Второй большой период деятельности Гаусса начался в первый день XIX столетия — красный день истории философии и истории астрономии. С 1781 г., когда сэр Вильям Гершель (1738—1822) открыл планету Уран, доведя таким образом число известных тогда планет до удовлетворявшего философов числа 7, астрономы прилежно исследовали небеса в поисках следующих членов солнечной семьи, которые, согласно закону Боде, ожидались между орбитами Марса и Юпитера. Поиски были бесплодными, пока Джузеппе Пияцци (1746—1826) из Палермо в первый день XIX в. не заметил объект, который вскоре был признан новой планетой, позже названной Церерой, первой в семействе малых планет, известных теперь.

Крайне удивительно, что открытие Цереры совпало по времени с публикацией знаменитым философом Гегелем (1770—1831) саркастической нападки на астрономов, осмелившихся искать восьмую планету. Если бы они уделяли внимание философии, утверждал Гегель, они должны были бы сразу уяснить, что планет может быть ровно семь, не больше и не меньше. Их поиски поэтому являются глупой тратой времени. Несомненно, ученики Гегеля сносно объяснили этот досадный промах с его стороны, но они все еще не высказались о сотнях других малых планет, которые высмеивают запрет, указанный их Юпитером.

Здесь будет интересно процитировать мнение Гаусса о философах, занимающихся вопросами естествознания, которых они не поняли. Оно, в частности, остается в силе для тех философов, которые долбят основания математики, не заострив предварительно свои тупые клювы на каких-либо трудных вопросах математики. С другой стороны, оно указывает, почему Бертран А. В. Рассел (1872—1970), Альфред Норт Уайтхед (1861—1947) и Давид Гильберт (1862—1943) в свое время внесли столь большой вклад в философию математики — это ученые-математики[1].

В письме своему другу Шумахеру от 1 ноября 1844 г. Гаусс говорит: «Вы видите одну и ту же вещь [математическую некомпетентность] у современных философов — Шеллинга, Гегеля, Неес фон Ессенбека и их последователей; разве ваши волосы не встают дыбом от их определений? Но даже с самим Кантом часто дело обстоит ненамного лучше; по моему мнению, его различение аналитических и синтетических утверждений является одной из тех вещей, которые либо сводятся к тривиальности, либо являются ложными». Когда это писалось, Гаусс уже давно владел неевклидовой геометрией, которая сама по себе является достаточным опровержением некоторых утверждений Канта о «пространстве» и геометрии, и он мог невольно высказываться презрительно.

Из одного этого примера, касающегося чисто математических тонкостей, не следует делать заключение, что Гаусс не ценил философию. Наоборот. Все философские достижения производили на него большое впечатление, хотя он часто не одобрял средства, которыми они были достигнуты. «Существуют проблемы, — сказал он однажды, — решению которых я придал бы неизмеримо большее значение, чем решению проблем математики, например касающиеся этики или нашего отношения к богу, нашей судьбы и нашего будущего; но их решение нам не по силам, и оно полностью лежит за пределами естествознания».

Церера была для математики бедствием. Чтобы понять, почему она была принята Гауссом с такой опустошающей серьезностью, надо вспомнить, что колоссальная фигура Ньютона, который умер более 70 лет до этого, все еще маячила над математикой в 1801 г. «Великими» математиками того времени были те, кто, подобно Лапласу, трудились над завершением ньютоновского здания небесной механики. Математика все еще смешивалась с математической физикой — такой, какой она была тогда, — и математической астрономией. Взгляд на математику как на самостоятельную науку, присущий Архимеду в III столетии до н. э., был утерян в блеске ньютоновского великолепия. Так было до тех пор, пока юный Гаусс не уяснил, что математика была признана как наука, первым долгом которой является заниматься собственными проблемами. Однако Церера соблазнила беспримерный ум Гаусса, когда ему было 24 года, как раз в тот момент, когда он был готов сделать большой шаг в нехоженые дебри, которым предстояло стать просторами современной математики.

Мы должны бранить не только Цереру. Великолепный дар в устных вычислениях, которые привели к эмпирическим открытиям, породившим математику «Арифметических исследований», также играл фатальную роль в трагедии. Друзья Гаусса, а также его отец, потеряв терпение ждать, когда он займет какой-нибудь до-

[1] Отметим, что в своей философии названные ученые были проводниками идеалистических, метафизических взглядов.

ходный пост, не имея понятия о сути той работы, которая сделала Гаусса молчаливым затворником, думали, что он помешался. Теперь, на заре нового столетия, удобный случай, которого недоставало Гауссу, был навязан ему.

Новая планета была открыта в таком положении, которое было чрезвычайно трудным для наблюдений за ней. Вычислить орбиту по скудным имевшимся данным было задачей, которую мог бы одолеть сам Лаплас. Ньютон заявлял, что такие задачи относятся к наиболее трудным в математической астрономии. Одни только вычисления, необходимые для установления орбиты с точностью, достаточной, чтобы увериться, что Церера при вращении вокруг Солнца не будет утеряна для телескопов, могли бы извести электромеханическую счетную машину даже теперь. Но для молодого человека с непостижимой памятью, позволявшей ему обходиться без таблицы логарифмов, когда ему было трудно или лень достать ее, вся эта бесконечная арифметика — *логистика*, не *арифметика* — была детским развлечением.

Почему не дать волю милой страсти повычислять так, как никогда не вычислял раньше, продолжить определение трудной орбиты к искреннему восхищению и удивлению законодателей математической моды и таким образом сделать возможным для терпеливых астрономов год спустя снова обнаружить Цереру в том самом месте, где ньютоновский закон всемирного тяготения *предписывает* ей быть найденной, *если* этот закон действительно есть закон природы? Почему бы не сделать все это, повернувшись спиной к не имевшему существенного значения взгляду Архимеда и забыть свои собственные непревзойденные открытия, которые ждут дальнейшего развития, сохраняясь в дневнике? Короче, почему бы не стать популярным? Почет, признание, включение в «великие» математики в общепринятом в то время смысле и, вероятно, следующая за этим финансовая независимость — все это было теперь для него легко достижимым. Гаусс, математический бог всех времен, протянул руку и сорвал искушавший его плод дешевой славы.

Почти 20 лет возвышенные мечты, беглые наброски которых Гаусс юношей занес в свой дневник с необузданной радостью, лежали заброшенными, но все же не забытыми. Церера была переоткрыта точно в том месте, которое предсказали изумительно искусные подробные вычисления молодого Гаусса. Вскоре неугомонными телескопами были пойманы, вопреки Гегелю, Паллада, Веста и Юнона — младшие сестры маленькой Цереры, и их орбиты также оказались в согласии с вдохновенными вычислениями Гаусса. Вычисления, для выполнения которых Эйлеру потребовалось бы три дня и одно из которых якобы привело его к слепоте, теперь стали простыми упражнениями на несколько часов. Гаусс указал *метод*, и дело стало рутинным. В течение почти 20 лет бо́льшую часть своего времени он посвящал астрономическим вычислениям.

Но даже такая убийственная работа не могла стерилизировать творческий гений Гаусса. В 1809 г. он опубликовал свой второй шедевр — «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям», в котором исчерпывающее рассмотрение определения планетных и кометных орбит по данным наблюдений, включая трудный анализ возмущений, стало основой канона, который многие годы господствовал в вычислительной и практической астрономии. Это был великий труд, но не такой великий, какой Гаусс легко мог создать, развив наметки, содержавшиеся в его дневнике. Никакого существенно нового *математического* открытия «Теория движения» не включала.

Признание пришло с показательной быстротой после переоткрытия Цереры. Лаплас сразу приветствовал молодого математика как равного себе, а вскоре — как превзошедшего его. Немного позже, когда Александр фон Гумбольдт (1769—1859) — знаменитый путешественник и любитель наук — спросил Лапласа, кто является величайшим математиком Германии, Лаплас ответил: «Пфафф». — «А как же с Гауссом?» — удивился Гумбольдт. — «О, — сказал Лаплас, — Гаусс — это величайший математик мира».

Десятилетие, последовавшее за эпизодом с Церерой, принесло Гауссу много счастья и много печали. Даже в этот ранний период его деятельности нашлись люди, умалявшие его успехи. Лица с положением, привлекавшие внимание образованной публики, осмеивали 24-летнего молодого человека за напрасную трату времени на такое бесполезное занятие, как вычисление орбиты малой планеты. Они так же осмеивали Гаусса 30 лет спустя, когда он заложил основы математической теории электромагнетизма и изобрел электрический телеграф. Гаусс позволял им получать удовольствие от своих острот. Он никогда не отвечал им публично, но в частном порядке выражал сожаление, что почтенные люди и жрецы науки могут так мелочно унижаться. Тем временем Гаусс продолжал свою работу, благодарный научным обществам Европы за воздаваемые ему почести, но не отклоняясь от выбранного пути.

Герцог Брауншвейгский увеличил содержание молодого ученого и тем самым сделал возможным его брак. Он женился 9 октября 1805 г. в возрасте 28 лет на Иоганне Остхоф из Брауншвейга. В письме давнему университетскому другу Вольфгангу Бойяи через три дня после обручения Гаусс изливает переполнявшее его счастье: «Жизнь предстает передо мной как вечная весна, в новых, ярчайших красках».

От этого брака родилось трое детей. Иоганна умерла 11 октября 1809 г., оставив Гаусса безутешным. Его вечная весна обратилась в зиму. Хотя Гаусс в следующем году (4 августа 1810 г.) снова женился ради своих маленьких детей, долгое время он не мог без глубокого чувства говорить о своей первой супруге. От второй жены, Минны Вальдек, которая была близкой подругой первой, он имел двух сыновей и дочь.

В 1808 г. умер отец Гаусса. Двумя годами раньше Гаусс испытал еще более тяжкую потерю: при трагических обстоятельствах умер его благодетель — герцог. Как и Декарт, в раннем детстве Гаусс испытал страх смерти, и всю жизнь потеря близких друзей наполняла его душу гнетущим чувством.

Теперь, когда умер его великодушный патрон, Гаусс должен был найти какой-то надежный способ для обеспечения содержания семьи. Он не встретил в этом трудностей, так как слава его распространилась уже по всей Европе. Петербург закинул удочку: не хочет ли Гаусс стать преемником Эйлера, которому еще не было достойной замены после его смерти в 1783 г. В 1807 г. Гауссу было сделано более определенное лестное предложение. Александр фон Гумбольдт и другие влиятельные друзья, не желая, чтобы Германия теряла величайшего математика мира, взялись за дело, и Гаусс был назначен директором Гёттингенской обсерватории с привилегией (или обязанностью, если угодно) читать лекции по математике студентам университета.

Несомненно, Гаусс мог получить профессуру по математике, но он предпочел обсерваторию, так как это создавало лучшие перспективы для непрерывных научных исследований; хотя, может быть, было бы слишком сильно сказать, что Гаусс ненавидел преподавание, но натаскивание заурядных студентов не приносило ему удовольствия, и, лишь когда его находил истинный математик, Гаусс, сидя у стола вместе со своими студентами, разрешал ему войти и раскрывал секреты своих методов в прекрасно подготовленных лекциях. Но это, к сожалению, случалось очень редко, и большинству студентов, на которых Гаусс тратил свое бесценное время, следовало бы заниматься не математикой, а чем-нибудь другим. В письме 1810 г. своему близкому другу, астроному и математику Фридриху Вильгельму Бесселю (1784—1846), Гаусс сообщает: «Этой зимой я читал два курса лекций трем студентам, из которых один обладает средними знаниями, другой — менее, чем средними, а третий лишен и знаний и способностей. Таковы тяготы профессии математика».

Жалованье, которое Гёттинген мог выплачивать Гауссу, было скромным, но достаточным для удовлетворения нехитрых потребностей Гаусса и его семьи.

Но если Гаусс был простым и бережливым, то вторгшиеся в 1807 г. в Германию французы были еще проще и бережливее. Они наложили на побежденных громадную контрибуцию. Завоеватели сочли, что профессор астрономии Гёттингена вполне может внести 2000 франков в военную кассу Наполеона. Эта несоразмерная сумма далеко превосходила возможности Гаусса.

Вскоре Гаусс получил письмо от своего друга, астронома Ольберса, в которое была вложена указанная сумма побора — налога. Гаусс отказался принять деньги и сразу же отослал их обратно.

Вскоре он получил небольшую дружескую записку от Лапласа, в которой сообщалось, что знаменитый французский математик уплатил 2000 франков налога за величайшего математика мира и счел для себя честью оказаться способным снять с плеч друга незаслуженное бремя. Поскольку Лаплас оплатил налог в Париже, Гаусс не мог вернуть ему деньги. Тем не менее он отклонил помощь Лапласа. Неожиданная и непрошенная удача вскоре позволила ему выплатить долг Лапласу с процентами. Стало известно, что Гаусс с презрением отнесся к милостыне, и какой-то его почитатель из Франкфурта анонимно прислал ему 1000 гульденов. Так как Гаусс не мог выявить пославшего, он оказался вынужденным принять дар.

Смерть герцога, скверное положение дел в Германии, разграбливаемой французами, финансовые затруднения, потеря первой жены — все это сказалось на здоровье Гаусса и сделало его жизнь несчастной в 30 лет с небольшим. Наследственное предрасположение к ипохондрии, усугубленное непрестанным переутомлением, не улучшало дела. Он никогда не делился своими горестями с друзьями, для которых он всегда безмятежный корреспондент, но он доверился — только однажды — одной своей личной математической рукописи. После своего назначения директором обсерватории в Гёттингене в 1807 г. Гаусс в течение трех лет иногда возвращался к одной из самых великих вещей, отмеченных в его дневнике. В рукописи по эллиптическим функциям чисто научные рассуждения внезапно прерываются тщательно выписанными карандашом словами: «Смерть милее мне, чем такая жизнь». Его лекарством стала работа.

Годы 1811—1812 (Гауссу в 1811 г. было 34 года) были более светлыми. С новой женой, заботившейся о его маленьких детях, он стал обретать некоторый покой. Затем Гаусс впервые наблюдал в глубоких сумерках вечером 22 августа большую комету 1811 г., вспыхнувшую неожиданно. Она оказалась достойным противником в проверке оружия, изобретенного Гауссом для покорения малых планет.

Оружие оказалось соответствующим требованиям. Пока суеверные народы Европы с благоговейным трепетом следили за ярким зрелищем, Гаусс с удовлетворением смотрел на комету, точно следовавшую по пути, быстро рассчитанному им для нее. Доставляет удовлетворение отметить то, что Гаусс был слишком горд, чтобы унизить математику перед Наполеоном Великим, взывая к тщеславию императора и упрашивая его во имя его пресловутого уважения ко всему математическому уменьшить налог в 2000 франков, что Гаусса побуждали сделать некоторые заблуждавшиеся друзья. Гаусс чувствовал, что и ему самому и математике, которую он почитал, будет лучше обойтись без снисхождения Наполеона.

Не считая довольно поверхностного понимания ценности математики для военного дела, Наполеон не имел никакого представления о той математике, которой занимались ученые такого ранга, как его современники Лагранж, Лаплас и прежде всего Гаусс. Быстро изучив в школе обычную элементарную математику, Наполеон слишком рано обратился к другим вещам, чтобы подтвердить свои надежды, и так и не созрел как математик. Хотя кажется невероятным, чтобы человек со способностями, проявленными Наполеоном, мог столь явно недооценивать трудность предметов, лежащих за пределами его понимания, чтобы свысока относиться к Лапласу, остается фактом, что со смехотворной смелостью он заверял автора «Небесной механики», что прочел бы его книгу в течение *первого свободного месяца*, который представился бы ему. Ньютону и Гауссу задание было бы впору; Наполеон же, несомненно, мог перелистать за месяц страницы книги Лапласа, не очень утомляя себя.

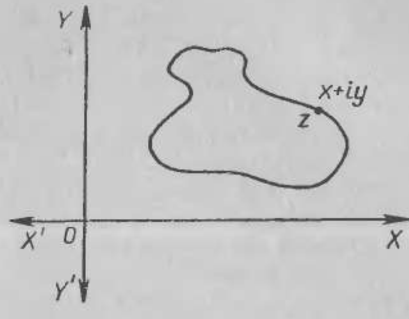
Невозможно найти более резкой противоположности между математиком и военным гением, чем та, которую доставляет их соответствующее отношение к сломленному противнику. Наполеон вульгарно и с ненужной грубостью обошелся с побежденным герцогом. Когда же пал Наполеон, Гаусс не стал ликовать. Спокойно, с беспристрастным интересом он читал все, что мог найти о жизни Наполеона, и поступал наилучшим образом, чтобы понять дела умов, подобных наполеоновскому. Его усилия в этом доставляли ему даже значительное развлечение. Гаусс обладал острым чувством юмора и грубоватым реализмом, унаследованными от его предков, тружеников-крестьян, что также позволяло ему легко пренебрегать героикой.

1811 год, возможно, был вехой в математике, сравнимой с вехой 1801 г. — появлением «Арифметических исследований»: Гаусс сообщил публично о своем открытии, в которое ранее посвятил Бесселя. Основательно поняв комплексные числа и их геометрическое представление как точек плоскости в аналитической геометрии, Гаусс предложил себе проблему исследования того, что теперь называется *аналитическими функциями* комплексной переменной. Комплексное число $x + iy$, где i обозначает $\sqrt{-1}$, представляет собой точку с декартовыми координатами (x, y). Обозначим $x + iy$ для краткости одной буквой z. Когда x и y независимо принимают действительные значения каким-нибудь предписанным непрерывным способом, точка z перемещается по плоскости, очевидно, не наугад, а способом, определяемым тем, как x и y предписываются их значения. Всякое выражение, содержащее z, скажем z^2, $\frac{1}{z}$ и так далее, принимающее *единственное* определенное значение для каждого предписанного значения z, называется *однозначной функцией* z. Будем обозначать такую функцию символом $f(z)$. Так, если $f(z)$ есть, в частности, функция z^2, так что

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

(так как $i^2 = -1$), то ясно, что если z, т. е. $x + iy$, приписывается какое-нибудь значение, например $x = 2$, $y = 3$, так что $z = 2+3i$, то тем самым определяется точно одно значение функции $f(z)$; в данном случае при $z = 2 + 3i$ получаем $z^2 = -5 + 12i$.

Не все однозначные функции $f(z)$ изучаются в теории функций комплексной переменной: для исчерпывающего рассмотрения отбираются *моногенные* функции. Оправдание этого будет изложено после того, как мы опишем, что означает такой термин.



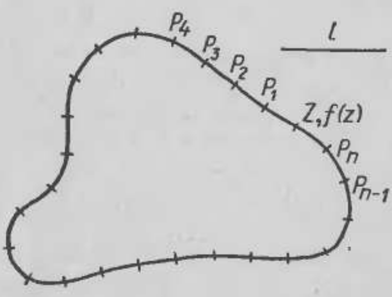
Пусть z движется к другому положению, скажем к z'. Функция $f(z)$ при этом принимает другое значение $f(z')$, получаемое подстановкой вместо z значения z'. *Разность* $f(z') - f(z)$, нового и старого значений функции теперь поделим на разность нового и старого значений переменной z и получим выражение $\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$, затем точно так же, как это делалось при вычислении наклона графика, чтобы найти производную функции, представляемой графиком, пусть здесь z' неограниченно приближается к z. Однако при этом появляется замечательное новое явление.

Здесь имеется не один путь, по которому z' может двигаться до совпадения с z; z' может странствовать по всей плоскости комплексных чисел по любому из бесконечного множества различных путей, прежде чем совпадет с z. Нельзя ожидать, что предельное значение отношения $\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$, когда z' совпадает с z, будет *одним и тем же для всех* этих путей; в общем случае этого нет. Но если $f(z)$ такова, что только что описанное предельное значение является одним и тем же для *всех* путей, по которым движется z' до совпадения с z, тогда говорят, что $f(z)$ моногенна в z (или в точке, представляющей z). *Однозначность*, описанная выше, и *моногенность* являются отличительными свойствами *аналитических* функций комплексной переменной.

Некоторое представление о важности аналитических функций можно получить из того факта, что обширные трактаты по теории движения жидкостей (а также по математическим основам учения об электричестве и о построении карт, в которых не искажаются углы) естественно базируются на теории *аналитических* функций комплексной переменной. Предположим теперь, что в такой функции $f(z)$ выделена ее «действительная» часть (та, которая не содержит мнимой единицы i) и ее «мнимая» часть; скажем, $f(z) = U + iV$. В частности, для аналитической функции z^2 имеем $U = x^2 - y^2$, $V = 2xy$. Вообразим слой жидкости, текущей по плоскости. Если движение жидкости происходит без завихрений, его линии тока находятся с помощью *некоторой* аналитической функции $f(z)$ путем вычерчивания кривых $U = a$, где a — любое действительное число, а эквипотенциальные линии подобным же образом — как кривые $V = b$ (b — любое действительное число). Для заданного состояния, скажем для жидкости, обтекающей препятствие, трудность задачи состоит в том, чтобы найти, какую следует выбрать аналитическую функцию для этого. Весь вопрос большей частью решали обратным путем: изучали простые аналитические функции и выискивали физические задачи, которым они соответствуют. Довольно любопытно, что многие из этих искусственно заготовленных задач сослужили величайшую службу в аэродинамике и в других практических применениях теории движения жидкости[1].

Теория аналитических функций комплексной переменной была одной из важнейших областей торжества математики в XIX в. Гаусс в письме к Бесселю излагает то, что равнозначно основной теореме этой обширной теории, но он скрыл это, и теорема была переоткрыта Коши и позже Вейерштрассом. Поскольку она является вехой в истории математического анализа, мы кратко охарактеризуем ее, опуская все уточнения, которые потребовались бы при строгой формулировке.

Представим, что комплексная переменная z движется по замкнутой кривой конечной длины без самопересечений. Мы имеем интуитивное понятие о том, что подразумеваем под «длиной» части такой кривой. Пометим на кривой n точек $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ так, чтобы длина каждой из дуг $P_1 P_2, P_2P_3, P_3P_4, \ldots, P_n P_1$ не превышала некоторой предписанной конечной длины l. На каждой из дуг выберем точку (только не на ее концах), найдем значение



функции $f(z)$ при значении z, соответствующем этой точке, и умножим это значение на длину дуги, на которой лежит точка. То же сделаем для всех дуг и сложим результаты. Наконец, найдем предел этой суммы, когда число дуг неограниченно возрастает[2]. Это дает *криволинейный интеграл* от $f(z)$ вдоль данной кривой.

Когда этот криволинейный интеграл будет равен нулю? Для того чтобы криволинейный интеграл был равен нулю, достаточно, чтобы функция $f(z)$ была *аналитической* (однозначной и моногенной) в каждой точке z рассматриваемой кривой и внутри ее. Это и есть великая теорема, которую Гаусс сообщил Бесселю в 1811 г.

---

[1] И газа. Принципиальное значение в этом имеют исследования Н. Е. Жуковского (1847—1921) и С. А. Чаплыгина (1869—1942), которые одними из первых применили для решения важнейших задач гидро- и аэродинамики методы теории функций комплексного переменного. Созданием теории крыла самолета они заложили теоретические основы воздухоплавания. Чаплыгин явился также основоположником газовой динамики, получившей в последние десятилетия важнейшие практические применения в скоростной авиации и ракетной технике. При этом и Жуковский и Чаплыгин широко пользовались конформными отображениями, реализуемыми аналитическими функциями (см. с. 215).

[2] А длина каждой из них стремится к нулю.

и которой вместе с другой теоремой подобного типа в руках независимо переоткрывшего ее Коши предстояло произвести в качестве следствий многие важные результаты анализа.

Астрономия не поглощала всей огромной энергии Гаусса в его 35 лет. 1812 год, который видел безнадежные арьергардные бои великой армии Наполеона, был также свидетелем опубликования другого выдающегося труда Гаусса — его исследования о *гипергеометрическом ряде*

$$1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 1\cdot 2}x^2 + \dots,$$

где многоточие означает, что ряд продолжается бесконечно по тому же закону; следующим членом является

$$\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3.$$

Этот мемуар тоже явился вехой. Как уже было отмечено, Гаусс был первым из современных ригористов. В своем труде он определил ограничения, которые нужно наложить на числа a, b, c, x, чтобы этот ряд сходился (в объясненном раньше в этой главе смысле). Этот ряд сам по себе уже не был лишь упражнением для учебника, которое можно выполнить для достижения ловкости в аналитических преобразованиях и затем забыть. Он включает в качестве частных случаев, получаемых при определенных особых значениях одной или нескольких из величин a, b, c, x, многие из наиболее важных в анализе рядов, например те, с помощью которых вычисляются и табулируются логарифмы, тригонометрические функции и несколько функций, которые неоднократно внезапно появляются в ньютоновской астрономии и математической физике; общая биномиальная теорема также является здесь частным случаем. Располагая этим рядом в его общем виде, Гаусс одним ударом сокрушил многое. Этот труд послужил развитию в XIX в. многих приложений к дифференциальным уравнениям физики.

Выбор такого исследования для серьезных усилий характерен для Гаусса. Он никогда не печатал тривиальных вещей. Когда он издавал что-то, оно было не только законченным само по себе, но также настолько переполнено идеями, что его последователи получали возможность применять то, что изобрел Гаусс, к новым проблемам. Хотя ограничения по объему книги запрещают обсуждение многих примеров такого фундаментального характера вкладов Гаусса в чистую математику, один из них не может быть обойден молчанием даже в самом коротком очерке — это труд о законе биквадратичной взаимности. Значение его в том, что он придал новое и совершенно непредвиденное направление высшей арифметике.

После установления *квадратичной* (второй степени) взаимности для Гаусса было естественным рассмотреть общий вопрос о двучленных сравнениях любой степени. Если m — данное целое число, не делящееся на простое число p, n — данное положительное целое и если далее можно найти такое целое число x, что $x^n \equiv m \pmod{p}$, то m называется *n-ичным вычетом* p; когда $n = 4$, m называется *биквадратичным вычетом* p.

Случай *квадратичных* двучленных сравнений ($n = 2$) мало что говорит о том, что делать, когда n больше 2. Одним из вопросов, которые Гаусс должен был включить в опущенный восьмой отдел (или, возможно, как он сообщал Софи Жермен, в задуманный, но неосуществленный второй том) «Арифметических исследований», было рассмотрение сравнений высших степеней и поиски соответствующих законов взаимности, именно взаимосвязей (в отношении разрешимости или неразрешимости) пар сравнений $x^n \equiv p \pmod{q}$ и $x^n \equiv q \pmod{p}$, где p и q — простые числа. В частности, должны были исследоваться случаи $n = 3$ и $n = 4$.

Статья 1825 г. распахивает целину со всей смелостью великих пионеров. После многих неудачных попыток, ведших к необозримой сложности, Гаусс нашел «естественный» путь к сердцу проблемы. *Рациональные* целые числа 1, 2, 3, ... *не являются* подходящими для формулировки закона *биквадратичной* взаимности, какими они являются для закона *квадратичной* взаимности; должен быть изобретен совершенно новый вид *целых чисел*. Они называются *гауссовыми комплексными целыми числами*. Это все комплексные числа вида $a + bi$, где a и b — *рациональные целые числа*.

Чтобы установить закон биквадратичной взаимности, необходимо исчерпывающее предварительное рассмотрение законов арифметической делимости для таких *комплексных целых чисел*. Гаусс дал его и тем самым положил начало теории алгебраических чисел — той теории, которую он, вероятно, имел в виду, когда давал свою оценку Последней теореме Ферма. Для *кубичной* взаимности ($n = 3$) он также нашел правильный путь подобным образом. Его работа об этом была обнаружена в его посмертных бумагах.

Кубичной взаимностью располагал любимый ученик Гаусса — Эйзенштейн. Он же обнаружил удивительную связь между законом биквадратичной взаимности и некоторыми частями теории эллиптических функций, в которой Гаусс продвинулся далеко, но воздержался раскрыть то, что нашел.

Гауссовы комплексные *целые числа* являются, конечно, подклассом *всех* комплексных чисел, и можно было бы подумать, что *алгебраическая* теория *всех* чисел даст *арифметическую* теорию включенных в них *целых чисел*, как тривиальный частный случай. На самом деле это не так. По сравнению с арифметической теорией алгебраическая теория — детская игрушка. Возможная причина этого подсказывается рассмотрением *рациональных чисел* (чисел вида $\frac{a}{b}$, где a и b — рациональные целые числа). Мы можем *всегда* разделить одно рациональное число на другое и получить *еще одно* рациональное число: $\frac{a}{b}$, деленное на $\frac{c}{d}$, дает рациональное число $\frac{ad}{bc}$.

Но рациональное *целое число*, деленное на другое такое число, не всегда является рациональным целым числом: 7, деленное на 8, дает $\frac{7}{8}$. Следовательно, если мы должны ограничиться *целыми числами*, что представляет интерес для теории чисел, мы связываем себя по рукам и ногам еще до того, как начинаем действовать. В этом одна из причин, почему высшая арифметика труднее алгебры, высшей или элементарной.

В равной степени важные продвижения были сделаны Гауссом также в геометрии и приложениях математики к геодезии, ньютоновой теории тяготения и электромагнетизму. Как мог один человек выполнить эту колоссальную массу работы высшего порядка? С характерной для него скромностью Гаусс заявлял: «Если бы другие размышляли о математических истинах так глубоко и постоянно, как это делаю я, они пришли бы к моим открытиям». Возможно, объяснение Гаусса напоминает ньютоново. Когда его спросили, как он сделал открытия в астрономии, превосходящие открытия всех своих предшественников, Ньютон ответил: «Всегда думая о них».

Частично загадка Гаусса объясняется *непроизвольной* поглощенностью математическими идеями, что само, конечно, требует объяснения. Юношей Гаусс был «охвачен» математикой. Разговаривая с друзьями, он внезапно на ходу замолкал, поглощенный неконтролируемыми им мыслями, и останавливался, пристально глядя и забыв об окружающих. Позднее он овладевал своими мыслями и сознательно направлял всю свою энергию на одоление трудности, пока не побеждал ее. Взявшись раз за задачу, он никогда не оставлял ее, пока не одолевал, хотя в поле его внимания могло одновременно находиться несколько задач.

В одном таком случае («Исследования», с. 636) он рассказывает, как в течение 4 лет вряд ли проходила неделя, чтобы он не тратил некоторого времени, пытаясь установить, будет ли некий знак плюсом или минусом. Наконец, решение пришло само по себе в один миг. Однако представлять, что «озарение» появится само по себе, подобно новой звезде, — без изнурительных часов, — это значит полностью упустить суть дела. Часто бесплодно проводя дни или недели над каким-нибудь исследованием, Гаусс приходил к законченному труду после бессонной ночи, устранявшей неясности, и все решение ярко сияло в его уме. Способность к напряженному, длительному сосредоточению была одним из его секретов.

В способности забывать о себе в мире своих мыслей Гаусс имеет сходство и с Архимедом и с Ньютоном. Еще в двух отношениях он также достигал их уровня — в своих дарованиях к точным наблюдениям и в своей искусной изобретательности, что позволило ему самому создавать инструменты, необходимые для научных исследований в геодезии, астрономии, теории электромагнетизма. В качестве примера его технической изобретательности можно упомянуть, что в 1833 г. он пришел к открытию электрического телеграфа и что он и его сотрудник Вильгельм Вебер (1804—1891) применяли этот телеграф как само собой разумеющееся средство для передачи сообщений. Такое сочетание математического гения с первоклассными экспериментальными способностями является одним из редчайших во всех естественных науках.

Сам Гаусс мало заботился о возможных применениях его изобретений. Как и Архимед, он предпочитал математику всем земным царствам, предоставляя другим собирать осязаемые плоды его трудов. Но Вебер, его сотрудник по фундаментальным исследованиям электромагнетизма, отчетливо понимал, каково значение слабого маленького телеграфа в Гёттингене для цивилизации. «Когда земной шар покроется сетью железных дорог и телеграфных проводов, — пророчествовал Вебер в 1835 г., — эти сети сослужат службу, сравнимую с деятельностью нервной системы человеческого тела, частично как транспортные средства, частично как средства распространения идей и новостей со скоростью света».

Восхищение Гаусса Ньютоном уже отмечалось. Зная, каких колоссальных усилий стоили ему некоторые его собственные шедевры, Гаусс отдавал должное длительной подготовке и постоянному размышлению, которые привели к величайшему труду Ньютона. Легенда о Ньютоне и падающем яблоке вызывала у Гаусса негодование. К теории гравитационного поля Эйнштейна так же привел напряженный труд, затраченный им в течение нескольких лет на овладение тензорным исчислением двух итальянских математиков— Риччи и Леви-Чивита, самих по себе учеников Римана и Кристоффеля, которые оба, в свою очередь, вдохновлялись геометрическими трудами Гаусса.

Толкуя об Архимеде, к которому он также питал безграничное восхищение, Гаусс заметил, что он не мог понять, как Архимед упустил изобретение десятичной системы счисления[1] или эквивалентной ей с основанием, отличным от 10. Совершенно не греческий по своему духу труд Архимеда, содержавший изобретенную им систему записи и обращения с числами, далеко выходящими за пределы возможностей греческого способа обозначений чисел, предоставил (согласно Гауссу) в руки Архимеда десятичную систему записи с ее всеважнейшим принципом поместного значения ($325 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$). Этот недосмотр Архимеда Гаусс считал величайшим несчастьем в истории науки. «До каких высот поднялась бы теперь наука, если бы Архимед сделал это открытие!»— восклицал он, думая о массе своих собственных арифметических и астрономических вычислений, которые были бы невозможными, даже для него, без десятичной системы записи. Полностью понимая значение для всех наук улучшенных методов вычислений, Гаусс, как раб, трудился над своими собственными вычислениями, пока страницы цифр не сводились до нескольких строк, которые

[1] Позиционной (поместной).

могли быть восприняты почти сразу. Сам он многое в своих вычислениях делал в уме; усовершенствования предназначены для тех, кто менее одарен, чем он.

В отличие от Ньютона в его поздних летах, Гаусса никогда не привлекали вознаграждения по официальной службе, хотя его острый интерес и проницательность во всех вопросах, имеющих отношение к статистике, страхованию и «политической арифметике», сделали бы его хорошим министром финансов. До своей последней болезни он находил полное удовлетворение в науке и в простых развлечениях. Чтение в широком объеме европейской литературы и классиков античности, критический интерес к мировой политике и овладение в совершенстве иностранными языками и новыми науками (включая ботанику и минералогию) являлись занятиями Гаусса на досуге.

Его особенно привлекала английская литература, хотя ее более мрачные аспекты, как в шекспировских трагедиях, были слишком обильными для обостренной чувствительности великого математика ко всем видам страданий, и он предпочитал более светлые и радостные шедевры. Он читал романы Вальтера Скотта (который был современником Гаусса), как только они выходили в свет. Исторические труды на английском языке доставляли ему особое удовольствие. К своему блистательному молодому современнику, лорду Байрону, Гаусс питал почти неприязнь. В отношении литературы своей собственной страны вкусы Гаусса были несколько необычными для интеллигентного немца. Жан Поль был его любимым немецким поэтом; Гёте и Шиллер, чьи жизни частично пересекались с его жизнью, оценивались им не очень высоко.

Способность, с которой Гаусс овладевал в юности языками, сохранилась у него на всю жизнь. Языки были для него чем-то большим, чем занятиями на досуге. Чтобы испытать гибкость своего ума, по мере того как он становился старше, Гаусс умышленно овладевал новым языком. Такое упражнение, полагал он, помогает ему сохранить свой ум молодым. В возрасте 62 лет он начал интенсивно изучать русский язык без чьей-либо помощи[1]. Через два года он бегло читал русскую прозу и поэтические сочинения и вел переписку со своими петербургскими друзьями среди ученых полностью на русском языке. По мнению русских, навещавших его в Гёттингене, он также прекрасно говорил по-русски. Русскую литературу он ставил наравне с английской по удовольствию, которое она ему доставляла.

Его третье хобби, мировая политика, поглощало каждый день примерно час. Регулярно посещая литературный музей, он был в курсе событий — читал все газеты, которые приходили в музей.

Интеллектуальный аристократ в политике, Гаусс был вполне консервативен, но никак не реакционер. Его время было бурным

---

[1] Это было связано и с желанием читать в оригинале труды Н. И. Лобачевского.

и в родной стране и за границей. Власть толпы и акты политического насилия вызывали в нем, как сообщает его друг фон Вальтерсхаузен, «неописуемый ужас». Парижская революция 1848 г. наполнила его страхом. Если бы в Германии вспыхнула гражданская война, говорил Гаусс, он сразу же умер бы. Чужеземное завоевание, на манер великого наполеоновского, он рассматривал, как непостижимое безумие.

Эти консервативные чувства не были тоской по родине реакционера, который предлагает миру пренебречь законами небесной механики и остановиться в поднебесье мертвого и неизменяющегося прошлого. Гаусс верил в реформы, когда они были умными.

Его более прогрессивные друзья приписывали консерватизм Гаусса замкнутости, с которой он оставался верным своему труду. В этом, возможно, есть нечто стоящее. В течение последних двадцати семи лет своей жизни Гаусс спал вне своей обсерватории только один раз, когда присутствовал на научном собрании в Берлине, чтобы угодить Александру фон Гумбольдту, который хотел порисоваться им. Гаусс жил дома, читал, не верил большинству из того, что читал, размышлял и познавал правду.

Другим источником силы Гаусса была его научная скромность и отсутствие личного честолюбия. Все его честолюбие было направлено на продвижение математики. Когда соперники ставили под сомнение его утверждение, что он опередил их, Гаусс не выставлял свой дневник, чтобы доказать свой приоритет, а предоставлял своему утверждению требовать уважения к его собственным достоинствам.

Лежандр был самым многоречивым из таких сомневающихся. Один случай сделал его врагом Гаусса на всю жизнь. В «Теории движения» Гаусс сослался на открытый им ранее метод наименьших квадратов. Лежандр опубликовал этот метод в 1806 г., раньше Гаусса. С большим возмущением он написал Гауссу письмо, фактически обвиняя его в нечестности и выражая недовольство тем, что Гаусс, столь богатый в открытиях, мог бы быть настолько порядочным, чтобы не присваивать себе метод наименьших квадратов, который Лежандр считал своим собственным детищем. В спор вступил Лаплас. Гаусс, по-видимому, считал ниже своего достоинства обсуждать вопрос дальше. Но в письме другу он указывает свидетельство, которое могло бы завершить спор тотчас же, если бы Гаусс не был «слишком гордым, чтобы бороться». «Я все сообщил Ольберсу в 1802 г.», — заявил он, и, если Лежандр был склонен сомневаться в этом, он мог бы спросить Ольберса, который имел рукопись.

Спор был крайне неуместным для последующего развития математики, так как Лежандр сообщил о своих неоправданных подозрениях Якоби и тем самым помешал этому блестящему молодому творцу теории эллиптических функций[1] войти в сердечные отноше-

---

[1] Создание этой теории не в меньшей мере заслуга Абеля.

ния с Гауссом. Размолвка была тем более прискорбной, что Лежандр был человеком самого возвышенного характера и скрупулезно честным. Ему было суждено быть превзойденным обладавшими более богатым воображением, чем он, математиками в областях, в которых он тяжело трудился большую часть своей долгой трудолюбивой жизни, что, как показали более молодые ученые — Гаусс, Абель и Якоби, — было излишним. На каждом шагу Гаусс далеко опережал Лежандра. Тем не менее, когда Лежандр обвинил Гаусса в нечестном поступке, тот почувствовал, что сам покинут в беде. В письме Шумахеру (30 июля 1806 г.) он жалуется: «Кажется, моя судьба — конкурировать почти во всех своих теоретических работах с Лежандром. Так обстоит дело в высшей арифметике, в исследованиях трансцендентных функций, связанных со спрямлением [процессом нахождения длины дуги кривой] эллипса, в основаниях геометрии и теперь снова в методе наименьших квадратов, который... использован также в работе Лежандра и действительно по справедливости любовно завершен».

После опубликования с подробностями посмертных бумаг Гаусса и многого из его переписки последних лет, все эти старые споры раз и навсегда были разрешены в пользу Гаусса. Но остается еще одно основание для его осуждения — отсутствие у него сердечности в оценке великих трудов других, особенно более молодых ученых. Когда Коши начал публиковать свои блестящие открытия в теории функций комплексной переменной, Гаусс игнорировал их. Ни слова похвалы или ободрения не дошло до молодого француза от короля математиков. Хорошо, но почему оно должно было дойти? Гаусс сам (как мы видели) достиг сердцевины проблемы годами раньше, чем Коши приступил к ней. Статья по этой теории должна была стать одним из шедевров Гаусса. Далее, когда труд Гамильтона по кватернионам в 1852 г., за 3 года до смерти Гаусса, привлек его внимание, он опять не сказал ни слова. Почему он должен был сказать что-нибудь? Суть предмета была захоронена в его заметках более 30 лет до этого. Он хранил свой покой и не претендовал на приоритет. Как и в своих предвосхищениях теории функций комплексной переменной, теории эллиптических функций и неевклидовой геометрии, Гаусс был удовлетворен проделанной работой.

Суть кватернионов — это алгебра, которая играет роль вращений в трехмерном пространстве, как алгебра комплексных чисел играет роль вращений на плоскости. Но для кватернионов (Гаусс называл их мутациями) нарушается одно из основных правил алгебры: для них уже не верно, что $a \cdot b = b \cdot a$, и невозможно создать алгебру трехмерных вращений, в которой это правило сохраняется. Гамильтон, один из великих математических гениев XIX в., пишет с ирландской цветистостью речи, как он в течение 15 лет старался изобрести алгебру, совместимую с тем, что требовалось, пока счастливое вдохновение не дало ему ключ к разгадке, что $a \cdot b$ не равно $b \cdot a$ в той алгебре, которую он искал. Гаусс не сообщает, сколько времени поглотило у него достижение цели; он просто записал о своем успехе на нескольких страничках об алгебре, не оставляющей математике воображения.

Если Гаусс был несколько холоден в печатных выражениях признания ценности трудов, то в переписке и в научных сношениях с теми, кто обращался к нему в духе бескорыстных расспросов, он был достаточно сердечным. Одна из его дружеских научных связей имеет более чем только математический интерес, так как показывает либеральность взглядов Гаусса касательно женщин, занимающихся научной работой. Широта его взглядов в этом отношении была выдающейся для любого человека его поколения; для немца она была почти беспрецедентной.

Женщина, о которой идет речь, — мадемуазель Софи Жермен (1776—1831) — была старше Гаусса только на один год. Они никогда не встречались, и она умерла (в Париже) прежде, чем Гёттингенский университет смог присвоить ей почетную докторскую степень, что рекомендовал факультету Гаусс. По курьезному совпадению самая знаменитая женщина-математик XIX в., тоже Софья[1], получила свою докторскую степень много лет спустя в этом же самом либеральном университете после того, как Берлинский университет отказал ей в этом, учитывая ее пол. Видимо, Софья — удачное в математике имя для женщин, если только они опекаются широко мыслящими учителями. Ведущая женщина-математик нашего времени — Эмми Нетер (1882—1935) — также вышла из Гёттингена*.

Научные интересы Софи Жермен охватывали акустику, математическую теорию упругости и высшую арифметику; в каждой из них она сделала заметные работы. В частности, ее вклад в исследование Последней теоремы Ферма привел в 1908 г. к значительному продвижению в этом направлении американского математика Леонарда Юджина Диксона (1874—1954).

В восторге от «Арифметических исследований» Софи написала Гауссу о некоторых своих арифметических наблюдениях. Боясь, что он может отнестись с предубеждением к женщине-математику, она присвоила себе мужское имя. У Гаусса сложилось высокое мнение о талантливом корреспонденте, к которому он обратился с письмом на прекрасном французском языке, как к «мсье Леблан».

Леблан сбросила (или сбросил) свою маску, когда вынуждена была сообщить Гауссу свое настоящее имя по случаю оказания ему одной доброй услуги в связи с занятием французами Ганновера. В письме от 30 апреля 1807 г. Гаусс благодарит ее за за-

---

[1] С. В. Ковалевская (1850—1891).

* Именно «вышла». Когда нацистские умники изгнали фрейлен Нетер из Германии за то, что она еврейка, ее принял колледж Брин-Моур в Пенсильвании. Она была самым созидательным абстрактным алгебраистом в мире. Менее чем за неделю нового порядка в Германии Гёттинген потерял весь либерализм, который взлелеял Гаусс и который он старался поддерживать в течение всей своей жизни.

ступничество и выражает сожаление по поводу войны. Дальше он делает ей большой комплимент и бегло высказывается о своей любви к теории чисел. Приведем выдержку из этого письма:

«Вкус к абстрактным наукам вообще и сверх всего к тайнам чисел встречается крайне редко: одиночка не удивляется этому; чарующее обаяние этой возвышенной науки открывается только тем, кто имеет смелость войти в нее глубоко. Но когда лицо того пола, который, согласно нашим привычкам и предубеждениям, должен столкнуться с бесконечно большими, чем мужчины, трудностями, чтобы ознакомиться с этими тернистыми исследованиями, тем не менее преуспевает в преодолении препятствий и постигает наиболее скрытые их части, тогда, несомненно, это лицо должно обладать благороднейшей смелостью, совершенно удивительными талантами и высшей гениальностью. Действительно, ничто не может доказать мне таким лестным и менее сомнительным способом, что прелести этой науки, которая обогатила мою жизнь столь многими радостями, не являются химерическими, как и склонность, которой Вы ее удостоили». Затем он переходит к обсуждению с ней математических вопросов.

Что Гаусс не только проявил вежливость по отношению к молодой поклоннице, показывает его письмо от 21 июля 1807 г. к своему другу Ольберсу: «...Лагранж горячо интересуется астрономией и высшей арифметикой; две теоремы-критерия (для каких простых чисел число 2 является кубичным или биквадратичным вычетом), которые я также сообщил ему некоторое время назад, он считает «одними из самых красивых и самых трудных по доказательству». Но Софи Жермен прислала мне их доказательства; я не имел возможности пройтись по ним, они хороши; по крайней мере, она подошла к вопросу с правильной стороны, только несколько более многословно, чем это было бы необходимо...» Теоремы, которые упоминает Гаусс, устанавливают, для каких нечетных простых чисел p каждое из сравнений $x^3 \equiv 2 \pmod p$ и $x^4 \equiv 2 \pmod p$ разрешимо.

Описание всех выдающихся вкладов Гаусса в чистую и прикладную математику потребовало бы большой книги (возможно, больше, чем потребовалось бы для Ньютона). Здесь мы можем упомянуть только о некоторых более важных трудах, еще не упомянутых, и будем выбирать те из них, которые пополнили математику новыми приемами или завершили выдающиеся проблемы. В виде приблизительной, но удобной хронологии (принятой издателями сочинений Гаусса) мы подытожим основные области интересов Гаусса после 1800 г. следующим образом: 1800—1820 — астрономия; 1820—1830 — геодезия, теория поверхностей и теория конформного отображения; 1830—1840 — математическая физика, в особенности электромагнетизм, земной магнетизм и теория ньютоновского тяготения; 1841—1855 — топология и геометрия в связи с функциями комплексной переменной.

В 1821—1848 гг. Гаусс был научным советником ганноверского (Гёттинген находился тогда под управлением Ганновера) и датского правительств по обширным геодезическим съемкам. Его метод наименьших квадратов и его мастерство в составлении схем обработки массы числовых данных получили большой размах, но еще важнее, что задачи, возникающие при точном топографировании части земной поверхности, несомненно, навели его на более глубокие и более общие задачи, связанные со всевозможными кривыми поверхностями. Этим исследованиям предстояло породить математику теории относительности. Предмет не был новым: некоторые предшественники Гаусса, особенно Эйлер, Лагранж и Монж, исследовали геометрию определенных типов кривых поверхностей, однако Гауссу осталось атаковать проблему во всей ее общности, и от его исследований развился первый великий период *дифференциальной геометрии*[1].

Дифференциальную геометрию грубо можно описать как изучение свойств кривых, поверхностей и т. д. в непосредственной близости от некоторой точки, так что можно пренебречь степенями расстояний выше второй.

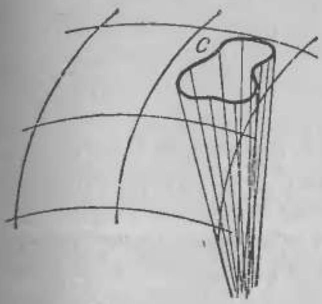
Вдохновленный трудами Гаусса, Риман в 1854 г. написал свою классическую диссертацию о гипотезах, лежащих в основаниях геометрии, которая, в свою очередь, стала началом второго великого периода в дифференциальной геометрии, той, которая применяется теперь в математической физике, особенно в общей теории относительности.

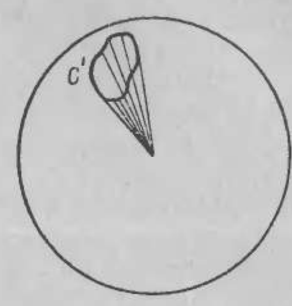
Три из проблем, которые рассматривал Гаусс в своем труде по теории поверхностей, навеяли важные в математическом и естественнонаучном отношении общие теории: измерение *кривизны*, теория *конформных отображений и изгибаемость* поверхностей.

Излишне мистифицируемое движение «искривленного» пространства-времени, которое является чисто математическим расширением известной, мыслимо представляемой кривизны на «пространство», описываемое *четырьмя* координатами вместо двух, было естественным развитием гауссова труда о кривых поверхностях. Разумность всего этого хорошо проиллюстрирует одно из его определений. Задача состоит в изобретении некоторых точных средств для описания того, как «кривизна» поверхности меняется от точки к точке поверхности; описание должно соответствовать нашему интуитивному представлению о том, что означает «более искривленная» и «менее искривленная».

Полная кривизна любой части поверхности, ограниченной замкнутой несамопересекающейся кривой C, определяется следующим образом. *Нормалью* к поверхности в данной точке является та прямая, проходящая через данную точку, которая перпендикулярна плоскости, касающейся поверхности в данной точке. В каж-

[1] Основным трудом Гаусса в этом направлении явились «Исследования относительно кривых поверхностей» (1822). Поверхности предполагаются гладкими.





дой точке кривой C имеется нормаль к поверхности. Вообразим все эти нормали проведенными. Теперь представим, что из центра сферы с единичным радиусом (она может быть расположена где угодно относительно рассматриваемой поверхности) проведены все радиусы, параллельные нормалям, проходящим через точки кривой C. Эти радиусы вырежут на сфере единичного радиуса кривую, скажем C'. *Площадь* этой части сферической поверхности, ограниченной кривой C', и есть по определению *полная кривизна* данной части криволинейной поверхности, ограниченной кривой C. Небольшое воображение показывает, что это определение соответствует обычным понятиям, как и требовалось.

Другой основной идеей, разработанной Гауссом в его исследовании поверхностей, была идея *параметрического представления.*

Чтобы отметить определенную точку на плоскости, требуются *две* координаты. То же и на поверхности сферы или сфероида, подобного Земле: в этих случаях координаты можно мыслить как широту и долготу. Это поясняет, что значит *двухмерное многообразие*. В общем случае: если *точно n* чисел как необходимы, так и достаточны, чтобы отметить (индивидуализировать) каждый отдельный элемент из какого-то класса вещей (точек, звуков, цветов, линий и т. д.), то говорят, что этот класс является *n-мерным многообразием*. При таком подходе принимается, что лишь некоторые характеристики элементов класса будут определены числами. Так, если мы рассматриваем только высоту звуков, то имеем одномерное многообразие, ибо одного числа — частоты колебания, соответствующей звуку — достаточно, чтобы определить его высоту. Если мы присовокупим громкость, измеренную по некоторой подходящей шкале, звуки являются уже двухмерным многообразием, и так далее. Если теперь рассмотрим *поверхность* как состоящую из *точек*, то видим, что она является *двухмерным многообразием* (точек). Употребляя язык геометрии, мы находим удобным говорить о *любом* двухмерном многообразии как о «поверхности» и применять к многообразию рассуждения геометрии в надежде обнаружить что-нибудь интересное.

Предыдущие рассмотрения приводят к параметрическому представлению поверхностей. В декартовой геометрии *одно* уравнение, связывающее *три* координаты, представляет поверхность. Пусть координаты (декартовы) суть x, y, z. Вместо использования одного уравнения, связывающего x, y и z, для представления поверхности мы теперь ищем *три* уравнения:

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ z = h(u, v),$$

где $f(u, v)$, $g(u, v)$ и $h(u, v)$ — такие функции (выражения) новых переменных u и v, что если эти переменные исключены из приведенных уравнений, то в результате имеем уравнение поверхности, связывающее x, y и z. Исключение возможно, так как два из уравнений можно использовать для разрешения относительно двух неизвестных u и v; результат затем подставляют в третье уравнение. Например, если

$$x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv,$$

то из первых двух уравнений получаем $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$ и, следовательно, из третьего имеем $4z = x^2 - y^2$. Теперь, когда переменные u и v независимо пробегают некоторое предписанное множество чисел, функции f, g, h будут принимать числовые значения и точка с координатами x, y, z будет двигаться по поверхности, уравнениями которой являются три выше записанные уравнения. Переменные u и v называются *параметрами* поверхности, а три уравнения $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ — ее параметрическими уравнениями. Этот метод представления поверхностей имеет большие преимущества перед декартовым методом, когда применяется к изучению кривизны и других свойств поверхностей, которые быстро меняются от точки к точке.

Заметим, что параметрическое представление является *внутренним*, оно соотносит саму поверхность к ее координатам, а не к внешней посторонней системе осей, не связанной с поверхностью, как в случае метода Декарта. Заметим также, что *два* параметра u и v непосредственно выявляют двухмерность поверхности. Широта и долгота на земной поверхности являются примерами этих внутренних, «естественных» координат; было бы в высшей степени затруднительным осуществлять навигацию, ссылаясь на три взаимно перпендикулярные оси, проведенные через центр Земли, как требовалось бы для кораблевождения по Декарту.

Другим преимуществом метода является легкость обобщения на пространство любого числа измерений. Достаточно увеличить число параметров и действовать, как выше. У Римана эти простые идеи естественно приводят к обобщению метрической геометрии Пифагора и Евклида. Основы этого обобщения были заложены Гауссом, но их важность для математики и физики не была полностью оценена до нашего столетия.

Геодезические исследования подсказали Гауссу также развитие другого мощного метода геометрии, метода конформного отображения. До того, как можно чертить карту, скажем, Гренландии, нужно определить, что должно сохраниться. Нужно ли искажать расстояния так, как они искажаются в проекции Меркатора, до того, что Гренландия становится преувеличенной в сравнении с Северной Америкой? Или же нужно сохранять расстояния так, чтобы дюйм на карте, измеренный где угодно вдоль соответствующих линий (скажем, линий широты и долготы), всегда будет соответствовать одному и тому же расстоянию, измеренному на земной поверхности? Если это так, то нужен определенный тип отображения. И этот тип не будет сохранять какую-то другую характерную черту, которую мы могли бы пожелать сохранить. Например, если две дороги на земле пересекаются под определенным углом, то линии, представляющие эти дороги на карте, пересекутся под другим углом. Тот тип отображения, который *сохраняет углы*, называется *конформным*. При таком отображении наиболее полезным орудием является ранее описанная теория аналитических функций комплексной переменной.

Конформное отображение в целом постоянно используется в математической физике и ее применениях, например в электростатике, гидродинамике и ее отпрыске — аэродинамике; в последней оно выступает как часть теории крыла[1].

Еще одной областью геометрии, которую Гаусс обработал с обычными для него основательностью и удачей, была область изгибания поверхностей, в которой требуется определить, какие поверхности могут быть изогнуты в данную поверхность без растягивания и разрывания. И здесь изобретенные Гауссом методы были общими и широко полезными.

Гаусс обогатил фундаментальными исследованиями другие разделы естествознания, например математические теории электромагнетизма, включая земной магнетизм, капиллярности, притяжения эллипсоидов (планеты являются эллипсоидами специального вида) при действии ньютонова закона тяготения, а также диоптрики, особенно относительно систем линз. Последняя предоставила ему удобный случай применить некоторые из чисто абстрактных приемов (непрерывные дроби), которые он развивал молодым человеком, чтобы удовлетворить свою любознательность в теории чисел.

Во всех этих вещах Гаусс не только возвышенно математизировал, он использовал свои руки и свои глаза, был исключительно тщательным наблюдателем. Многие из открытых им специфических теорем, особенно в его исследованиях по электромагнетизму и теории притяжения, стали частью необходимого запаса знаний в занятиях тех, кто серьезно работает в физической науке. В течение многих лет Гаусс с помощью своего друга Вебера искал удовлетворительную теорию для всех электромагнитных явлений. Потерпев неудачу в поисках того, что он считал удовлетворительным, Гаусс отказался от своей попытки. Если бы он нашел уравнения электромагнитного поля, установленные Джеймсом Клерком Максвеллом (1831—1879), он мог бы быть удовлетворенным.

---

[1] См. примечание редактора на с. 202.

В заключение этого длинного, но все же далеко не полного перечня великих свершений, благодаря которым Гаусс заслужил неоспоримый титул Короля математиков, мы должны упомянуть о предмете, по которому он ничего не опубликовал, кроме беглого намека в диссертации 1799 г., но относительно которого предсказывал, что он станет одним из главных в математике, — о *топологии* (analysis situs). Рабочее определение того, что это значит, здесь невозможно (оно требует понятия *непрерывной группы*), но некоторый намек на тип задач, с которыми он имеет дело, можно получить из простого примера. Какой-то вид узла завязан на веревке и затем концы веревки сращены. «Простой» узел легко отличим на глаз от «сложного», но как следует дать точное, *математическое* указание о различии между ними? И как мы должны математически классифицировать узлы? Хотя Гаусс ничего не публиковал об этом, он положил этому начало, как было обнаружено в его посмертных бумагах. Другой тип задачи этого предмета — определить наименьшее число разрезов данной поверхности, которое позволит нам распластать поверхность на плоскости. Для конической поверхности достаточно одного разреза; для якорного кольца — два; для сферы недостаточно конечного числа разрезов, если не разрешено растяжение.

Эти примеры могут навести на мысль, что весь предмет тривиален. Если бы это было так, Гаусс не придавал бы чрезвычайного значения тому, что он сделал. Его предсказание о фундаментальном характере этого предмета осуществилось при жизни нашего поколения начала нашего века. Сильная школа (включающая многих американцев — Дж. У. Александера, С. Лефшетца, О. Веблена и др.[1]) пришла к заключению, что *топология*, или «геометрия положения», как иногда принято ее называть, имеет далеко идущие разветвления как в геометрии, так и в анализе. Как жаль, кажется нам теперь, что Гаусс не смел урвать год или два от Цереры, чтобы привести в систему свои мысли об этой обширной теории, которая должна была стать мечтой его старого поколения и реальностью молодого поколения нашего века.

В последние годы жизни Гаусса ему воздавались всевозможные почести, но он не был настолько счастлив, насколько заслужил на это право. Оставаясь, как всегда, могучим разумом и плодотворно изобретательным, Гаусс не стремился к отдыху, когда за несколько месяцев до смерти появились первые признаки его последней болезни.

В первый раз, более чем за 20 лет, он покинул Гёттинген 16 июня 1854 г., чтобы увидеть строительство железной дороги между его городом и Касселем — Гаусс всегда проявлял большой интерес

---

[1] Основополагающее значение в создании топологии имели исследования советских математиков, особенно П. С. Александрова, П. С. Урысона, А. Н. Тихонова, Л. С. Понтрягина, А. Н. Колмогорова.

к сооружению и действию железных дорог. Лошади понесли, он был выброшен из кареты, остался невредимым, но сильно потрясенным. Он выздоровел и даже доставил себе удовольствие быть очевидцем церемонии открытия железной дороги, достигшей Гёттингена, 31 июля 1854 г. Это был его утешительный день.

В самом начале нового года он стал страдать большей частью от расширения сердца и недостаточности дыхания. Тем не менее он работал, когда мог, хотя его руку сводило и, наконец, нарушился его красивый ясный почерк. Последнее написанное им письмо было к Давиду Брюстеру об открытии электрического телеграфа.

В полном сознании почти до самого конца, он спокойно умер после отчаянной борьбы за жизнь рано утром 23 февраля 1855 г. на 78-м году жизни. Он живет всюду в математике.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

КОПЕРНИК ГЕОМЕТРИИ

ЛОБАЧЕВСКИЙ (1792—1856)

Непреходящая слава Лобачевского в том, что он решил нам задачу, которая оставалась нерешенной две тысячи лет. — СОФУС ЛИ[1]

КОГДА МЫ УЯСНЯЕМ, что сделал Лобачевский в создании неевклидовой геометрии, и учитываем ее значение для всего человеческого мышления, лишь малой, но важной частью которого является математика, мы должны, вероятно, согласиться, что Клиффорд (1845—1879) — сам великий геометр и намного больше, чем «просто математик», — не перехвалил своего героя, когда назвал Лобачевского «Коперником геометрии»[2].

Николай Иванович Лобачевский, второй сын мелкого чиновника, родился 1 декабря (20 ноября) 1792 г. в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький), в России[3]. Когда Николаю было 7 лет, его мать, Прасковья Ивановна, осталась одна с тремя маленькими сыновьями. И до этого жалованья отца с трудом хватало на содержание семьи; теперь она встретилась с крайней нищетой. Она переехала в Казань, где как могла подготавливала детей к школе, и они были приняты в гимназию на казенное содержание. Николай приступил к занятиям в 1802 г., в 10-летнем возрасте. Его успехи в математике и в древних языках были феноменальными. В 14 лет он был подготовлен для университета. В 1807 г. он поступил в Казанский университет (основан в 1805 г.), в котором ему предстояло провести

---

[1] Софус Ли — первый лауреат (1898) Международной премии имени Лобачевского по геометрии. Данный эпиграф поставлен редактором. У автора эпиграфом служит высказывание из предисловия редакторов к изданию трудов Н. И. Лобачевского.

[2] Клиффорд писал: «Чем Везалий был для Галена, чем Коперник был для Птолемея, тем Лобачевский был для Евклида. У Коперника и Лобачевского имеется интересная общая черта — оба они славяне по происхождению. Каждый из них произвел революцию в научных воззрениях, и обе эти революции имеют одинаково громадное значение — это революции в нашем понимании Космоса».

[3] Биографические сведения о Лобачевском уточнены в соответствии с дополнительными данными, выявленными в архивах в связи со столетием со дня смерти создателя неевклидовой геометрии (1956) и позже.

последующие 40 лет жизни — как студенту, экстраординарному профессору, профессору и, наконец, ректору.

Надеясь в конечном счете поставить Казанский университет на один уровень с лучшими университетами Европы, власти пригласили нескольких видных профессоров из Германии. Среди них был астроном Литтров, который стал потом директором Венской обсерватории. Ученые быстро распознали гений Лобачевского и оказывали ему полную поддержку[1].

В 1811 г., в возрасте 18 лет, Лобачевский получил степень магистра, к тому же с отличием. В это время его старший брат Алексей вел курсы элементарной математики по подготовке младших правительственных чиновников, и, когда он получил отпуск по болезни, Николай заменил его. В апреле 1814 г. он был утвержден адъюнктом чистой математики, а 2 года спустя ему было присвоено звание профессора.

Назначение Лобачевского экстраординарным профессором состоялось в 1816 г. в необычно молодом возрасте 23 лет. Его обязанности были многотрудными. Дополнительно к работе по математике ему поручались лекционные курсы по астрономии и физике (первый в порядке замены коллеги, получившего отпуск[2]). Он блестяще справился с порученным заданием. Это послужило поводом для еще большей нагрузки.

Вскоре Лобачевский взялся за переустройство университетской библиотеки и университетского музея, находившихся в хаотическом состоянии.

Среди неисчислимых обязанностей Лобачевского с 1819 г. до смерти Александра I в 1825 г. было наблюдение за всеми учащимися Казани — от начальных школ до курсов для окончивших университет. Наблюдать полагалось в основном за политической благонадежностью. Трудности такого неблагодарного поручения можно легко представить. То, что Лобачевский не потерял искреннего уважения своих коллег и привязанности всех учащихся, говорит о его административных способностях, может быть, больше, чем все его ордена и медали, которыми он любил в торжественных случаях украшать себя.

Коллекция университетского музея находилась в запущенном состоянии. Подобный же беспорядок привел к тому, что обширная библиотека практически не использовалась. Лобачевский проделал всю необходимую работу собственными руками. Так как никаких средств для найма помощников, чтобы привести в порядок музей и библиотеку, не выделили, то Лобачевскому приходилось, судя по обстоятельствам, помимо составления каталогов, раскладывать книги по полкам, вытирать пыль, убирать. В знак признания его

---

[1] В этом особо выделялся профессор математики М. Ф. Бартельс, который, как отмечалось выше, сыграл ранее видную роль в становлении Гаусса как математика.

[2] Имеется в виду соученик и друг Лобачевского, профессор астрономии И. М. Симонов, отправившийся в 1819 г. в кругосветное плавание.

блестящей службы власти назначили его деканом физико-математического факультета.

Со смертью Александра I дела обернулись к лучшему. Специальный уполномоченный правительства для преднамеренного преследования Казанского университета был уволен. Нуждаясь в политической и моральной поддержке своей деятельности в университете новый попечитель обеспечил назначение в 1827 г. Лобачевского ректором. Математик был теперь главой университета, но эта должность отнюдь не была синекурой. Под его умелым руководством весь штат был реорганизован, были привлечены лучшие люди, преподавание было либерализовано, несмотря на официальные препятствия, была построена библиотека, соответствующая высшему уровню научных требований, были организованы механические мастерские для изготовления научных инструментов, которые требовались для исследований и преподавания, была основана и оборудована обсерватория — любимое детище энергичного ректора. Обширная минералогическая коллекция, представлявшая всю Россию, была приведена в порядок и постоянно обогащалась.

Даже ректорское достоинство не удерживало Лобачевского от работы руками в библиотеке и музее, когда он чувствовал, что его помощь необходима. Университет был его жизнью, и он любил его.

Когда правительство решило обновить университетские здания и построить несколько новых, Лобачевский счел своим долгом наблюдать, чтобы работы велись должным образом, и не допускать никакого расточительства. Для выполнения этой задачи он изучил архитектуру. Он так практически овладел этим предметом, что здания получились не только красивыми и удобными, но и, что, должно быть, почти уникально в истории правительственных сооружений, были построены за меньшую сумму денег, чем намечалось. Несколько лет спустя (в 1842 г.) страшный пожар уничтожил половину Казани; пострадали и лучшие здания Лобачевского, включая обсерваторию — его гордость. Но благодаря его энергии и хладнокровию инструменты и библиотека были спасены. Сразу же после пожара он приступил к работам по восстановлению. Через 2 года не осталось никаких следов несчастья.

Напомним, что 1842 год, когда случился пожар, был также годом избрания Лобачевского, по ходатайству Гаусса, иностранным членом-корреспондентом Гёттингенского королевского общества за создание неевклидовой геометрии. Кажется невероятным, что Лобачевский, так сильно перегруженный преподавательскими и административными обязанностями, мог находить время для научной работы. Он создал один из величайших шедевров всей математики и поставил веху в человеческом мышлении. Он трудился над этим с перерывами не менее 20 лет. Его первое публичное сообщение по этой теме было сделано на физико-математическом факультете Казанского университета в 1826 г. Гаусс не знал о его трудах примерно до 1840 г.

Другой эпизод из деятельной жизни Лобачевского показывает, что он не только в математике опережал свое время. В 1830 г. в Казани появилась эпидемия холеры. Понимая, что положение в городе безнадежное, Лобачевский убедил своих сотрудников поселить семьи в университете, а некоторых студентов (практически, в порядке приказа) присоединиться к нему для разумной борьбы с холерой. Из 660 мужчин, женщин и детей, чье здоровье они защищали, умерло только 16 человек, меньше 2,5%. По сравнению с потерями в городе (где следовали сложившимся традициям лечения) это было пренебрежимо мало.

Можно предположить, что после всего его выдающегося служения стране, признания в Европе как математика[1], Лобачевский удостоился особых почестей своего правительства. Думать так было бы крайне наивным. В награду за все свои жертвы и неукоснительное служение благу России Лобачевского грубо лишили должностей профессора и ректора университета. Лобачевскому было тогда 54 года, и он был полон физических и умственных сил, более чем когда-либо он был способен продолжать свои математические исследования. Его коллеги, рискуя собственной безопасностью, протестовали против произвола, но им вежливо объяснили, что профессора по своей природе не в состоянии понять высшие соображения правительственной науки.

Отвратительная неблагодарность властей сломила Лобачевского. Он оставил все надежды снова стать кем-то в университете, который своей научной славой почти целиком был обязан его усилиям, и после этого появлялся в нем только случайно, чтобы помочь на экзаменах. Хотя его зрение быстро ухудшалось, он был еще способен к интенсивному математическому мышлению.

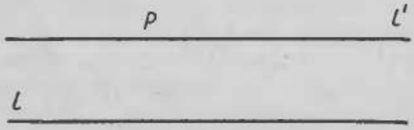
Он все еще любил университет. Его здоровье пошатнулось, когда умер его сын; но он все еще надеялся, что сможет принести некоторую пользу. В 1855 г. университет праздновал свое 50-летие. Лобачевский лично присутствовал на торжествах и принес в дар юбиляру экземпляр «Пангеометрии» — завершающей научной работы его жизни. Эта работа (на французском и русском языках) не была написана его собственной рукой: он диктовал ее, так как в то время был уже слепым. Через несколько месяцев, 24 февраля 1856 г., 62 лет от роду, он умер.

Чтобы понять, что сделал Лобачевский, нужно сначала коснуться выдающегося достижения Евклида. Имя Евклида до совсем недавнего времени практически было синонимом школьного курса геометрии. О самом ученом, кроме сомнительных дат рождения и смерти (330—275 до н. э.), известно очень мало. Дополнительно к систематическому изложению элементарной геометрии его «Начала» содержат все, что было известно в то время по теории чисел. Геометрическое обучение шло согласно Евклиду более 2200 лет.

[1] Одним лишь Гауссом.

Его личный вклад в «Начала», по-видимому, состоял главным образом в систематизации и логическом упорядочении разрозненных результатов его предшественников и современников, а его целью было дать такое связное убедительное изложение элементарной геометрии, чтобы каждое утверждение всего большого сочинения можно было свести к постулатам. Евклид не достиг этого идеала и даже отдаленно не приблизился к нему, хотя в течение столетий считали, что ему это удалось.

Право Евклида на бессмертие основывается на кое-чем совершенно ином, а не на предполагаемом логическом совершенстве, которое все еще иногда ошибочно приписывается ему. Это понимание того, что пятый из его постулатов (его одиннадцатая аксиома) является лишь предположением. Пятый постулат может быть сформулирован во многих эквивалентных формах, каждая из которых выводится из любой другой с помощью других постулатов евклидовой геометрии. Возможно, простейшей из формулировок является следующая. Если дана прямая l и точка P, не лежащая на этой прямой, то в плоскости, определяемой l и P, можно провести *только одну* прямую l', проходящую через P, которая никогда не пересекается с l, как бы далеко эти две прямые ни были продолжены (в том или другом направлениях). Только по определению мы говорим, что две прямые, лежащие в одной плоскости, которые никогда не пересекаются, являются *параллельными*. Таким образом, пятый постулат Евклида утверждает, что через P проходит одна и только одна прямая, параллельная l. Глубокое проникновение Евклида в суть геометрии убедило его в том, что этот постулат не выводим из других постулатов, хотя и было предпринято много попыток *доказать* его. Будучи сам не в состоянии вывести этот постулат из своих других допущений и желая использовать его в доказательствах многих своих теорем, Евклид честно поместил его среди других своих постулатов[1].

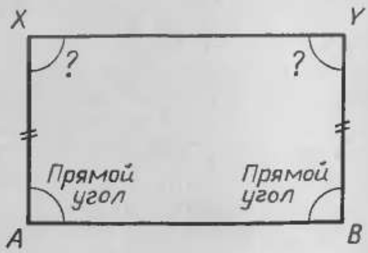


[1] В геометрии Евклида сумма углов любого прямолинейного треугольника равна π (двум прямым). Это утверждение также эквивалентно пятому постулату.

В своей первой опубликованной работе об открытой им геометрии, напечатанной в Казани в 1829—1830 гг. под названием «О началах геометрии», Лобачевский начинает изложение основ новой геометрии (он ее называет воображаемой, а евклидову — употребительной) следующим образом: «Мы видели, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть $> \pi$. Остается предполагать эту сумму равной π или меньшей π. То и другое может быть принято без всякого противоречия впоследствии, от чего и происходят две Геометрии: одна — *употребительная* доныне по своей простоте — соглашается со всеми измерениями на самом деле; другая — *воображаемая*, более общая и потому затруднительная в своих вычислениях — допускает возможность зависимости линий от углов. Если в одном прямолинейном треугольнике принять сумму углов за π, то она будет такой же во всех других треугольниках. Допуская же, что она менее π, легко доказать, что сумма углов уменьшается с возрастанием

Есть еще одна или две простые вещи, которыми нужно располагать прежде, чем перейти к коперниковскому уделу Лобачевского в расширении геометрии. Мы ссылались на «эквиваленты» постулата параллельности. Один из них, так называемая «гипотеза прямого угла», наводит на мысль о еще двух возможностях, ни одна из которых не эквивалентна предположению Евклида; одна из них приводит к геометрии Лобачевского, вторая — к геометрии Римана.

Рассмотрим фигуру $AXYB$, которая «выглядит как прямоугольник», состоящую из четырех отрезков прямых AX, XY, YB, BA, в которой BA (или AB) является основанием, а AX и YB (или BY) — перпендикуляры к AB одинаковой длины, восстановленные по одну и ту же сторону от AB. Существенно помнить об этой фигуре, что каждый из углов XAB и YBA (у основания) является прямым и что стороны AX и BY равны. *Без использования постулата о параллельных* можно доказать, что углы AXY и BYX *равны* между собой, но *невозможно доказать, что эти углы прямые*, хотя они и выглядят такими. Если мы *примем постулат о параллельных*, мы сможем *доказать*, что углы AXY и BYX *прямые*; наоборот, если мы *примем*, что углы AXY и BYX *прямые*, мы можем *доказать* постулат о параллельных. Таким образом, *допущение, что углы AXY и BYX прямые*, эквивалентно *постулату о параллельных*. Это допущение теперь называется *гипотезой прямого угла* (хотя здесь оба угла прямые, но вместо множественного числа употребляется единственное).



Известно, что гипотеза прямого угла ведет к непротиворечивой, практически полезной геометрии, а именно к евклидовой геометрии, переобновленной, чтобы устоять перед современными требованиями логической строгости. Но нарисованная фигура наводит на мысль о двух других возможностях: каждый из равных углов AXY и BYX *меньше* прямого угла — *гипотеза острого угла*; каждый из равных углов AXY и BYX *больше* прямого угла — *гипотеза тупого угла*. Поскольку всякий угол может удовлетворять одному и только одному из требований, т. е. быть *равным*, *меньшим* или *большим* прямого угла, три приведенные гипотезы исчерпывают все возможные случаи.

Повседневный опыт предрасполагает нас к первой гипотезе.

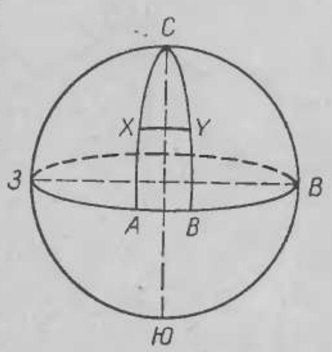
боков треугольника. Всякий раз, следовательно, две линии встречаться на плоскости не могут, когда они с третьей составляют углы, сумма которых π. Они могут не пересекаться и в том случае, когда эта сумма $< \pi$, если к тому предположить сумму углов в треугольнике $< \pi$. Итак, все линии на плоскости в отношении к одной могут быть разделены на *сходящиеся* и *несходящиеся*. Последние будут называться параллельными, если они представляют границу, или, иначе сказать, переход от одних к другим между всеми «выходящими из одной точки» (см. рисунок на с. 227).

Чтобы убедиться, что каждая из двух других не так бессмысленна, как это может сперва показаться, рассмотрим нечто более близкое к действительному человеческому опыту, чем в высшей степени идеализированная «плоскость», в которой Евклид представлял нарисованными свои фигуры. Но прежде заметим, что ни гипотеза острого угла, ни гипотеза тупого угла не дает нам возможности доказать евклидов постулат о параллельных, потому что, как было сказано выше, постулат Евклида *эквивалентен* гипотезе *прямого угла* (в смысле взаимной выводимости: гипотеза прямого угла и необходима и достаточна для вывода постулата о параллельных). Следовательно, если мы преуспеем в построении геометрий на одной из двух новых гипотез, мы не найдем в них параллельных в евклидовом смысле.

Чтобы сделать эти гипотезы менее неблагоразумными, чем они могут казаться с первого взгляда, предположим, что Земля является идеальной сферой (без неправильностей в виде гор и т. д.). Плоскость, проведенная через центр этой воображаемой Земли, пересечет ее поверхность по *большому кругу*. Предположим, что мы желаем перейти на поверхности Земли из точки A в точку B, причем хотим двигаться по кратчайшему пути. Это задача «плавания по большому кругу». Вообразим плоскость, проходящую через центр Земли и данные точки A и B (имеется одна и только одна такая плоскость); эта плоскость пересечет поверхность Земли по большому кругу. Чтобы путешествие было кратчайшим, мы движемся из A в B по меньшей из двух дуг полученного большого круга, соединяющих эти точки. Если точки диаметрально противоположны, можно двигаться по любой из двух дуг.

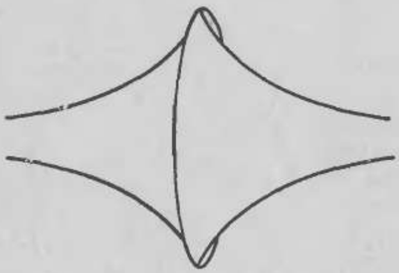
Предыдущий пример подводит к важному определению *геодезической линии поверхности*, которое теперь будет объяснено. Только что мы видели, что *кратчайшей* линией, соединяющей данные две точки на поверхности сферы, является дуга большого круга, проходящего через них. Мы также видели, что *самое длинное* расстояние между двумя точками будет представлять собой *другая* дуга того же большого круга (если точки диаметрально противоположны, самое короткое и самое длинное расстояния равны). В главе о Ферма понятия «наибольший» и «наименьший» были заменены общим наименованием «крайний» или «экстремум». Вспомним теперь, что на плоскости отрезок прямой, соединяющий две точки, определяется обычно как «*кратчайшее расстояние* между этими двумя точками». Перенося это на сферу, мы говорим, что *прямой линии* на *плоскости* соответствует *большой круг* на *сфере*. Переходя к *произвольной поверхности*, назовем *геодезическими линиями этой поверхности все экстремальные линии, соединяющие любые две точки поверхности*. Таким образом, на плоскости геодезическими являются евклидовы прямые, на сфере — дуги большого круга. Геодезическую линию можно представить себе как положение нити, плотно прилегающей к поверхности и по возможности натянутой между двумя точками поверхности.

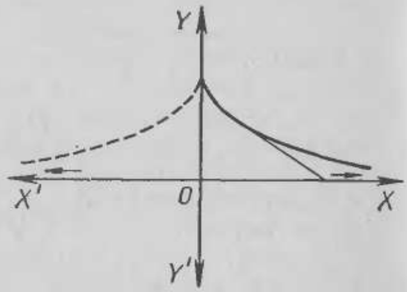
Далее, по крайней мере в навигации, океан не мыслится как плоская поверхность (евклидова плоскость), если даже интересуются небольшими расстояниями; он принимается, и то очень приближенно, за часть поверхности сферы, так что геометрия «плавания по большому кругу» не является евклидовой. Таким образом, евклидова геометрия не является единственной полезной для человека геометрией. На плоскости две геодезические пересекаются только в *одной* точке, *пока* они не становятся параллельными, когда они вообще не пересекаются (евклидова геометрия), но на сфере *любые* две геодезические всегда пересекаются ровно в *двух* точках. Далее, на плоскости никакие две геодезические не могут охватывать части плоскости, в то время как на сфере любые две геодезические всегда охватывают часть сферы.



Представим теперь экватор на сфере и две геодезические, проведенные перпендикулярно экватору через Северный полюс. В северном полушарии образуется криволинейный треугольник, две (боковые) стороны которого равны между собой. Каждая сторона этого треугольника является дугой геодезической линии. Нарисуем любую другую геодезическую, пересекающую равные боковые стороны так, что отсеченные их дуги (идущие к экватору) равны. Мы получим *на сфере* четырехстороннюю фигуру, соответствующую фигуре $AXYB$, которую мы имели выше на плоскости. Два угла при основании этой фигуры являются прямыми и соответствующие стороны равны, как и раньше, *но каждый из равных углов при X и Y теперь больше прямого угла.* Так в геометрии плавания по большому кругу, в высшей степени практичной и гораздо более близкой реальному человеческому опыту, чем идеализированные чертежи элементарной геометрии, выполняется не евклидов постулат о параллельных, или его эквивалент — гипотеза прямого угла, а гипотеза тупого угла, которая порождает другую геометрию.

Подобным же способом, изучая другую, менее известную поверхность, мы можем сделать приемлемой гипотезу острого угла. Эта поверхность выглядит как два бесконечно длинных пастушьих рожка, сложенных вместе широкими концами. Чтобы описать поверхность более точно, мы должны ввести плоскую кривую, называемую *трактриссой*. Пусть две прямые XOX' и YOY' пересекаются на горизонтальной плоскости под прямым углом в точке O и образуют декартову систему координат. Вообразим нерастяжимую нить, лежащую вдоль оси YOY', один конец которой находится в точке O, а к другому привязан маленький тяжелый шарик. Потянем за первый конец так, чтобы он двигался вдоль прямой OX. Вслед за шариком опишется половина трактриссы; другая половина опишется при перемещении конца нити вдоль OX' и, конечно, является только симметричным отображением относительно OY первой половины. В каждом случае чертеж предполагается продолженным неограниченно — «до бесконечности». Теперь представим, что трактрисса вращается вокруг XOX'. Полученная фигура вращения, напоминающая сложенные два рожка, называется *псевдосферой* (она имеет постоянную отрицательную кривизну). Если на этой поверхности нарисовать, как раньше, используя геодезические, четырехсторонник с двумя равными сторонами и двумя прямыми углами, мы найдем, что выполняется гипотеза острого угла.

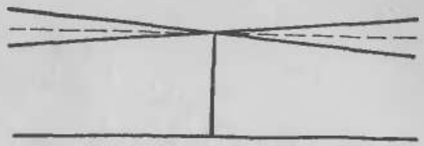




Таким образом, гипотезы прямого угла, тупого угла и острого угла верны соответственно на евклидовой плоскости, на сфере и на псевдосфере, и во всех случаях «прямыми» являются *геодезические* (*экстремальные*) линии. Евклидова геометрия представляет собой предельный, или вырожденный, случай геометрии сферы, когда ее радиус становится бесконечным.

Вместо того чтобы строить геометрию Земли, какой ее теперь знают люди, Евклид, очевидно, исходил из предположения, что Земля плоская. Так было сделано если не им, то его предшественниками, и со временем теория «пространства», или геометрия, доставившая ему голые *предположения*, которые он воплотил в свои постулаты, уже воспринималась по виду как собрание почтенных и неизменно необходимых истин, открытых человечеству более возвышенным умом как подлинная суть всех материальных вещей. Понадобилось больше 2000 лет, чтобы освободить геометрию от вечных истин, и это сделал Лобачевский.

Если воспользоваться словами Эйнштейна, Лобачевский *бросил вызов одной аксиоме*. Всякий, кто бросает вызов «общепринятой истине», кажущейся необходимой или приемлемой подавляющему большинству здравомыслящих людей не менее 2000 лет, вручает этому большинству если не свою жизнь, то свою научную репутацию. Эйнштейн сам бросил вызов аксиоме, что два события в *разных местах* могут происходить *в одно и то же время*, и, анализируя это давнее предположение, пришел к специальной теории относительности. Лобачевский бросил вызов предположению, что евклидов постулат параллельных, или, что равносильно, гипотеза прямого угла являются необходимыми для непроти-



воречивой геометрии, и подкрепил свой вызов созданием геометрии, основанной на гипотезе острого угла, в которой имеется не *одна* прямая, параллельная данной прямой и проходящая через данную точку, а *две*. Ни одна из этих двух параллельных прямых Лобачевского не пересекается с прямой, которой они обе параллельны, так же как и любая прямая, лежащая внутри угла, образованного двумя указанными параллельными прямыми, и проходящая через фиксированную точку. Эта кажущаяся странной ситуация «реализуется» геодезическими на псевдосфере.

Для повседневных целей (измерение расстояний и т. д.) различие между геометриями Евклида и Лобачевского слишком мало, чтобы его учитывать, но не это самое важное, а то, что каждая из них совместна сама по себе и каждая адекватна человеческому опыту. Лобачевский отменил *необходимую* «истину» евклидовой геометрии. Его геометрия была первой из нескольких, построенных его последователями. Некоторые из этих геометрий заменяют евклидову (например, риманова геометрия общей теории относительности) и сегодня по крайней мере так же важны для все еще живущих и растущих частей физической науки, как была и есть сама евклидова геометрия в сравнительно статичных классических частях. Для одних целей последняя является наилучшей или по крайней мере достаточной, для других она не подходит, и требуется неевклидова геометрия.

В течение 2200 лет в некотором смысле верилось, что Евклид своей системой геометрии открыл абсолютную истину или необходимый способ человеческого познания. Созданное Лобачевским было настоятельным доказательством ошибочности этого верования[1]. Смелость этого вызова и порожденный им успех вдохновили математиков и ученых вообще бросить вызов другим «аксиомам» или принятым «истинам», например «принципу» причинности, которые в течение столетий казались также необходимыми для направления мышления, как постулат Евклида, до того, как Лобачевский отбросил его.

Сильный стимул от метода Лобачевского бросать вызов аксиомам, вероятно, все еще должен ощущаться. Это не преувеличение называть Лобачевского Коперником геометрии, так как геометрия есть только часть более широкой области, которую он обновил. Может быть, даже было бы справедливым называть его Коперником всего мышления.

[1] И тем самым ошибочности соответствующих положений философии Канта.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ВЕЛИКИЙ АЛГОРИТМИСТ

ЯКОБИ (1804—1851)

В современном анализе все настоятельнее провозглашается тенденция замены вычислений идеями; тем не менее существуют определенные ветви математики, в которых вычисления сохраняют свои права. — П. Г. ЛЕЖЕН-ДИРИХЛЕ

ИМЯ ЯКОБИ часто фигурирует в науке, но за ним стоит не всегда один и тот же человек. В 1840-х годах у очень знаменитого Морица Германа Якоби (М. Г. Я.)[1] был сравнительно малоизвестный брат Карл Густав Якоби (К. Г. Я.), чья репутация была лишь тенью славы брата. Сегодня все переменилось. К. Г. Я. стал бессмертным, в то время как М. Г. Я. быстро исчезает в безвестности. М. Г. Я. достиг славы как основатель модного знахарства гальванопластики. Репутация К. Г. Я., значительно более узкая, но настолько же более высокая, обязана математике. При жизни математик Якоби всегда конфузился при упоминании своего знаменитого брата или, что еще хуже, был доволен родством с выдающимся шарлатаном. Но иногда его терпение лопалось. «Извините, прекрасная дама,— сказал он одной поклоннице М. Г. Я., которая сделала ему комплимент по поводу наличия такого замечательного брата, — я сам себе брат». В другой раз К. Г. Я. буркнул: «Не я его брат, а он мой брат». Именно так выглядят их родственные отношения сегодня.

Карл Густав Якоб Якоби родился в Потсдаме, в Пруссии, 10 декабря 1804 г. и был вторым сыном процветающего банкира, Симона Якоби и его жены, в девичестве Леман. Всего у них было четверо детей: три мальчика — Мориц, Карл и Эдуард — и девочка Тереза. Первым учителем Карла был его дядя по материнской линии, обучавший его классическим языкам и математике; он подготовил Карла к поступлению в Потсдамскую гимназию в 1816 г. в возрасте 12 лет. С самого начала Якоби проявлял признаки «универсального ума», как выразился ректор гимназии в 1821 г.,

[1] Якоби Мориц Герман (Борис Семенович; 1801—1874) — физик и электротехник, член Петербургской Академии наук с 1839 г. Он сконструировал первый электродвигатель и был автором многочисленных изобретений по практическому применению электричества. Принял русское подданство и считал Россию «вторым отечеством, будучи связан с ней не только долгом подданства и тесными узами семьи, но и личными чувствами гражданина».

когда Якоби оставил ее, чтобы поступить в Берлинский университет. Подобно Гауссу, Якоби мог бы легко добиться больших успехов в филологии, если бы математика не притягивала его сильнее. Видя, что юноша обладает чертами математического гения, его учитель (Генрих Бауэр) после длительной борьбы, в ходе которой Якоби восставал против рутинного обучения математике, позволил ему заниматься самому.

Математическое развитие молодого Якоби в значительной мере было похоже на развитие его знаменитого соперника Абеля (1802—1829). Якоби также обратился к классикам математики. Труды Эйлера и Лагранжа научили его алгебре и анализу, ввели в теорию чисел. Эта ранняя самостоятельность в занятиях позволила Якоби определить направление его первой выдающейся работы, именно по эллиптическим функциям, так как Эйлер, виртуоз изобретательности, нашел в Якоби блестящего последователя. В способности свободно манипулировать алгебраическими выражениями Эйлер и Якоби не имели соперников, пока в нашем столетии не появился индийский математический гений — Сриниваза Рамануджан. Абель тоже мастерски обращался с формулами, когда хотел, но его гений был более философского и менее формального характера, чем у Якоби. По своему стремлению к строгости Абель ближе к Гауссу, чем Якоби. Дело не в том, что в работах Якоби недостаточно строгости — ее хватало, а в том, что он опирался больше на формализм, чем на ригоризм.

Абель был на два года старше Якоби. Не зная, что Абель начал в 1820 г. штурм общего уравнения пятой степени, Якоби в том же году сделал попытку его решения, сведением к уравнению $x^5 - 10q^2x = p$. Он показал, что решение этого уравнения вытекает из решения некоторого уравнения десятой степени. Хотя попытка не увенчалась успехом, Якоби изучил большой отдел алгебры, так что он приписывал ей видное значение, как ступени в своем математическом образовании. Но в отличие от Абеля, ему, кажется, не пришло в голову, что общее уравнение пятой степени может быть алгебраически неразрешимым. Этот промах или отсутствие воображения, как бы мы его не назвали, указывает на характер различий между Якоби и Абелем. Будучи крайне объективным, Якоби сказал об одном из шедевров Абеля: «Это выше моих похвал и выше моих работ».

Студенческая жизнь Якоби продолжалась с апреля 1821 г. по май 1825 г. В первые два года он уделял почти одинаковое время философии, филологии и математике. По математике предлагалось немного для честолюбивого студента. Якоби продолжал частным образом изучать классиков математики. Он коротко охарактеризовал университетские лекции по математике как пустословие. Кстати, Якоби был обычно резким, хотя и умел быть раболепным, как всякий придворный, когда старался выхлопотать заслуживающему того другу-математику лучшее положение.

Пока Якоби прилежно становился математиком, Абель уже вступил на ту же дорогу, которая привела Якоби к славе. В письме

Хольмбое от 4 августа 1823 г. Абель пишет, что он занят эллиптическими функциями: «Та небольшая работа, которую вы помните, имеет дело с обращениями эллиптических трансцендентностей, и я доказал нечто [как кажется] невозможное; я умолял Дегена как можно скорее прочесть работу с начала до конца, но он не смог ни найти ложного заключения, ни понять, в чем ошибка; один бог знает, как мне теперь выбираться из этого положения». По курьезному совпадению Якоби, наконец, решил целиком сосредоточиться на математике именно тогда, когда Абель написал это. Два года разницы в возрасте двадцати лет значат больше, чем два десятилетия в зрелые годы. Абель сделал бурный старт, но Якоби, не подозревая, что у него есть соперник, скоро догнал его. Первая значительная работа Якоби относилась к исследуемой Абелем области эллиптических функций. Перед тем как перейти к этому предмету, опишем в общих чертах его деятельную жизнь.

Решив полностью посвятить себя математике, Якоби в письме дяде Леману дает оценку труду, на который он себя обрекает: «Колоссы, воздвигнутые работами Эйлера, Лагранжа и Лапласа, требуют огромных сил и крайнего напряжения мысли от каждого, кто хочет проникнуть в их внутреннюю сущность, а не скользить по поверхности. Чтобы покорить этих колоссов и не бояться быть сокрушенным ими, нужно с неослабевающим упорством карабкаться вверх, пока не окажешься на высшей точке, откуда откроется вся панорама. Только тогда можно с просвещенным духом спокойно работать над деталями».

Провозгласив это, Якоби стал одним из самых больших тружеников во всей истории математики.

В августе 1825 г. Якоби получает докторскую степень за работу по частным дробям и смежным вопросам, не очень теперь интересным. Хотя Якоби рассмотрел свою задачу со всей общностью и значительной изобретательностью, он не показал еще признаков своего великолепного таланта. Одновременно с приобретением докторской степени Якоби готовил себя к профессии преподавателя.

После защиты Якоби читал в Берлинском университете лекции по приложениям анализа к поверхностям и пространственным кривым (кривым, образованным пересечением поверхностей). С первых же лекций стало ясно, что Якоби — врожденный педагог. Позже, когда он начал стремительно развивать свои идеи, он стал самым вдохновляющим учителем математики своего времени.

Якоби, по-видимому, был первым, кто регулярно прививал студентам дух исследования, рассказывая им о последних своих результатах и побуждая их к математическому творчеству. Он верил, что научить молодого человека плавать можно, только бросив его в ледяную воду, чтобы он или утонул, или выплыл. Многие студенты откладывают попытки собственных исследований до того времени, когда они выучат все, что сделали в данной области другие. В результате только малая часть из них получает навык самостоятельной работы. Якоби боролся с такой замедляющей рост эрудицией. Он говорил своим студентам: «Ваш отец никогда не женился бы и вы не родились бы на свет, если бы он решил познакомиться со *всеми* девушками прежде, чем выбрать жену».

Вся жизнь Якоби прошла в преподавании и исследованиях, не считая одного неприятного периода, о котором будет сказано дальше, и эпизодических поездок на научные съезды в Англии и другие страны, а также каникул, когда его принуждали отдохнуть после очень напряженного труда. Формальное описание его жизни не возбуждает воображения, но у профессиональных ученых редко бывает иначе.

Преподавательский талант Якоби привлек к нему внимание. После полугода чтения лекций в Берлине он был назначен доцентом Кенигсбергского университета (в 1826 г.). Годом позже некоторые из результатов по теории чисел (относящиеся к кубической взаимности; см. главу о Гауссе), опубликованные Якоби, восхитили Гаусса[1]. Поскольку Гаусса нелегко было расшевелить, министерство просвещения быстро учло это и назначило Якоби через головы его коллег экстраординарным профессором — это был заметный шаг для молодого человека 23 лет. Естественно, что люди, которых он обошел, возмущались его назначением, но еще через 2 года (в 1829 г.), когда Якоби опубликовал свой первый шедевр «Новые основания теории эллиптических функций», они первыми признали, что он заслужил его, и поздравили своего блестящего молодого коллегу.

В 1832 г. отец Якоби умер. До этого Карл не испытывал необходимости зарабатывать себе на жизнь. Его благополучие продолжалось еще около 8 лет, после чего в 1840 г. дела семьи пошли хуже. Якоби в возрасте 36 лет лишился состояния, имея к тому же на своем попечении и разоренную мать.

Гаусс все это время следил за феноменальной активностью Якоби с интересом, превосходившим обычное научное любопытство, так как многие открытия Якоби пересекались с некоторыми открытиями его юности, нигде не опубликованными. Он как будто встречался с молодым человеком лично: Якоби навестил Гаусса в сентябре 1839 г. Кажется, Гаусс боялся, что финансовый крах Якоби может плохо отразиться на его занятиях математикой, но Бессель успокоил его: «К счастью, такой талант нельзя разрушить, но я бы желал, чтобы он обладал свободой, которую приносят деньги».

Разорение не оказало никакого влияния на математическую деятельность Якоби. Независимо от превратностей судьбы он продолжал работать так же усердно, как и всегда. В 1842 г. Якоби и Бессель присутствовали на собрании Британской ассоциации в Манчестере, где Якоби и Гамильтон впервые встретились. Одним из самых славных дел Якоби было продолжение работы Гамильтона

[1] Ф. Клейн в своей известной книге о развитии математики в XIX в. отмечал: «Гаусс весьма неблагосклонно отнесся к Якоби, резкий саркастический характер которого был ему весьма антипатичен».

по динамике и в определенном смысле завершение того, что забросил Гамильтон[1].

В этот момент своей карьеры Якоби внезапно попробовал занять положение, более заметное, чем положение простого математика. Мы расскажем здесь о неудавшейся политической авантюре, предпринятой однажды знаменитым математиком.

Через год после поездки в Англию Якоби испытывал сильнейшее переутомление. Развитие науки в Германии в 1840-х годах зависело от доброй воли принцев и королей, чьи владения объединились позже в Германскую империю. Добрым ангелом Якоби был король Пруссии, который, видимо, вполне понимал, какую славу приносят королевству исследования Якоби. Поэтому, когда Якоби заболел, благожелательный король убедил его взять длительный отпуск и пожить в Италии с ее мягким климатом столько времени, сколько ему захочется. Пробыв 5 месяцев в Риме и Неаполе с Борхардтом и Дирихле, Якоби вернулся в Берлин в июне 1844 г. Ему было разрешено находиться в Берлине, пока его здоровье полностью не восстановится. Однако в результате интриг ему не дали профессорской должности в университете, хотя как члену Академии ему разрешалось читать лекции по любому курсу, какой он пожелает. Далее, практически из своего собственного кармана король назначил Якоби приличное содержание.

После всего этого благородства, проявленного королем, можно было подумать, что Якоби снова погрузится в математику. Но по глупейшему совету своего врача он начал ввязываться в политику, «чтобы успокоить свою нервную систему». Когда разразился демократический подъем 1848 г., Якоби созрел для политики. По совету друга простодушный математик ступил на политическую арену подобно наивному, соблазнительно упитанному миссионеру, высадившемуся на остров людоедов. Конец был таким же.

Умеренно либеральный клуб, которому ловкий друг представил его, обсуждал кандидатуру Якоби на майские выборы 1848 г. в парламент. Его красноречие перед членами клуба убедило наиболее мудрых, что он не годится для них. Вполне возможно, заявили они, что королевский пенсионер Якоби и является либералом, каковым он себя провозглашает, но еще вероятнее, что он приспособленец, лицемер и лазутчик роялистов. Якоби опроверг эти оскорбительные предположения в достойной речи, наполненной неотразимой логикой. Он не был избран.

Но это еще не все. Кто может обвинить министра просвещения, что после майских выборов он стал выяснять, выздоровел ли Якоби в той мере, чтобы вернуться в Кенигсберг? Или что удивительного в том, что король через несколько дней прекратил выплату своего пособия? В конце концов, даже король может рассердиться, когда рот, который он кормит, начинает кусаться. Тем не менее отчаян-

---

[1] Независимо от Якоби это было сделано также М. В. Остроградским (1801—1861).

ное положение Якоби не может не вызвать сочувствия. Женатый, с семью маленькими детьми, он остался практически без гроша в кармане. Друг из Готы приютил его жену и детей, в то время как Якоби снял грязную комнатушку в гостинице и продолжал свои исследования.

Ему было в это время (1849) 45 лет, и он был самым знаменитым математиком Европы после Гаусса. Услышав о его бедственном положении, Венский университет стал закидывать удочку. Интересно заметить, что Литтров, венский друг Абеля, принимал видное участие в переговорах. Наконец, когда было уже получено официальное приглашение, Александр фон Гумбольдт поговорил с обиженным королем; пособие было восстановлено и Германия не лишилась Якоби. Он остался в Берлине и был снова в чести, но держался далеко от политики.

Эллиптические функции — предмет, который был темой первой крупной работы Якоби, — уже упоминались нами столько раз, что как будто исчерпали полагающееся им место, так как в конце концов теперь они являются лишь частью более обширной теории — функций комплексного переменного. Эта теория, в свою очередь, постепенно утрачивает острый интерес среди постоянно меняющихся объектов математики. Но поскольку теория эллиптических функций будет упоминаться, мы попытаемся вкратце оправдать ее, казалось бы, незаслуженную известность.

Ни один математик не будет оспаривать, что теория функций комплексного переменного была одной из более важных областей математики XIX в. Одну из причин, по которой она играла такую важную роль, можно здесь напомнить. Гаусс показал, что *комплексные* числа необходимы и достаточны, чтобы любому алгебраическому уравнению приписать корень. Возможен ли другой, более общий класс «чисел»? Как получить такие «числа»?

Вместо того чтобы рассматривать *комплексные* числа как результат попыток решить определенное несложное уравнение, скажем $x^2 + 1 = 0$, мы можем также прийти к ним от другой задачи элементарной алгебры — от задачи *разложения на множители*. Для разложения на множители *первой* степени выражения $x^2 - y^2$ не требуется ничего более таинственного, чем положительные и отрицательные целые числа: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Но та же задача для выражения $x^2 + y^2$ требует мнимых чисел: $x^2 + y^2 = (x + y \cdot \sqrt{-1}) \cdot (x - y \cdot \sqrt{-1})$. Продолжая идти одним из многих возможных путей, можно искать разложение на два множителя *первой* степени выражения $x^2 + y^2 + z^2$. Будет ли для этого достаточно положительных, отрицательных и мнимых коэффициентов? Или мы должны изобрести новый вид «чисел», чтобы решить задачу? Оказалось, что именно так. Во множестве этих новых «чисел» возникло нарушение одного из основных правил алгебры: стало неверным, что *порядок* сомножителей не влияет на *произведение*, т. е. для новых чисел неверно, что $a \times b$ равно $b \times a$. Заметим, что элементарная алгебраическая задача разложения на множители быстро ведет к вещам, для которых комплексные числа становятся недостаточными.

Как далеко можем мы зайти в возможно бóльшем *обобщении понятия числа*, желая сохранить для этих чисел *все* привычные законы обычной алгебры? В конце XIX в. было доказано, что комплексные числа $x + iy$, где x, y — действительные числа и $i = \sqrt{-1}$, являются наиболее общими числами, для которых еще выполняются обычные правила действий. Вспомним, что действительные числа соответствуют расстояниям, измеряемым вдоль прямой линии от данной ее точки в том или ином направлении (положительном или отрицательном), и что график функции $y = f(x)$, построенный в декартовых координатах, дает нам наглядное изображение функции y *действительного* переменного x. Математики XVII и XVIII столетий только так и представляли себе функции, с которыми имело дело. Но если обычная алгебра и ее распространения на анализ, который они применяли к своим функциям, так же точно применимы к комплексным числам, которые включают в себя действительные числа как вырожденный случай, то естественно предположить, что многие из вещей, открытых пионерами анализа, составляют меньше половины возможного богатства. В частности, интегральное исчисление содержит много необъяснимых аномалий, которые могут быть поняты только тогда, когда поле действий расширяется до крайних пределов и рассматриваются функции *комплексного* переменного[1], введенные Гауссом и Коши.

Важность эллиптических функций во всем этом фундаментальном развитии трудно переоценить. Гаусс, Абель и Якоби детальной разработкой теории эллиптических функций, в которой комплексные числа появляются неизбежно, обеспечили испытательную площадку для открытия и совершенствования общих теорем теории функций комплексного переменного. Эти две теории, казалось, были самой судьбой предназначены для взаимного пополнения и для этого есть причина, так же как для глубокой связи эллиптических функций с гауссовской теорией квадратичных форм. Без бесчисленных подсказок, полученных общей теорией от специальных примеров более содержательных теорем об эллиптических функциях, теория функций комплексного переменного развивалась бы гораздо медленнее (для математически подготовленного читателя можно сослаться на теорему Лиувилля и множественную периодичность с ее влиянием на теорию алгебраических функций и их интегралов). Если даже некоторые из этих великих памятников математики XIX в. и подернулись уже туманом времени, мы не должны забывать, что теорема Пикара об исключительных значениях функции в окрестности существенно особой точки — одна из наи-

---

[1] Элементарные функции комплексного переменного плодотворно рассматривались ранее Эйлером. Среди полученных им результатов выдающееся место занимает бессмертная формула анализа $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

более вдохновляющих в современном анализе — была впервые доказана, исходя из теории эллиптических функций. После этого частичного обзора причин важности теории эллиптических функций в математике прошлого века мы можем перейти к рассмотрению кардинального вклада Якоби в развитие этой теории.

История эллиптических функций весьма запутана, и, хотя она представляет значительный интерес для специалистов, она не для широкого читателя. Ввиду этого мы опустим фактические данные (письма Гаусса, Абеля, Якоби, Лежандра и других), на которые опирается дальнейшее краткое резюме.

Прежде всего установлено, что Гаусс предвосхитил как Абеля, так и Якоби на целых 27 лет в некоторых из самых поразительных их результатов. Действительно, Гаусс сказал, что «Абель шел той же дорогой, которой шел я в 1798 г.». Что это верно, может убедиться каждый, кто изучит материалы, опубликованные после смерти Гаусса.

Во-вторых, как будто общепринято, что Абель опередил Якоби в некоторых важных деталях, но Якоби начал свои исследования, ничего не зная о работах своего соперника.

Главным свойством эллиптических функций является их *двоякая периодичность* (открытая Абелем в 1825 г.): если $E(x)$ — эллиптическая функция, то существуют два различных числа, скажем p_1 и p_2, таких, что

$$E(x + p_1) = E(x) \text{ и } E(x + p_2) = E(x)$$

для всех значений переменной x[1].

Наконец, в историческом плане, несколько трагична роль, которую сыграл Лежандр. В течение 40 лет он «мыкался» с эллиптическими *интегралами* (*не* эллиптическими *функциями*), не заметив того, что Абель и Якоби увидели почти сразу, а именно, что при *обращении* его точки зрения все становится бесконечно проще. Эллиптические интегралы впервые появились в задаче стыскания длины дуги эллипса. Можно добавить несколько простых формул, которые сделают более ясным пункт, упущенный Лежандром.

Если $R(t)$ есть многочлен от t, то интеграл типа

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{R(t)}}\, dt$$

называется *эллиптическим интегралом*, когда $R(t)$ 3-й или 4-й степени; если степень $R(t)$ выше 4-й, то интеграл называется *абелевым* (так как одна из важнейших работ Абеля посвящена таким интегралам). Если $R(t)$ имеет только 2-ю степень, то интеграл выражается через элементарные функции. В частности,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \arcsin x$$

---

[1] При этом отношение $\frac{p_1}{p_2}$ является *комплексным* числом.

(arcsin x есть «угол, синус которого равен x»). Если же в выражении

$$y = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

рассмотреть *верхний предел x* интеграла как функцию от самого интеграла, т. е. от y, мы получим синус. Такое *обращение* задачи устранило большинство трудностей, которые Лежандр пытался преодолеть в течение 40 лет. Подлинная теория этих важных интегралов устремилась вперед после преодоления этих трудностей как бы сама собой — подобно сплавному лесу на реке после ликвидации затора.

Когда Лежандр постиг сделанное Абелем и Якоби, он сердечно приветствовал их, хотя и понимал, что их более простой подход (обращение задачи) сводит на нет то, что должно было стать шедевром его сорокалетнего труда. Для Абеля, увы, похвала Лежандра была уже запоздалой, но для Якоби она явилась вдохновением. Переписка между молодым человеком чуть старше 20 лет и почти 50-летним ветераном, исполненная взаимных искренних похвал и благодарностей, принадлежит к самым блестящим образцам эпистолярной научной литературы. Единственная резкая нота — это высказанное Лежандром принижение заслуг Гаусса, которого Якоби энергично защищает. Но поскольку Гаусс не снизошел до опубликования своих исследований (он замышлял большую работу об эллиптических функциях, когда Абель и Якоби опередили его своими публикациями), вряд ли можно упрекать Лежандра за его совершенно ошибочное мнение по этому вопросу. Из-за недостатка места мы опускаем выдержки из этой прекрасной переписки (она в I томе Собрания сочинений Якоби).

Совместное с Абелем создание теории эллиптических функций было только малой, хотя и очень важной частью того, что сделал Якоби. Только перечисление всех тех предметов, которые он обогатил за свою недолгую творческую жизнь (меньше 25 лет), заняло бы больше места, чем можно уделить одному человеку в очерке, подобном нашему. Поэтому мы упомянем лишь несколько из замечательных вещей, им сделанных.

Якоби первым применил эллиптические функции к теории чисел. Этот прием стал излюбленным у некоторых выдающихся математиков, последователей Якоби. Здесь открылась причудливо запутанная панорама, где хитроумные изобретения алгебры внезапно открывают неожиданные соотношения между целыми числами. Именно таким образом Якоби доказал знаменитое утверждение Ферма, что любое целое (положительное) число 1, 2, 3... есть сумма четырех квадратов (включая, возможно, нуль как целое), и, более того, его замечательный анализ указал ему, *сколькими способами* любое заданное целое число можно представить такой суммой*.

* Если n нечетно, то число способов равно восьмикратной сумме всех делителей n (включая единицу и само n); если n четно, то число способов равно двадцатичетырехкратной сумме всех нечетных делителей n.

Для тех, кто обладает более практическими вкусами, мы можем упомянуть работу Якоби по динамике. В этом предмете, имеющем фундаментальную важность как для прикладной науки, так и для теоретической физики, Якоби добился первых значительных результатов после Лагранжа и Гамильтона[1]. Читатели, знакомые с квантовой механикой, вспомнят о важной роли, которую играет в некоторых представлениях этой теории дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби[2]. Его работы открыли новую эру в дифференциальных уравнениях[3].

В алгебре, если говорить только об одной вещи из многих, Якоби свел теорию определителей к простой форме, теперь хорошо известной каждому студенту.

В теорию тяготения Ньютона — Лапласа — Лагранжа Якоби внес значительный вклад своими великолепными исследованиями функций, часто появляющихся в этой теории, и приложениями эллиптических и Абелевых функций к изучению притяжения эллипсоидов.

Намного оригинальнее его большое открытие в области Абелевых функций. Эти функции возникают из обращения Абелевых интегралов, подобно тому как эллиптические функции возникают из обращения эллиптических интегралов (эти термины мы уже поясняли выше). Здесь не было ничего, что могло бы подсказать ему путь, и долгое время он блуждает в лабиринте без нити. Соответствующие обратные функции в простейшем случае являются функциями *двух* переменных с *четырьмя* периодами; в общем случае выступают функции n переменных с $2n$ периодами; для эллиптических функций $n = 1$. Это открытие явилось для анализа XIX в. тем же, чем открытие Америки Колумбом для географии XV в.

Ранняя смерть Якоби наступила не от переутомления, как предсказывали его более ленивые друзья, а от оспы — 18 февраля 1851 г., на 47-м году жизни. Расставаясь с этим замечательным мыслителем, мы процитируем его ответ великому французскому ученому в области математической физики Фурье, который упрекал Абеля и Якоби за «напрасную трату» времени на эллиптические функции, когда оставались еще нерешенные задачи в теории теплопроводности.

«Это верно, — заявляет Якоби, — что, по мнению господина Фурье, главной целью математики была общественная полезность и объяснение явлений природы. Но такой философ, как он, должен был бы знать, что единственной целью науки является честь чело-

---

[1] Они были получены примерно одновременно с аналогичными результатами М. В. Остроградского (1801—1861), но опубликованы позже.

[2] Его называют также уравнением Гамильтона — Остроградского, поскольку Остроградский дал независимо от Якоби соответствующее развитие теории Гамильтона.

[3] Параллельно с соответствующими работами Остроградского.

веческого разума и что с этой точки зрения вопрос о числе так же важен, как и вопрос о системе мира».

Если бы Фурье мог снова увидеть блики Луны, он бы ужаснулся тому, что случилось с анализом, изобретенным им для «общественной полезности и объяснения явлений природы». Он стал теперь лишь деталью в чрезвычайно обширной теории граничных задач, представляющей собой чистейшую математику, в которой анализ, изобретенный Фурье, нашел свое место и оправдание. Воздается ли этими современными исследованиями честь «человеческому разуму», предоставим судить специалистам.

ГЛАВА ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ[1]

ЗВЕЗДЫ ВОСТОКА

АЛ-ХОРЕЗМИ, ОМАР ХАЙЯМ, МУХАММЕД АЛ-БЕРУНИ, НАСИР АД-ДИН АТ-ТУСИ, ДЖЕМШИД АЛ-КАШИ (IX—XV столетия)

Арабы сообщили математическим наукам тот особый и оригинальный характер, который перешел к европейцам и в руках их послужил в XVI столетии основой быстро развивавшегося превосходства перед наукой древних. — МИШЕЛЬ ШАЛЬ

ВЕДУЩУЮ РОЛЬ в развитии математики в средние века играли ученые стран Востока. Здесь, особенно в Индии и Китае, еще в древности сложилась своеобразная математическая культура, которая длительное время развивалась самобытно, а затем вступила во взаимодействие с культурой других стран, в том числе античной Греции.

Издавна присущий математике Востока арифметический, вычислительный характер способствовал развитию в ней приемов выполнения действий с числами, со временем все большими. Использовались различные системы счисления, в основном десятичные. Именно с арифметикой связано одно из самых выдающихся научных достижений — создание учеными Индии десятичной *позиционной* системы счисления. Она сложилась около 500 г. Решающим моментом в этом явилось изобретение *нуля*. Выполнение арифметических действий, особенно умножения и деления, значительно упростилось. Появилась возможность решения более сложных задач, разработки более удобных приемов решения уравнений, формирования понятий иррационального числа, отрицательного числа, чуждых древнегреческой математике с довлевшей над ней геометрической трактовкой величин.

Преемниками научного наследия Индии и Китая, а также Древней Греции прежде всего стали ученые стран Ближнего и Среднего Востока, вошедших в состав Арабского Халифата. В основном в течение VII столетия заселявшие Аравийский полуостров племена арабов покорили соседние народы. Вскоре их господство охватило громадные территории от отрогов Гималаев до Пиренейского полуострова, от южного Средиземноморья до закаспийских

[1] Написана редактором русского перевода.

пустынь. Завоевания проводились под знаменем новой религии — ислама. Язык этой религии, арабский, стал и государственным и основным научным языком. На нем в VII—XV столетиях сложилась и расцвела культура и наука стран ислама. Они создавались не только арабами, но и представителями завоеванных арабами стран, прежде всего среднеазиатских. Вклад побежденных был весьма значительным, а в некоторых направлениях определяющим.

И в Арабском Халифате, и в многочисленных мусульманских государствах, сменивших его и сменявших часто одно другого в результате завоеваний турок, монголов, а также междоусобных войн, жизненно важными были вопросы орошения, строительства, караванной и морской торговли. Решение их требовало развития астрономии и математики. Преуспевающие правители создают обсерватории, которые становятся центрами развития точных наук. В них изучаются, переводятся на арабский язык и комментируются сочинения ученых Индии и особенно Древней Греции. Наряду с этим достигаются существенные дальнейшие продвижения, прежде всего в арифметике, алгебре и тригонометрии. Многие ученые принимали в этом участие. Опишем кратко деятельность некоторых из наиболее выдающихся.

Большое значение для дальнейшего развития математики имели труды МУХАММЕДА АЛ-ХОРЕЗМИ (787— ~ 850). Его родиной было государство Хорезм в Средней Азии. Происходил он из зороастрийских жрецов. Благодаря своей учености занимал видное положение в «Доме мудрости», созданном халифами в Багдаде. Здесь он был ведущим математиком и астрономом. Сочинения ал-Хорезми по арифметике и алгебре обессмертили его имя.

Книга ал-Хорезми «Об индийском счете» являлась первой на арабском Востоке, в которой арифметика излагалась на основе позиционной десятичной системы счисления. Своей книгой он способствовал быстрому распространению этой системы во всем арабском мире, вплоть до мавританских государств Испании. В XII в. книга была переведена на латинский язык, и индийская арифметика стала известна в Западной Европе под названием алгоризма или алгоритма (по латинизированной форме имени автора). С конца XV в. она становится здесь основной. К этому времени, в частности, унифицировалась благодаря книгопечатанию запись цифр (на гравюре А. Дюрера «Меланхолия», датируемой 1514 г., они имеют привычный нам вид). Издавна эти цифры не совсем удачно называются арабскими. В наше время алгоритмом стали называть точное предписание для решения определенного класса задач. Важность этого понятия трудно переоценить. Оно широко используется в математике, в ее приложениях, в повседневной жизни.

Своим сочинением «Краткая книга об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы» ал-Хорезми положил начало формированию того раздела математики, который получил название *алгебры* (от соответствующего слова в наименовании книги). Операция ал-джабр (восполнение) означала перенос вычитаемых членов уравнения в другую часть его в виде прибавляемых членов; ал-мукабала (противопоставление) — сокращение равных членов в обеих частях. Эти операции позволяли любое уравнение первой или второй степени привести к одному из шести канонических типов, рассмотренных в книге. Для каждого типа ал-Хорезми дает лишь правило для нахождения положительных корней уравнений. Все излагается словесно на примерах с числовыми коэффициентами, без какой-либо символики. Типы уравнений, характеризуемые такими их представителями, как

$$x^2 + 10x = 39,\ x^2 + 21 = 10x,\ 3x + 4 = x^2$$

(у ал-Хорезми, соответственно, «квадрат и корни равны числу», «квадрат и число равны корням», «корни и число равны квадрату»,— так что допускались лишь положительные коэффициенты), охватывали все случаи, когда в уравнение входят и член с неизвестным, и член с его квадратом, и член в виде числа. Ал-Хорезми отмечает, что свою книгу он написал потому, что изложенное в ней «необходимо людям при разделе наследства, составлении завещаний, разделе имущества и в судебных делах, в торговле и всевозможных соглашениях, а также когда измеряют землю, прокладывают каналы, в геометрии и других подобных делах». В книге много примеров решения задач такого рода.

ОМАР ХАЙЯМ (1048—1131) получил широкую известность как автор своих знаменитых четверостиший. Вместе с тем он был великим математиком своего времени. Если в сочинениях ал-Хорезми главным образом систематизируются большей частью уже известные в другой форме результаты, то в трудах Хайяма много нового, ранее неизвестного. Это прежде всего относится к его сочинению «О доказательствах задач алгебры и ал-мукабалы» (1074). Здесь он, в частности, пишет: «...искусство алгебры и ал-мукабалы есть научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-нибудь известной вещи, по которой их можно определить... Алгебраические решения производятся с помощью уравнения, т. е., как это хорошо известно, приравнивания одних степеней другим». Так Хайям представляет новую математическую науку *алгебру* — науку об уравнениях (указанного вида). Его личный вклад в эту науку — создание общей теории решения уравнений третьей степени.

Математики Востока, предшественники Хайяма, решали, вслед за Архимедом, отдельные уравнения третьей степени. При этом использовался геометрический метод: неизвестное строилось путем нахождения точки пересечения двух конических сечений, которые подбираются соответственно решаемой задаче. Хайям показывает, что этим методом можно решить любое уравнение третьей степени. Основой его теории, геометрической по методу, является данная им классификация уравнений не выше третьей степени. Хайям выделяет 25 их различных типов. Среди них 6, рассмотренных ал-Хорезми, и 5, сводящихся к ним. Для решения всех их, как отмечает Хайям, достаточно «двух сочинений Евклида «Начала» и «Данные»», т. е. построений с помощью циркуля и линейки. Для решения остальных 14 типов требуется еще и то, что «содержится в двух книгах «Конических сечений»» Аполлония. Требуется использовать параболы, равносторонние гиперболы, окружности. Для каждого типа Хайямом указываются требуемая пара этих кривых, их построение с точками пересечения, определяющими корни, а также выясняются возможное число и границы положительных корней. Так, уравнение типа «куб и корни равны квадратам и числу» решается с помощью окружности и равносторонней гиперболы. Именно, на современном языке, решение уравнения

$$x^3 + bx = cx^2 + a$$

сводится к решению системы уравнений

$$y^2 = \left(x - \frac{a}{b}\right)(c - x), \quad x(\sqrt{b} - y) = \frac{a}{\sqrt{b}}.$$

К сожалению, когда Декарт и его современники занялись геометрическим построением корней уравнений, теория Хайяма оставалась для них неизвестной и им также пришлось отправляться от наследия древних греков. Свою геометрическую теорию Хайям построил после того, как ему не удалось получить их «числовое», собственно алгебраическое, в радикалах, решение. Это сделали лишь в XVI в. итальянцы Ферро и Тарталья, а опубликовал Кардано (1545).

Хайямом проводились глубокие исследования и в самой геометрии. Здесь его внимание привлекла теория параллельных. В сочинении «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» (1077), пытаясь доказать *постулат параллельных*, Хайям рассматривал четырехугольник, о котором шла речь в главе о Лобачевском. При опровержении гипотез острого и тупого углов, Хайям пользовался предположениями, которые равносильны постулату Евклида. По существу, рассмотрения Хайяма показали, что постулат Евклида следует из утверждения, что сумма внутренних углов плоского треугольника равна двум прямым. Они оказали влияние на Насир ад-Дина ат-Туси, о котором речь дальше. Исследования ат-Туси стали известны в Европе, где и свершилось открытие неевклидовой геометрии. Работы Хайяма и ат-Туси оставили заметный след в ее предыстории.

Совершенствуя античную теорию отношений, Хайям и вслед за ним ат-Туси подошли к обобщению понятия числа на любые положительные вещественные числа, которые они трактовали как отношения величин, в том числе несоизмеримых. Это способствовало устранению установившегося после древних греков противопоставления геометрических несоизмеримых величин и числовых иррациональностей, преодоленному после трудов Декарта и Ньютона.

Хайям прожил сложную, трудную жизнь. Смуты того времени заставили его много скитаться, познать и богатство и нужду. Он родился в городе Нишапур области Хорасан, исторически общей для таджиков и персов, жил и работал в разных городах Средней Азии и Ирана. Сельджукский султан и его визирь пригласили Хайяма в 1074 г. возглавить новую астрономическую обсерваторию в Исфахане. Уточнение астрономических таблиц, подготовка реформы календаря неожиданно прерываются. После убийства визиря и смерти султана обсерватория была закрыта. Блюстители догм ислама преследовали Хайяма. Спасая свою жизнь, ему пришлось в старости совершить паломничество в Мекку. Умер Хайям в своем родном городе.

Свои беды и радости Хайям воспел в бессмертных стихах. Вот одно его четверостишие:

> Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно немало.
> Два важных правила запомни для начала.
> Ты лучше голодай, чем что попало есть,
> И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

Другое он заключает стихами:

> Яд, мудрецом тебе предложенный, прими,
> Из рук же дурака не принимай бальзама.

Знаменитый ученый-энциклопедист Средней Азии МУХАММЕД АЛ-БЕРУНИ (973 — ~ 1050), современник великого Ибн-Сины, родился в городе Кяте, столице Хорезма (ныне город Бируни в Узбекистане). Здесь, в крупном центре науки того времени, он учился и работал. Афганский султан Махмуд, захвативший Хорезм в 1017 г., принудил его переехать в свою столицу Газни, где ал-Беруни возглавил работу ученых, собранных Махмудом из покоренных стран. Несколько лет ал-Беруни жил в завоеванной султаном Северной Индии, где глубоко изучил научные работы на санскрите.

Среди многочисленных работ ал-Беруни особое место занимает его огромный энциклопедический труд, посвященный сыну Махмуда Мас'уду и известный под названием «Канон Мас'уда». Помимо астрономии, хронологии, географии и других естественных наук, в нем много внимания было уделено *тригонометрии* — было подытожено ее развитие в сочинениях многочисленных предшественников ал-Беруни. Он, «пересекший моря древнегреческой и индийской философии», приобрел огромную славу на средневековом Востоке.

Тригонометрия зародилась в связи с потребностями астрономии и многие столетия трактовалась как введение в эту науку. Начала тригонометрии были изложены в Александрии Клавдием Птолемеем (II в. н. э.) в его труде «Великое математическое построение астрономии» (арабизированное название «Алмагест»). Стержнем труда было построение геоцентрической системы мира, господствовавшей в науке почти полтора тысячелетия.

Освещая свойства треугольников и их использование при решении задач астрономии, Птолемей рассматривал величину хорды дуги окружности (эквивалент удвоенного синуса половины центрального угла, стягивающего дугу). Выражения хорд некоторых дуг через радиус окружности легко находятся как стороны соответствующих вписанных в нее правильных многоугольников (треугольника, квадрата, шестиугольника и других, что для хорд дуг в 120, 90, 60° и других дает $\frac{\sqrt{3}}{2}R$, $\frac{\sqrt{2}}{2}R$, $\frac{1}{2}R$ и т. д.). Птолемей составил довольно точную таблицу хорд дуг от 0 до 180° через 1°, равнозначную таблице синусов углов от 0 до 90° через $\frac{1}{2}^{\circ}$.

Ученые Индии вместо хорды дуги — «тетивы лука» стали рассматривать ее половину, которая в результате не совсем точных переводов получила название *синус*, а также две другие тригонометрические величины, названные в дальнейшем *косинусом* (синус угла, дополняющий рассматриваемый до 90°) и *синусом-верзусом* (дополнение косинуса до радиуса окружности). В V в. индийцы располагали таблицей синусов от 0 до 90° через $3\frac{3}{4}^{\circ}$. Для определения высот и расстояний, а затем и решения астрономических задач они пользовались тенью вертикального шеста — гномона.

Отправляясь от этих рассмотрений, ученые арабского мира ввели эквиваленты остальных тригонометрических величин — тангенса, котангенса, секанса и косеканса. Следуя традиции александрийских и индийских астрономов, восходящей к древним вавилонянам, линии синуса и косинуса измеряли в 60-х долях радиуса. Таблицы синусов составлял ал-Хорезми. В астрономических таблицах его времени встречались уже значения всех остальных тригонометрических величин. Учение о тригонометрических величинах, о решении с их помощью сферических и плоских треугольников становится разветвленным, приобретающим все большую самостоятельность разделом математики. Ценные пополнения к нему дали Сабит ибн-Корра (836—901), Мухаммед ал-Баттани (~850 — 929), Абу-л-Вафа (940 — 998), ал-Беруни и другие ученые.

Тригонометрии ал-Беруни посвящает третью книгу своего «Канона». Десять глав этой книги содержат обширный материал, включая теоремы синусов плоской и сферической тригонометрии, таблицы синусов через 15′, тангенсов и котангенсов через 1° с правилами пользования ими, в том числе правилами линейного, общепринятого со времен Птолемея, и менее известного квадратичного интерполирования. Ал-Беруни проявил искусство в решении важных задач: вычисление стороны правильного вписанного девятиугольника, хорды дуги в 1°, отношения окружности к диаметру (число π) и других. Первая задача привела к уравнению, которое записывается теперь в виде

$$x^3 + 1 = 3x.$$

Ал-Беруни решает его путем последовательных приближений. По существу, это уравнение трисекции угла.

Вслед за «Каноном» ал-Беруни стали появляться другие сводные изложения тригонометрии. Венцом их явился «Трактат о полном четырехстороннике» (1260) Насира ад-Дина ат-Туси. Он впервые представляет тригонометрию как самостоятельную науку, содержит довольно полное и целостное построение всей ее системы, а также способы решения всех типичных задач, в том числе труднейших, решенных самим ат-Туси. Сочинение ат-Туси существенно повлияло на развитие тригонометрии в Европе, где в 1462—1464 гг. Иоганн Мюллер (Региомонтан) написал по арабским источникам сочинение «Пять книг о всевозможных треугольниках». Оно включало тригонометрию на плоскости и на сфере. Некоторые задачи на построение треугольников Региомонтан решал алгебраически. Систематическое изложение обширного материала он часто дополнял своими доказательствами. Современный вид тригонометрии придал Л. Эйлер в своем знаменитом трактате «Введение в анализ» (1748).

Уроженец города Туса в Хорасане НАСИР АД-ДИН АТ-ТУСИ (1201 — 1274) был выдающимся ученым своего времени. Потерпев неудачу у нескольких правителей, он стал советником Хулагу-хана. Возглавленные этим внуком Чингиз-хана монголы покорили Иран. Своей столицей Хулагу-хан сделал город Марагу под Тавризом (Южный Азербайджан), где по совету ат-Туси была построена в 1258—1259 гг. обсерватория — одна из лучших в средние века. К работе в обсерватории были привлечены ученые из разных мест. Под руководством ат-Туси они проводили наблюдения, обрабатывали их, исследовали вопросы математики, связанные с астрономией. Уже отмечалось, что наибольших успехов ат-Туси достиг в области геометрии и тригонометрии. Ему принадлежит также первое известное нам описание извлечения корня любой степени; оно опирается на правило разложения бинома.

Последним крупным научным центром средневекового Востока был Самарканд. Его правитель, внук Тимура, УЛУГБЕК (1394—1449) серьезно занимался астрономией и математикой. Он собрал вокруг себя большую группу видных ученых своего времени. При их участии была построена прославившаяся в веках обсерватория. Выполненные на ней работы по своей точности оставались непревзойденными длительное время.

Ведущим математиком астрономической школы Улугбека был ДЖЕМШИД АЛ-КАШИ (умер ~1430), «перл славы и чести своего времени». Он был уроженцем города Кашана в Иране. Его труды поражают высоким вычислительным искусством. Написанное в

Самарканде сочинение ал-Каши «Ключ арифметики» (1427) знаменует завершение десятичной арифметики. В нем она, ранее разработанная для целых чисел, распространена на дроби; здесь дано учение о *десятичных дробях*, которыми ал-Каши постоянно пользовался. В отрывочном виде они встречались и раньше, а общепринятыми стали после выхода в Европе книги С. Стевина «Десятая» (1585). «Трактат об окружности» (1424) ал-Каши является блестящим образцом выполнения *приближенных вычислений*. Используя правильные вписанный и описанный многоугольники с числом сторон $3 \cdot 2^{28}$ (для вычисления стороны проводятся последовательные извлечения квадратных корней), ал-Каши для отношения длины окружности к диаметру (число π) получил значение 3,14159265358979325, верное до 17-го знака. В другой своей работе он сосчитал, что $\sin 1^\circ = 0{,}017452406437283571$ (все знаки верные! — это примерно в два раза точнее, чем у ал-Беруни). По существу, указанное значение найдено путем проведения итераций для нахождения корня уравнения

$$x^3 + 0{,}7850393433644006 = 45x.$$

Вычисленные в Самарканде таблицы давали значения синусов от 0 до 45° через 1′ с точностью до девяти десятичных знаков. В Европе такая точность была получена полтора столетия спустя.

Как и другие ученые, о которых здесь говорилось, ал-Каши — ярко сверкающая звезда на математическом небосклоне.

Указатель[1]

[1]Дополнен при переводе. Соответствующие места помечены звездочкой.

Оглавление

5. «ВЕЛИЧИЕ И НИЧТОЖНОСТЬ ЧЕЛОВЕКА» (70)

Паскаль (1623—1662)

Чудо-ребенок губит свой талант. Великий геометр в семнадцать лет. Красивейшая теорема Паскаля. Скверное здоровье и религиозное опьянение. Первый вычислительный призрак. Паскаль с блеском занимается физикой. Сестра — монахиня Жаклин, душеспасительница. «Отправляйтесь в монастырь!» Возврат в мир. Литература ради религиозной одержимости. Геометрийская Елена. Зубная боль до небес. Что обнаружилось посмертно. Игрок входит в историю математики. Область теории вероятностей. Паскаль создает теорию вместе с Ферма. Нелепость пари против бога или дьявола.

6. НА БЕРЕГУ ОКЕАНА (80)

Ньютон (1648—1727)

Ньютон оценивает самого себя. Непризнанный молодой гений. Хаос его времени. На плечах гигантов. Его единственная привязанность. В Кембридже. Молодой Ньютон с радостью познает пользу терпеть дураков. Кому великая чума — кому еще большее благо. Бессмертие в двадцать четыре года (или раньше). Анализ. Ньютон непревзойден в чистой математике, глава натуральной философии. Комары, шершни и раздражения. «Начала». Суматошники. Глубочайшее в истории падение. Спор, теология, хронология, государственная служба, смерть.

7. МАСТЕР НА ВСЕ РУКИ (101)

Лейбниц (1646—1717)

Два великолепных вклада. Неурожайная весна политика. Гений в пятнадцать лет. Соблазнен правоведением. «Всеобщая характеристика». Символическое рассуждение. Предательское честолюбие. Искусный дипломат. Дипломатическая жизнь, какова она есть; дипломатические подвиги искусника предоставлены историкам. Лиса в историке, государственный деятель в математике. Прикладная этика. Существование бога. Оптимизм. Сорок лет тщеты. Выброшен, как грязный лоскут.

8. ВРОЖДЕННОЕ ИЛИ ПРИОБРЕТЕННОЕ? (111)

Семейство Бернулли (XVII—XVIII столетия)

Восемь математиков в трех поколениях. Вариационное исчисление.

9. ВОПЛОЩЕННЫЙ АНАЛИЗ (116)

Эйлер (1707—1783)

Плодовитейший математик в истории. Вырванный из богословия. Правители оплачивают расходы. Практичность непрактичного. Небесная механика и морская стратегия. Математик по случаю и предопределению. Заманенный в Санкт-Петербург. Добродетельность молчания. Полуслепой на утренней заре жизни. Бегство в Пруссию. Великодушие и грубость Фридриха Великого. Возвращение в гостеприимную Россию. Великодушие и милостивость Екатерины Великой. Полная слепота в зените жизни. Великий мастер и вдохновитель таковых на протяжении столетия.

ЭРИК ТЕМПЛ БЕЛЛ

ТВОРЦЫ МАТЕМАТИКИ

Предшественники современной математики

Редактор *Э. К. Викулина*

Художник *М. К. Шевцов*

Художественный редактор *Е. Н. Карасик*

Технический редактор *М. И. Сафранович*

Корректор *Л. П. Михеева, Н. И. Новикова*

ИБ № 4944

Сдано в набор 12.03.79. Подписано к печати 20.06.79. $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. книжно-журнальная № 2. Гарн. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 16,0. Уч.-изд. л. 16,93. Тираж 40 тыс. экз. Заказ 77. Цена 65 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.